REFORMA 2019

FIZYKA

PODRĘCZNIK • LICEUM I TECHNIKUM • ZAKRES ROZSZERZONY

WSiP

2

Drogi WSiP,

Nigdy bym nie publikowała publicznie książek wydawnictw, które działają na uczciwych zasadach.

Wasza firma jednak promuje masowy dodruk, całkowicie niepotrzebnych książek, które mogłyby być zastąpione wersjami elektronicznymi!

Co prawda e-booki są dostępne na waszej stronie, jednak:

- W przeciwieństwie do fizycznej książki, licencja na e-book kończy się po roku. Oznacza to,
- że jeżeli moja córka chciałaby powtórzyć sobie całą wiedzę do matury, musiałabym jej kupić wszystkie wasze książki od nowa.
- Waszych e-booków nie da się pobrać! Wymagają one dostęp do internetu, co uniemożliwia ich użycie na naszej wsi, gdzie zasięg jest ograniczony.
- Wasze e-booki nie działają na telefonach komórkowych!
- Wasze e-booki sprzedawane są po tej samej (albo wyższej) cenie co regulame książki. Cena e-booka powinna być niższa, gdyż e-booki wymagają elektronicznego czytnika (tabletu)!

Czas rozpocząć nową erę, w której papier nie jest bezczelnie marnowany dla pieniędzy.
Przedstawiam e-book, który spełnia wszystkie oczekiwania uczniów.

Dbajmy o środowisko, zróbmy to dla młodych pokoleń.

Spis treści

Jak korzystać z podręcznika 5

Ruch postępowy i ruch obrotowy bryły sztywnej

1. Iloczyn wektorowy dwóch wektorów 8
2. Ruch obrotowy bryły sztywnej 10
3. Energia kinetyczna bryły sztywnej 17
4. Przyczyny zmian ruchu obrotowego. Moment siły 24
5. Równowaga bryły sztywnej 32
6. Moment pędu 39
7. Analogie w opisie ruchów postępowego i obrotowego 47
8. Toczenie: złożenie ruchów postępowego i obrotowego 48

Powtórzenie działu 55

Pole grawitacyjne

9. O odkryciach Kopernika i Keplera 64
10. Prawo powszechnej grawitacji 69
11. Pierwsza prędkość kosmiczna 76
12. Natężenie pola grawitacyjnego 81
13. Praca w polu grawitacyjnym 91
14. Energia potencjalna ciała w polu grawitacyjnym 94
*15. Potencjał pola grawitacyjnego 98
16. Druga prędkość kosmiczna 101
17. Stan przeciążenia. Stany nieważkości i niedociążenia 103

Powtórzenie działu 109

Elementy astronomii

18. Układ Słoneczny 118
19. Jednostki odległości stosowane w astronomii 129
20. Nasza Galaktyka i jej miejsce we Wszechświecie 136
21. Prawo Hubble'a i teoria Wielkiego Wybuchu 141

Powtórzenie działu 148

Ruch drgający harmoniczny

22. Sprężystość jako makroskopowy efekt oddziaływań mikroskopowych 152
23. Ruch drgający harmoniczny 155
24. Matematyczny opis ruchu harmonicznego 161
25. Energia w ruchu harmonicznym 168
26. Wahadło matematyczne 171
27. Drgania wymuszone, rezonansowe i tłumione 176

Powtórzenie działu 181

Zjawiska termodynamiczne

28. Równowaga termodynamiczna. Zerowa zasada termodynamiki 188
29. Ciśnienie gazu w naczyniu zamkniętym 191
30. Równanie stanu gazu doskonałego. Równanie Clapeyrona 193
31. Szczególne przemiany gazu doskonałego 196
32. Energia wewnętrzna gazu. Stopnie swobody 200
33. Pierwsza zasada termodynamiki 203

34. Szczególne przemiany gazu doskonałego a pierwsza zasada termodynamiki 209
35. Ciepło właściwe i ciepło molowe 212
36. Energia wewnętrzna jako funkcja stanu 215
37. Silniki cieplne. Odwracalny cykl Carnota 218
38. Fluktuacje. Wzmianka o entropii 228
39. Przejścia fazowe 235
40. Para nasycona i para nienasycona 240
41. Rozszerzalność temperaturowa ciał 243
***42.** Transport energii przez przewodnictwo i konwekcję 247
Powtórzenie działu 253

Pole elektrostatyczne
43. Wzajemne oddziaływanie ciał naelektryzowanych 266
44. Natężenie pola elektrostatycznego 273
45. Naelektryzowany przewodnik 281
46. Przewodnik w polu elektrostatycznym 286
47. Analogie w opisie pól grawitacyjnego i elektrostatycznego 288
48. Pojemność elektryczna ciała przewodzącego 294
49. Kondensator 299
50. Dielektryk w polu elektrostatycznym 304
51. Energia naładowanego kondensatora 308
52. Ruch naładowanej cząstki w polu elektrostatycznym 311
Powtórzenie działu 315

Doświadczenia
1. Badamy ruch ciał o różnych momentach bezwładności 328
2. Sprawdzamy zasadę zachowania momentu pędu 332
3. Badamy wydłużenie sprężyny 334
4. Badamy zależność okresu drgań ciężarka od jego masy i współczynnika sprężystości sprężyny 336
5. Wyznaczamy wartość przyspieszenia ziemskiego za pomocą wahadła 340
6. Demonstrujemy zjawisko rezonansu mechanicznego 341
7. Badamy proces wyrównywania temperatur ciał 343
8. Wyznaczamy ciepło topnienia lodu 345
9. Wyznaczamy temperaturę topnienia i krzepnięcia naftalenu 347
10. Demonstrujemy rozszerzalność temperaturową ciał stałych 349

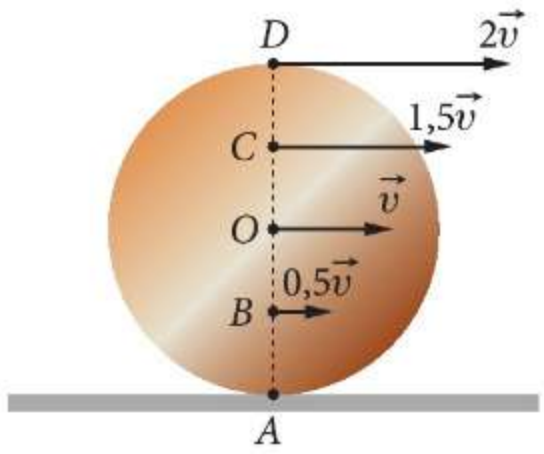
Niezbędnik matematyczny
1. Kąty skierowane 351
2. Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta 352
3. Związki między funkcjami kąta ostrego α a funkcjami $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ oraz $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ 358

Odpowiedzi do zadań 361
Stałe fizyczne 375
Wartości funkcji trygonometrycznych 377
Indeks rzeczowy polsko-angielski 378

* Gwiazdką oznaczono rozdziały nadobowiązkowe.

Przeczytaj, zrozum, zapamiętaj

Jaką prędkość wypadkową mają inne punkty bryły, np. te, które leżą na pionowej średnicy, zaznaczonej na rysunku 8.2?



Rys. 8.2 Prędkości wybranych punktów podczas toczenia

Na przykład punkt C ma prędkość wypadkową złożoną z dwóch prędkości o zgodnych zwrotach i wartościach równych: w ruchu postępowym v i w ruchu obrotowym $v_{\text{obr C}} = \omega\frac{R}{2}$, zatem:

zasadnicza część wykładu

Parsek (1 pc) jest odległością, z której jedna jednostka astronomiczna jest widoczna pod kątem jednej sekundy kątowej

$1\,\text{pc} \approx 2{,}1 \cdot 10^5\,\text{au} \approx 3{,}1 \cdot 10^{13}\,\text{km}$

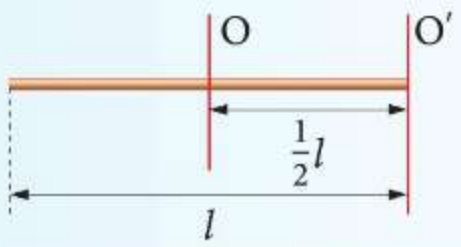
ważne wnioski, prawa oraz definicje sformułowane słownie lub za pomocą wzorów

Ćwicz i rozwiązuj zadania

Przykład 3.3

Ruch obrotowy pręta wokół osi przechodzącej przez jego koniec

Obliczymy moment bezwładności pręta o masie m i długości l względem osi O′ prostopadłej do pręta i przechodzącej przez jego koniec (rys. 3.6).



Rys. 3.6

wzorcowo rozwiązane zadania

ZADANIA

1. W jednym układzie współrzędnych naszkicuj wykresy zależności $E_{\text{p}}(r)$, $E_{\text{k}}(r)$ i $E_{\text{c}}(r)$ dla satelity o masie m krążącego po orbicie o promieniu r.
2. Oblicz przyrost energii kinetycznej meteorytu o masie $100\,\text{kg}$ podczas zbliżania się do powierzchni Ziemi z odległości $h_{\text{A}} = 5000\,\text{km}$ do odległości $h_{\text{B}} = 200\,\text{km}$. Przyjmij, że $GM_{\text{Z}} = 4 \cdot 10^{14}\,\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}$, $R_{\text{Z}} = 6{,}37 \cdot 10^6\,\text{m}$.

zadania na zakończenie rozdziału

Uporządkuj swoją wiedzę i sprawdź umiejętności

POWTÓRZENIE DZIAŁU: Zjawiska termodynamiczne



Równowaga termodynamiczna. Zerowa zasada termodynamiki

Układ jest w równowadze termodynamicznej, jeśli podczas mierzenia charakteryzujących go wielkości (ciśnienia, temperatury, gęstości) w różnych chwilach i w różnych miejscach układu otrzymujemy takie same wyniki.

Zerowa zasada termodynamiki: Jeśli pewne ciało A jest w równowadze termodynamicznej z ciałem C (termometrem) i równocześnie ciało B jest w równowadze termodynamicznej z ciałem C, to wówczas ciała A i B są w równowadze termodynamicznej ze sobą.

powtórzenie wiadomości – teoria

POWTÓRZENIE DZIAŁU: Pole elektrostatyczne

ZADANIA POWTÓRZENIOWE

1. W jednorodnym polu elektrostatycznym (wytworzonym w próżni) o liniach zwróconych w dół puszczono swobodnie ($v_0 = 0$) cząstkę naładowaną dodatnio.

1.1. Porównaj ruch tej cząstki z ruchem ciała spadającego swobodnie w jednorodnym polu grawitacyjnym, czyli nazwij rodzaje ruchu i natury sił, które je powodują.

ćwiczenie umiejętności – zadania

Zwróć uwagę na kolory

Doświadczenia

Doświadczenie 2. Sprawdzamy zasadę zachowania momentu pędu

W celu sprawdzenia zasady zachowania momentu pędu układu ciał będziemy obserwować i badać ruch obrotowy układów ciał, których moment bezwładności ulega zmianie podczas ruchu.

doświadczenia i opracowanie wyników

Niezbędnik matematyczny

Wykres funkcji cosinus – cosinusoida

Najpierw narysujemy wykres funkcji cosinus w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ (rys. 7). Skorzystamy z tabeli 2.

uzupełnienie matematyczne

Pamiętaj: Odpowiedzi do wszystkich zadań zamieszczonych w podręczniku oraz opracowania wyników pomiarów i doświadczeń zapisuj w zeszycie przedmiotowym.



RUCH POSTĘPOWY I RUCH OBROTOWY BRYŁY SZTYWNEJ

- Pojęcia i wielkości fizyczne opisujące ruch obrotowy
- Druga zasada dynamiki dla ruchu obrotowego
- Energia kinetyczna i moment pędu bryły sztywnej
- Równowaga bryły sztywnej
- Toczenie



1. Iloczyn wektorowy dwóch wektorów

- Definicja iloczynu wektorowego
- Cechy iloczynu wektorowego
- Reguła śruby prawoskrętnej

Przypomnij sobie poznane dotychczas działania na wektorach.

Iloczyn wektorowy dwóch wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ zapisujemy $\vec{a} \times \vec{b}$ i czytamy „$\vec{a}$ mnożone wektorowo przez $\vec{b}$" (lub skrótowo z ang. „$\vec{a}$ krzyż $\vec{b}$"). Iloczyn ten jest wektorem $\vec{c}$:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$$

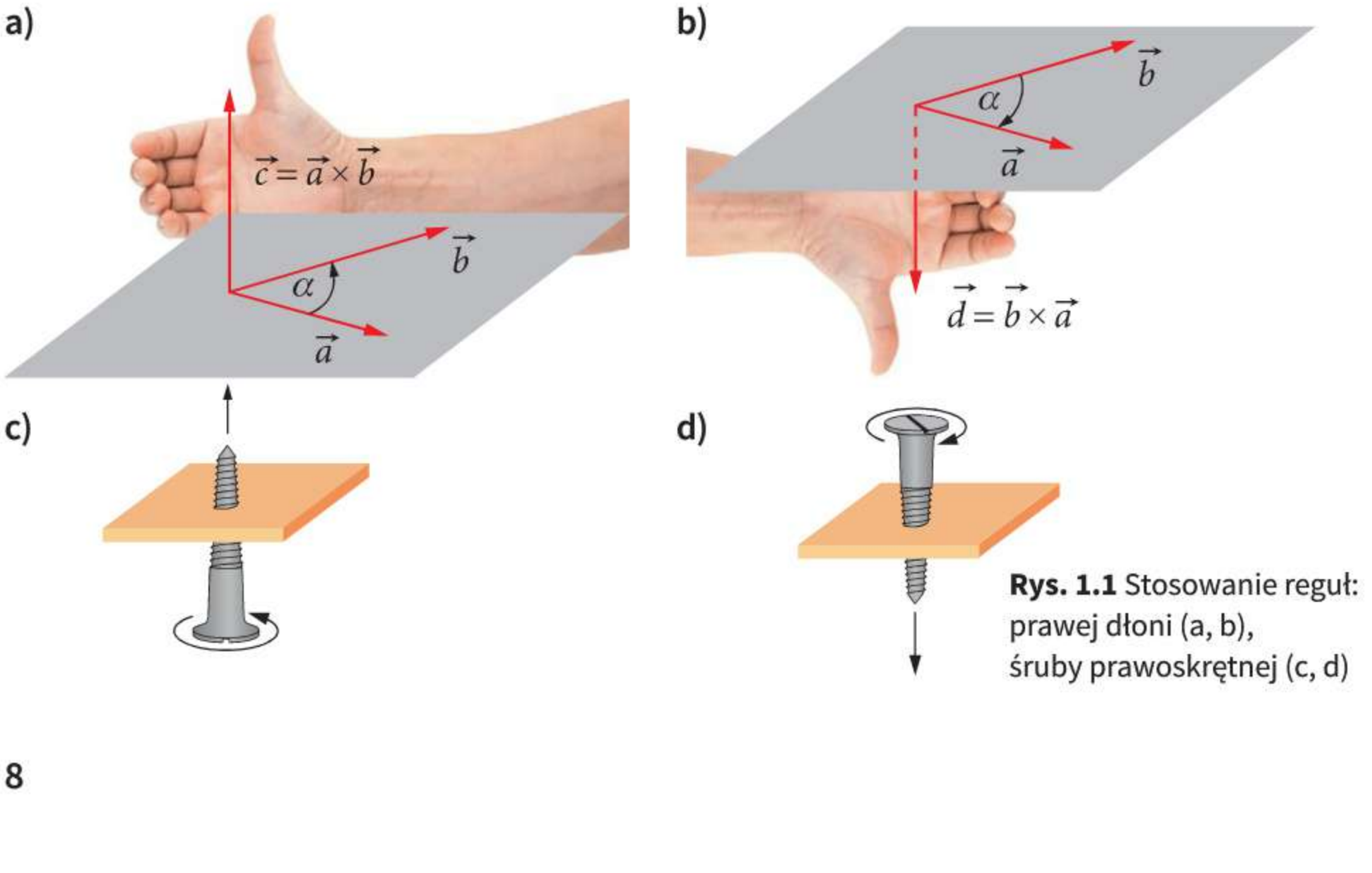
o poniżej podanych cechach.

- Wartość wektora $\vec{c}$ jest równa iloczynowi wartości wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ oraz sinusa kąta zawartego między nimi.

$$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$$

- Kierunek wektora $\vec{c}$ jest prostopadły do płaszczyzny, w której leżą wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$.
- Zwrot wektora $\vec{c}$ wyznaczamy **regułą prawej dłoni** lub **regułą śruby prawoskrętnej**. Zgodnie z regułą prawej dłoni (rys. 1.1a):

Jeśli ustawimy palce wzdłuż łuku mniejszego kąta między wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$, to odgięty kciuk wskaże kierunek i zwrot wektora $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.



Rys. 1.1 Stosowanie reguł: prawej dłoni (a, b), śruby prawoskrętnej (c, d)

Zgodnie natomiast z regułą śruby prawoskrętnej (rys. 1.1c) śrubę ustawiamy wzdłuż kierunku wektora $\vec{c}$ i obracamy w prawo od wektora $\vec{a}$ do wektora $\vec{b}$ o kąt $\alpha < 180°$. Ruch postępowy śruby wskazuje zwrot wektora $\vec{c}$.

Podobnie postępujemy przy mnożeniu wektora $\vec{b}$ przez wektor $\vec{a}$. Otrzymujemy wtedy, zgodnie z regułami prawej dłoni lub śruby prawoskrętnej, wektor $\vec{d}$, pokazany na rysunkach 1.1b i d.

Z definicji iloczynu wektorowego wynika, że:

- Iloczyn wektorowy jest nieprzemienny:

$$\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$$

a dokładniej mówiąc, jest antyprzemienny:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

co oznacza, że wektory $\vec{a} \times \vec{b}$ i $\vec{b} \times \vec{a}$ są przeciwne.

- Iloczyn wektorowy dwóch wektorów prostopadłych ma wartość:

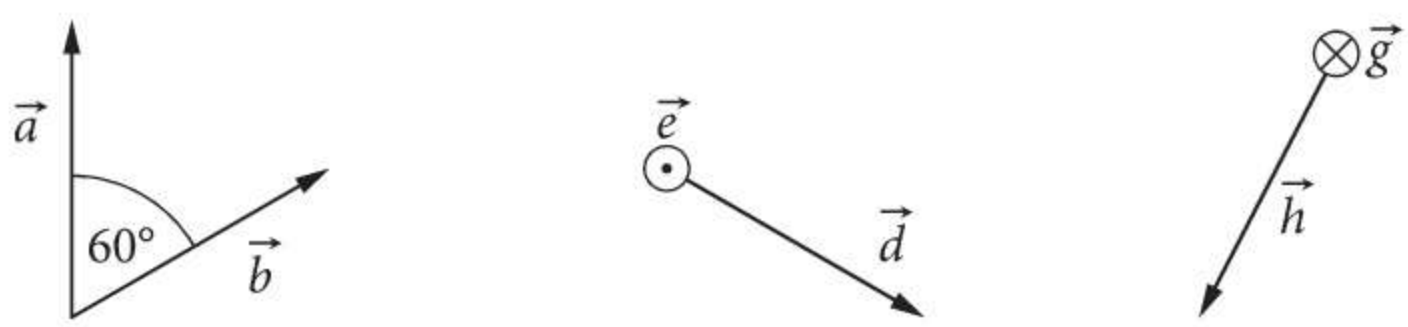
$$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin 90° = |\vec{a}||\vec{b}|$$

ponieważ $\sin 90° = 1$. Iloczyn wektorowy dwóch wektorów o ustalonej długości ma wartość maksymalną, gdy wektory te są prostopadłe.

- Iloczyn wektorowy dwóch wektorów równoległych (o zgodnych lub przeciwnych zwrotach) jest równy zeru (ponieważ $\sin 0° = 0$ i $\sin 180° = 0$).

ZADANIA

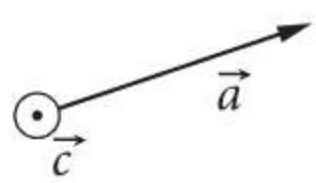
1. Na rysunku 1.2 przedstawiono pary wektorów o wartościach:
$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{d}| = |\vec{e}| = |\vec{g}| = |\vec{h}| = 1$.
Wektory prostopadłe do płaszczyzny rysunku i zwrócone pod rysunek oznaczono symbolem $\otimes$, a zwrócone przed rysunek – symbolem $\odot$.



Rys. 1.2

a) Podaj wszystkie cechy wektorów: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{f} = \vec{d} \times \vec{e}$, $\vec{j} = \vec{g} \times \vec{h}$.
b) Przerysuj rysunki do zeszytu i dorysuj na nich wektory: $\vec{c}$, $\vec{f}$, $\vec{j}$.

2. Z wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ o wartościach $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ utworzono iloczyn wektorowy $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ o wartości $|\vec{c}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Na rysunku 1.3 przedstawiono wektory $\vec{a}$ i $\vec{c}$. Przerysuj rysunek do zeszytu i dorysuj wektor $\vec{b}$.



Rys. 1.3



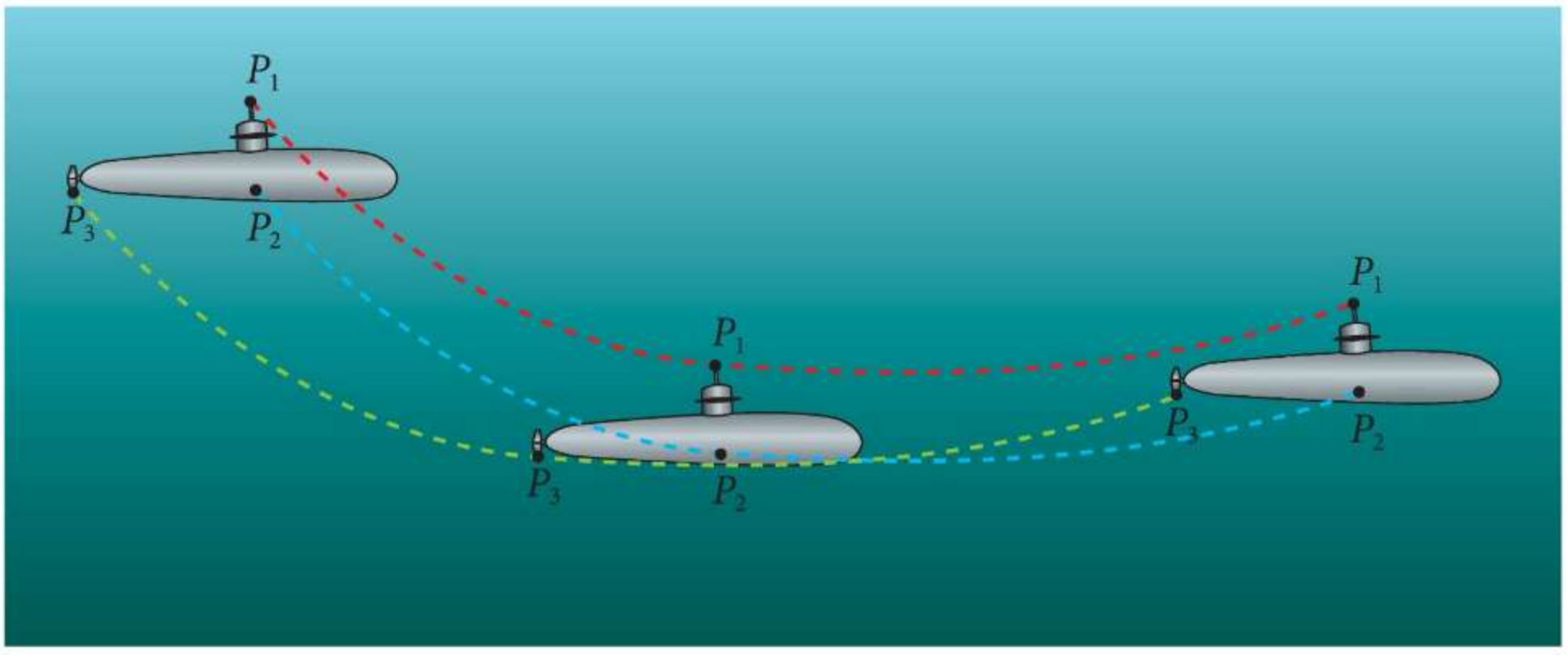
2. Ruch obrotowy bryły sztywnej

- Szybkość kątowa średnia i chwilowa
- Prędkość kątowa średnia i chwilowa
- Przyspieszenie kątowe
- Analogie i związki między wielkościami kinematycznymi opisującymi ruch postępowy i ruch obrotowy bryły

Przypomnij sobie kinematyczny opis ruchu postępowego.

W rozdziale 2 podręcznika do klasy pierwszej wprowadziliśmy pojęcie bryły sztywnej – ciała, w którym odległości między dowolnie wybranymi elementami nie ulegają zmianie mimo sił zewnętrznych działających na to ciało.
Bryła sztywna jest modelem, który stanowi dobre przybliżenie rzeczywistych ciał stałych, jeśli ich odkształcenia pod wpływem działających sił są pomijalnie małe.

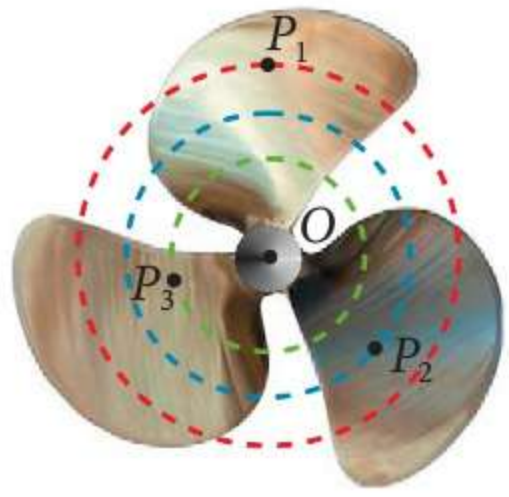
Bryła sztywna może poruszać się ruchem postępowym, obrotowym lub złożonym.
W tym podręczniku będziemy zajmowali się przede wszystkim ruchem obrotowym wokół stałej osi obrotu, czyli osi, której kierunek nie ulega zmianie w układzie odniesienia wybranym do opisu ruchu. Ponadto w większości rozpatrywanych przypadków **oś obrotu będzie osią symetrii ciała**.
Opis ruchów obrotowych, w których kierunek osi obrotu względem podłoża zmienia się podczas ruchu (jak np. w ruchu bąka zabawki[1]), jest bardzo skomplikowany.
W ruchu postępowym bryły tory wszystkich jej punktów są identyczne (rys. 2.1).



Rys. 2.1 Przykład ruchu postępowego bryły sztywnej

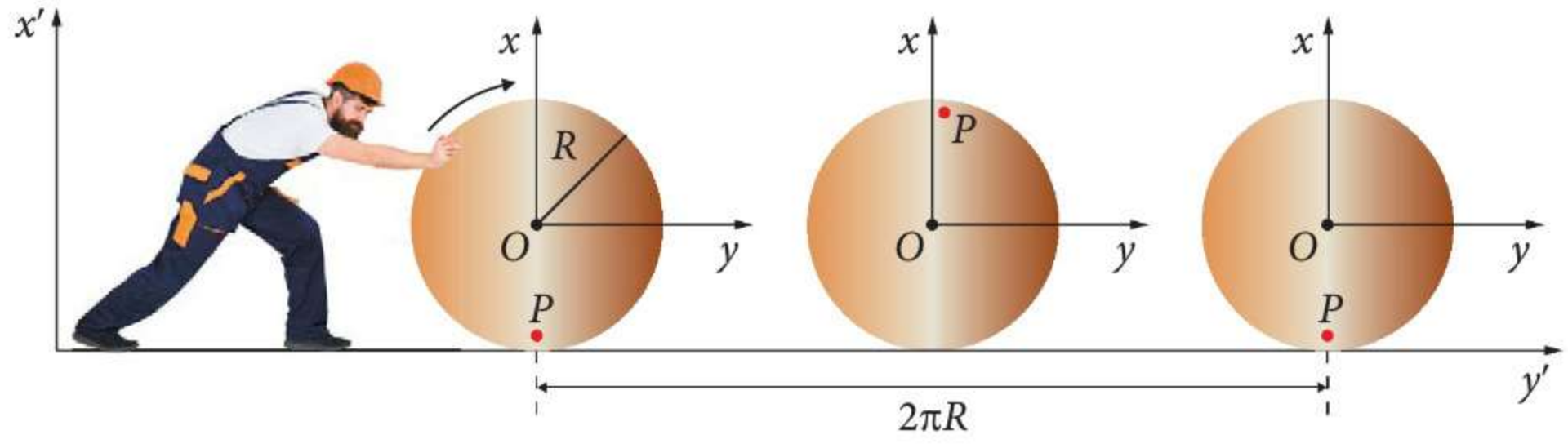
[1] Ruch bąka zabawki opisano na s. 44.

Natomiast w ruchu obrotowym poszczególne punkty bryły poruszają się po okręgach o środkach leżących na jednej prostej, zwanej osią obrotu. Okręgi te leżą na płaszczyznach prostopadłych do osi obrotu (rys. 2.2).



Rys. 2.2 Przykład ruchu obrotowego bryły sztywnej

Podczas opisu ruchu złożonego korzystamy ze znanej ci już zasady superpozycji ruchów, tzn. rozkładamy ruch złożony na ruchy proste względem odpowiednio wybranych układów odniesienia. Przykładem ruchu złożonego, z którym często miewamy do czynienia w życiu codziennym, jest toczenie (rys. 2.3).



Rys. 2.3 Toczenie bryły obrotowej

W układzie x, y ruch płaskiej, jednorodnej tarczy o promieniu R jest tylko ruchem obrotowym wokół osi przechodzącej przez środek masy tarczy i prostopadłej do płaszczyzny rysunku. Układ x, y związany ze środkiem masy tarczy porusza się względem układu x', y' ruchem postępowym. Toczenie można więc potraktować jako złożenie dwóch ruchów:

- ruchu obrotowego wokół osi przechodzącej przez środek masy ciała,
- ruchu postępowego środka masy tego ciała.

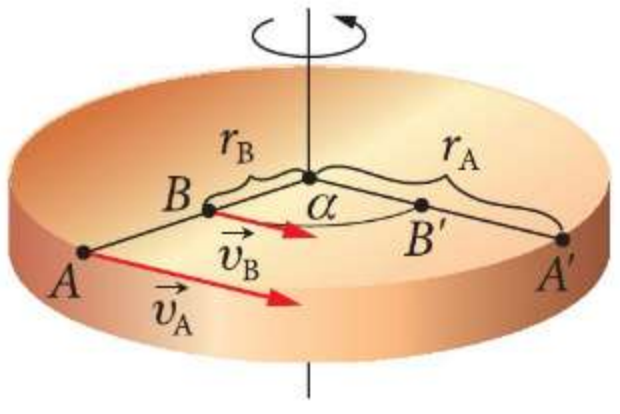
Podczas omawiania ruchu punktu materialnego po okręgu (klasa pierwsza, rozdział 8) wprowadziliśmy pojęcia szybkości liniowej i kątowej. Jeśli bryła obraca się wokół wybranej, stałej osi, to promienie wodzące wszystkich jej punktów zakreślają w tym samym czasie takie same kąty, więc ich szybkości kątowe są jednakowe. Natomiast szybkości liniowe poszczególnych punktów bryły zależą od ich odległości od osi obrotu (rys. 2.4).

$$\omega_A = \frac{\alpha}{t} = \omega_B = \omega$$

$$v_A = \omega r_A$$

$$v_B = \omega r_B$$

$$r_A > r_B \quad \Rightarrow \quad v_A > v_B$$



Rys. 2.4 Prędkości wybranych punktów obracającego się walca

Przy opisie ruchu postępowego posługujemy się pojęciami szybkości średniej $v_{śr}$ i szybkości chwilowej v oraz prędkości średniej $\vec{v}_{śr}$ i prędkości chwilowej $\vec{v}$. Analogicznie postępujemy przy opisie ruchu obrotowego bryły. Wprowadzamy pojęcia **średniej** i **chwilowej szybkości kątowej** ($\omega_{śr}$ i ω) oraz **średniej prędkości kątowej** $\vec{\omega}_{śr}$ i **chwilowej prędkości kątowej** $\vec{\omega}$ (zwanej krócej prędkością kątową).

Średnia szybkość kątowa jest to iloraz kąta, o który obróciła się bryła w pewnym czasie, i tego czasu:

$$\omega_{śr} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$$

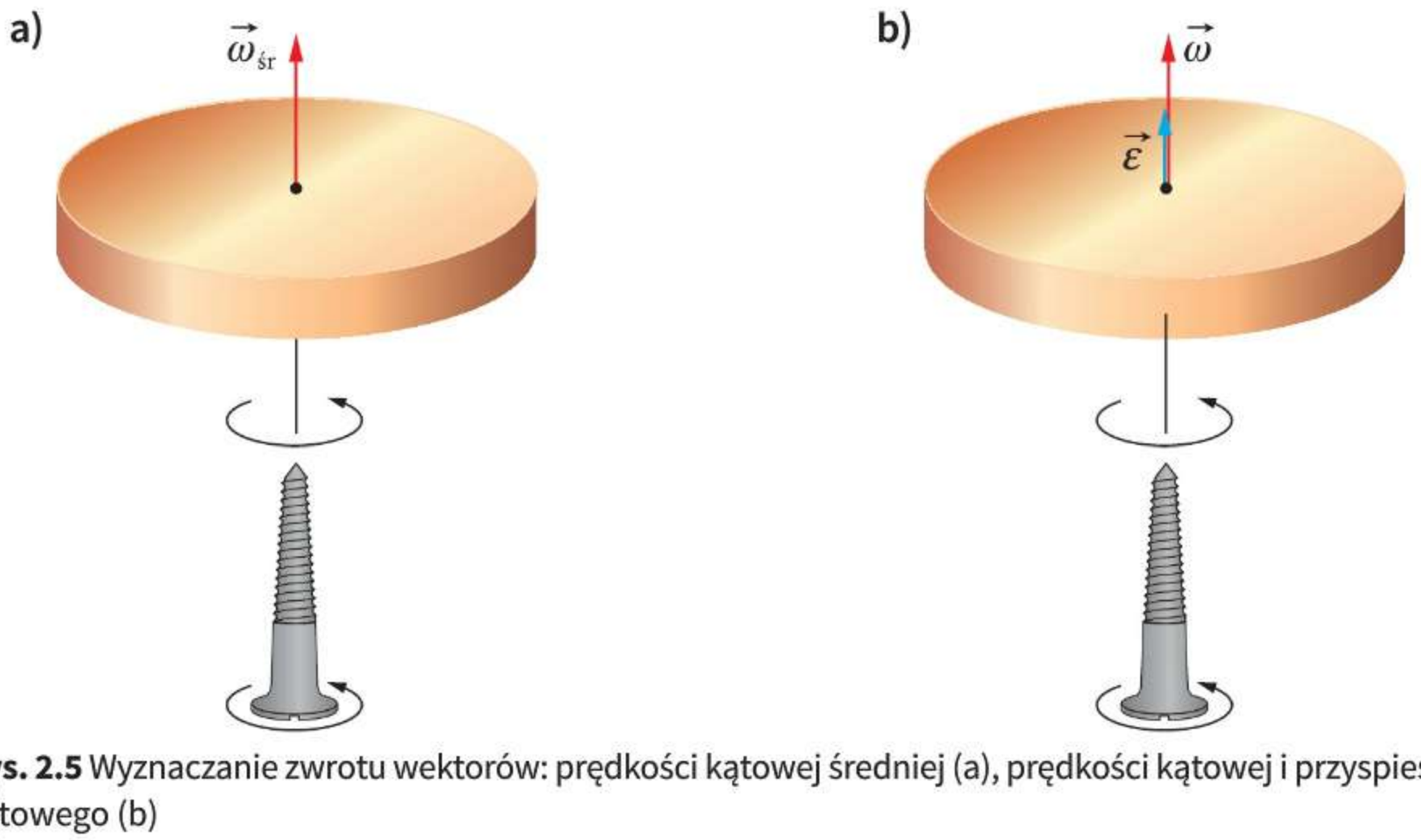
Jeśli odstęp czasu Δt, w którym nastąpił obrót bryły o kąt $\Delta\alpha$, zmierza do zera, to iloraz $\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$ zmierza do szybkości chwilowej.

Definicję **szybkości chwilowej** zapisujemy wzorem:

$$\omega = \left(\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}\right)_{\Delta t \to 0}$$

Prędkość kątowa średnia $\vec{\omega}_{śr}$ jest to wektor, którego:

- wartość jest równa $\omega_{śr} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$,
- kierunek pokrywa się z kierunkiem osi obrotu bryły,
- zwrot (wyznaczony za pomocą reguły śruby prawoskrętnej) jest zgodny ze zwrotem prędkości ruchu postępowego śruby (rys. 2.5a).



Rys. 2.5 Wyznaczanie zwrotu wektorów: prędkości kątowej średniej (a), prędkości kątowej i przyspieszenia kątowego (b)

Prędkość kątowa chwilowa $\vec{\omega}$ jest to wektor, którego:

- wartość $\omega = \left(\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}\right)_{\Delta t \to 0}$,
- kierunek pokrywa się z kierunkiem osi obrotu bryły,
- zwrot wyznaczamy za pomocą reguły śruby prawoskrętnej (rys. 2.5b).

W opisie ruchu obrotowego, w którym prędkość kątowa ulega zmianie, czyli ruchu niejednostajnego, wprowadza się **przyspieszenie kątowe średnie** $\vec{\varepsilon}_{\text{śr}}$ i **chwilowe** $\vec{\varepsilon}$, zwane krócej **przyspieszeniem kątowym** (rys. 2.5b). Przyspieszenie średnie jest równe ilorazowi przyrostu prędkości kątowej i czasu, w którym ten przyrost nastąpił:

$$\vec{\varepsilon}_{\text{śr}} = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}$$

Przyspieszenie kątowe (chwilowe) definiujemy wzorem:

$$\vec{\varepsilon} = \left(\frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}\right)_{\Delta t \to 0}$$

Jednostką przyspieszenia kątowego w SI jest $\frac{\text{radian}}{\text{s}^2}$ $\left(1\frac{1}{\text{s}^2}\right)$.

Wielkościami charakteryzującymi ruch obrotowy są tzw. wielkości kątowe ($\omega_{\text{śr}}$, ω, $\vec{\omega}_{\text{śr}}$, $\vec{\omega}$, $\vec{\varepsilon}_{\text{śr}}$, $\vec{\varepsilon}$), ale w opisie ruchu po okręgu poszczególnych punktów bryły występują także wielkości liniowe: szybkość v i prędkość liniowa $\vec{v}$ oraz przyspieszenie $\vec{a}$. Ze związku między szybkością liniową v_{A} dowolnego punktu A bryły, odległego od jej osi obrotu o r_{A}, a szybkością kątową bryły ω korzystaliśmy już na początku tego rozdziału. Dla każdego punktu bryły można napisać związek:

$$v_{\text{A}} = \omega r_{\text{A}} \tag{2.1}$$

Jeśli bryła porusza się ruchem obrotowym ze stałą szybkością kątową, każdy jej punkt porusza się po okręgu z prędkością liniową o stałej wartości. Jak wiesz, w takim ruchu po okręgu istnieje przyspieszenie dośrodkowe (związane ze zmianą kierunku wektora prędkości $\vec{v}$), którego wartość jest wyrażona wzorem:

$$a_{\text{r}} = \frac{v^2}{r} \qquad \text{lub} \qquad a_{\text{r}} = \omega^2 r$$

Jeśli szybkość kątowa bryły będzie się zmieniać, szybkości liniowe poszczególnych punktów także będą się zmieniać, co spowoduje pojawienie się składowej stycznej przyspieszenia liniowego (klasa pierwsza, rozdział 3) o wartości $a_{\text{s}} = \frac{|\Delta v|}{\Delta t}$. Związek (2.1) jest w takim przypadku związkiem między chwilową szybkością liniową poszczególnych punktów bryły i chwilową szybkością kątową bryły. Skorzystamy z tego związku i wyprowadzimy wzór wiążący wartość składowej stycznej przyspieszenia liniowego a_{s} z wartością przyspieszenia kątowego ε.

Dla punktu bryły odległego o r od jej osi obrotu w każdej chwili zmiennego ruchu obrotowego:

$$v = \omega r$$

Jeśli w czasie Δt nastąpi zmiana szybkości kątowej bryły o $\Delta\omega$, to szybkości liniowe poszczególnych punktów bryły zmienią się o:

$$\Delta v = \Delta\omega r$$

(oczywiście wartości Δv są różne dla punktów znajdujących się w różnych odległościach od osi obrotu).

Po podzieleniu obu stron tego równania przez Δt otrzymamy:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} r$$

Dla $\Delta t \to 0$:

$$\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)_{\Delta t \to 0} = \left(\frac{\Delta \omega}{\Delta t}\right)_{\Delta t \to 0} r$$

czyli:

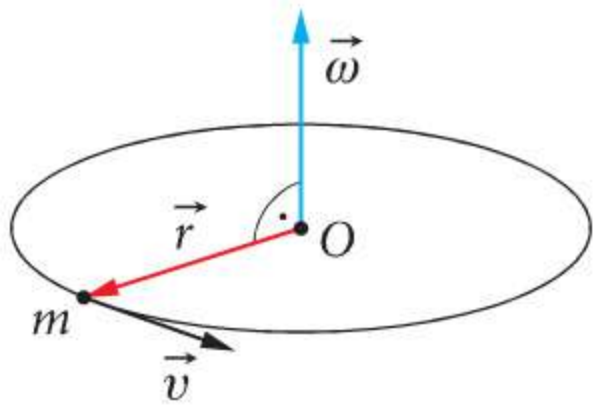
$$a_s = \varepsilon r \tag{2.2}$$

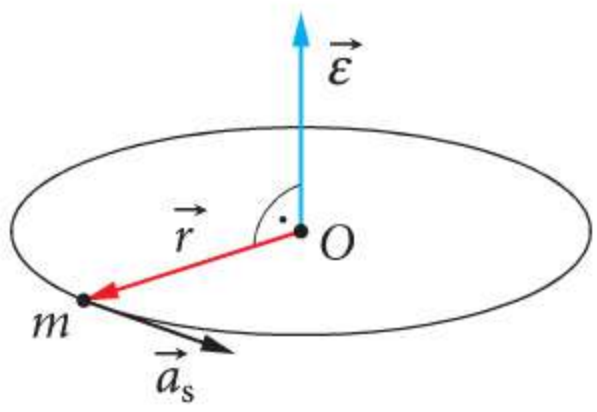
WIEDZIEĆ WIĘCEJ

Przyspieszenie styczne a przyspieszenie kątowe

Związek między prędkością liniową punktu odległego o r od osi obrotu i prędkością kątową bryły można zapisać jako iloczyn wektorowy $\vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{v}$. Wektor $\vec{r}$ (o wartości r) ma początek na osi obrotu, a koniec w punkcie, w którym w danej chwili znajduje się rozważany punkt materialny obracającej się bryły, czyli w punkcie zaczepienia wektora prędkości liniowej $\vec{v}$. Wartość wektora $\vec{v}$ wyrażamy znanym wzorem: $v = |\vec{\omega}||\vec{r}| \sin 90^\circ = \omega r$.

Analogicznie związek $a_s = \varepsilon r$ między składową styczną przyspieszenia liniowego punktu znajdującego się w odległości r od osi obrotu bryły a jej przyspieszeniem kątowym to wartość iloczynu wektorowego $\vec{\varepsilon} \times \vec{r} = \vec{a}_s$.





Analogie między wielkościami kinematycznymi opisującymi ruch postępowy i obrotowy bryły sztywnej oraz związki między tymi wielkościami przedstawia tabela 2.1.

Tabela 2.1

Wielkości liniowe opisujące ruch postępowy	Wielkości kątowe opisujące ruch obrotowy	Związki między wielkościami
s	α	$s = \alpha r$
$v_{śr} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$	$\omega_{śr} = \frac{\Delta \alpha}{\Delta t}$	
$v = \left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)_{\Delta t \to 0}$	$\omega = \left(\frac{\Delta \alpha}{\Delta t}\right)_{\Delta t \to 0}$	$v = \omega r$
$\vec{v}_{śr} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$	$\vec{\omega}_{śr} = \frac{\Delta \alpha}{\Delta t}\vec{k} \qquad \lvert\vec{k}\rvert = 1$	
$\vec{v} = \left(\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}\right)_{\Delta t \to 0}$	$\vec{\omega} = \left(\frac{\Delta \alpha}{\Delta t}\right)_{\Delta t \to 0}\vec{k} \qquad \lvert\vec{k}\rvert = 1$	
$\vec{a}_{śr} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$	$\vec{\varepsilon}_{śr} = \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t}$	
$\vec{a} = \left(\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}\right)_{\Delta t \to 0}$	$\vec{\varepsilon} = \left(\frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t}\right)_{\Delta t \to 0}$	$a_s = \varepsilon r$

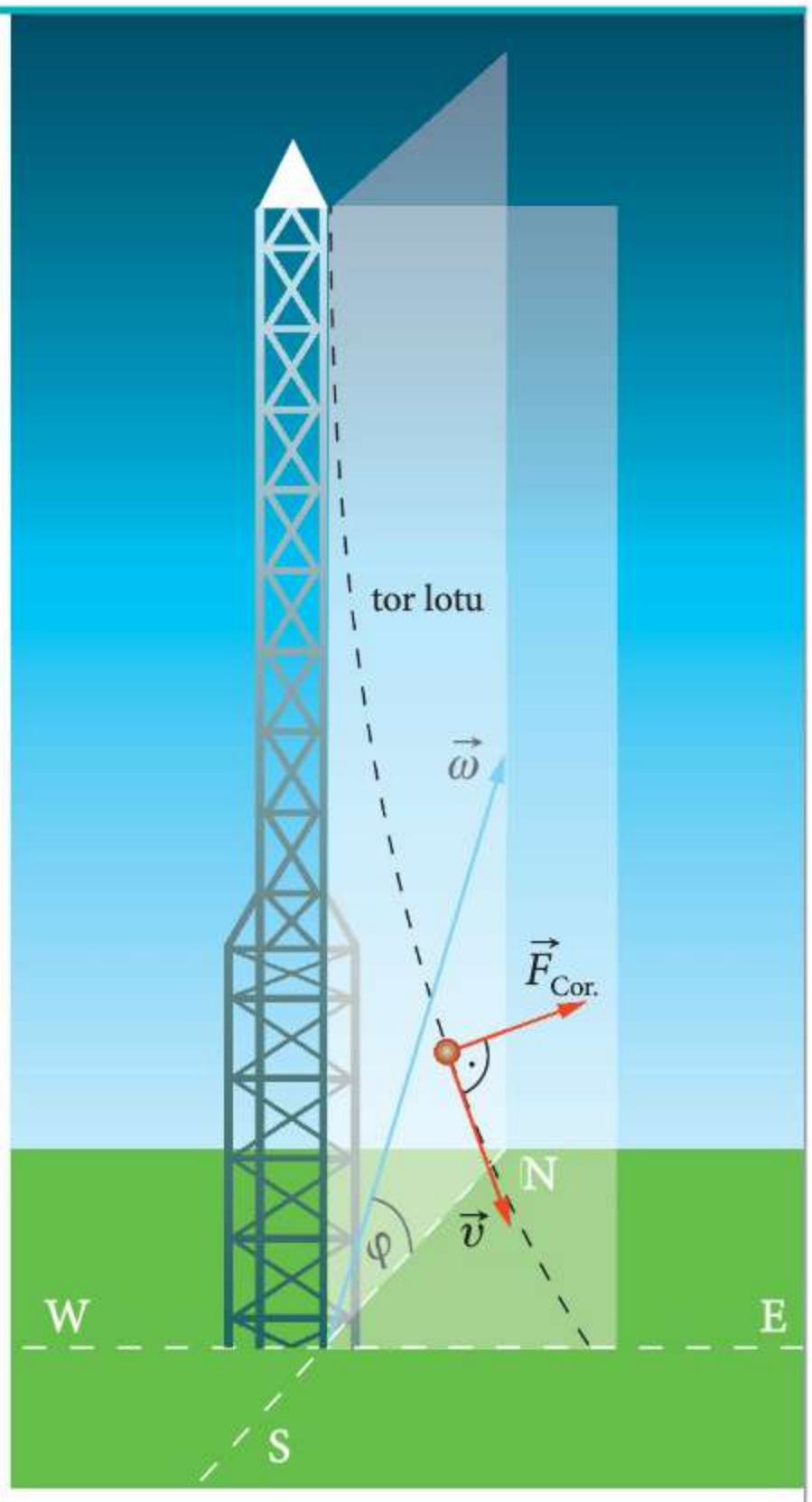
WIEDZIEĆ WIĘCEJ

Siła Coriolisa

Siła Coriolisa to **siła bezwładności** działająca na ciała poruszające się w nieinercjalnym, obracającym się układzie odniesienia. Skutki działania siły Coriolisa, czyli **efekty Coriolisa**, są obserwowane tylko przez obserwatora znajdującego się w takim układzie odniesienia. Jest nim np. dowolny układ związany z powierzchnią Ziemi, wirującej z zachodu na wschód. Siłę Coriolisa wyrażamy wzorem:

$$\vec{F}_{\text{Cor.}} = -2m(\vec{\omega} \times \vec{v})$$

gdzie: m – masa ciała, $\vec{v}$ – prędkość, z którą ciało porusza się (np. spada) w układzie związanym z Ziemią, $\vec{\omega}$ – prędkość kątowa Ziemi; na rysunku kąt φ jest równy szerokości geograficznej.



Zauważ, że dla $\vec{v} \parallel \vec{\omega}$ wartość iloczynu wektorowego $\vec{\omega} \times \vec{v}$ jest równa zeru, więc siła Coriolisa nie działa na ciała poruszające się równolegle do osi obrotu Ziemi.

Działaniem sił Coriolisa tłumaczymy m.in. poniższe zjawiska.

- Silniejsze podmywanie prawych brzegów rzek na półkuli północnej i lewych brzegów rzek na półkuli południowej (niezależnie od kierunku nurtu rzeki).
- Odchylenie od pionu torów pocisków i ciał spadających swobodnie (na obu półkulach na wschód); np. ciało upuszczone ze szczytu wieży Eiffla spadłoby odchylone o 6,5 cm.
- Wirowanie cyklonów: przeciwnie do ruchu wskazówek zegara na półkuli północnej, a zgodnie z ruchem wskazówek zegara na półkuli południowej (gdy wiatry na półkuli północnej zwykle skręcają w prawo, a na półkuli południowej – w lewo).

Efekt Coriolisa ma także wpływ na tor lotu samolotów i rakiet.



ZADANIA

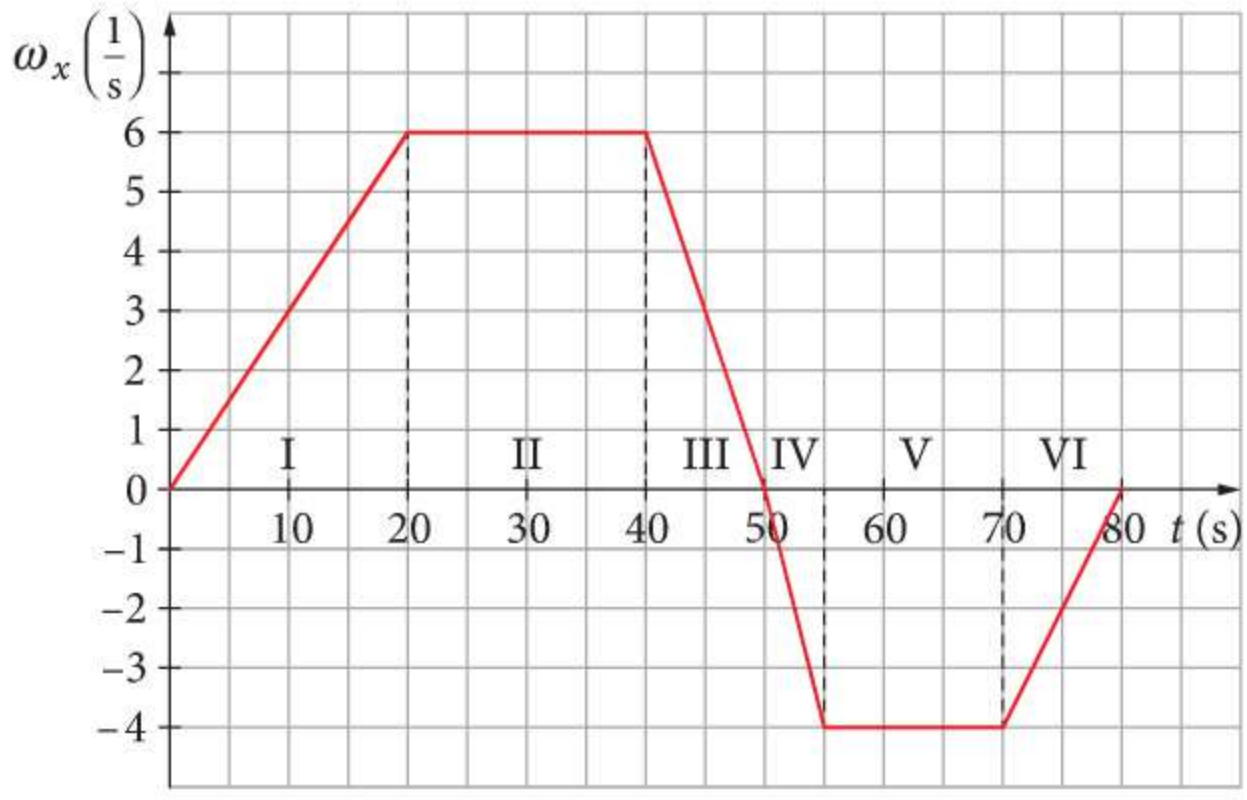
1. Wyprowadź wzory przedstawiające zależności $\alpha(t)$ oraz $\omega(t)$ w ruchu obrotowym jednostajnie zmiennym i narysuj wykresy tych zależności.
Skorzystaj z definicji $\omega_{śr}$ oraz $\varepsilon_{śr}$.

2. Tarcza szlifierska o promieniu $r = 10\,\text{cm}$ obracała się z szybkością kątową $\omega_1 = 120\,\text{rad/s}$ wokół osi prostopadłej do tarczy i przechodzącej przez jej środek. Następnie jej szybkość wzrosła jednostajnie do $\omega_2 = 160\,\text{rad/s}$ w czasie $t = 4\,\text{s}$.

a) Oblicz:
- wartość przyspieszenia kątowego tarczy,
- wartość składowej stycznej przyspieszenia liniowego punktów leżących na obwodzie tarczy.

b) Wyraź wzorem wartość przyspieszenia liniowego punktów leżących na obwodzie tarczy w chwili, w której szybkość kątowa tarczy jest równa ω i spełnia warunek $\omega_1 < \omega < \omega_2$.

3. Na rysunku 2.6 przedstawiono zależność współrzędnej prędkości kątowej od czasu dla walca obracającego się wokół osi symetrii równoległej do osi x układu współrzędnych.



Rys. 2.6

a) Opisz ruch walca w każdym z przedziałów czasu zaznaczonych na rysunku.
b) Oblicz:
- średnią szybkość kątową walca,
- liczbę obrotów wykonanych przez walec podczas całego ruchu.

c) Narysuj wykres zależności współrzędnej przyspieszenia kątowego walca od czasu.



3. Energia kinetyczna bryły sztywnej

- Energia kinetyczna bryły w ruchu postępowym
- Moment bezwładności układu punktów materialnych
- Energia kinetyczna bryły w ruchu obrotowym
- Momenty bezwładności wybranych brył
- Twierdzenie Steinera

Przypomnij sobie wiadomości o energii kinetycznej.

Bryłę sztywną można opisywać jako układ sztywno połączonych, bardzo małych elementów, traktowanych jako punkty materialne. Jeśli liczbę tych elementów oznaczymy literą n, a masy poszczególnych elementów będą odpowiednio równe $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$, to masę bryły możemy zapisać jako sumę:

$$m = m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n$$

lub w skrócony sposób:

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

Energia kinetyczna układu złożonego z n elementów jest sumą ich energii kinetycznych. Podczas ruchu postępowego bryły sztywnej wszystkie jej elementy mają w danej chwili taką samą prędkość $\vec{v}$. Energię kinetyczną bryły poruszającej się z prędkością $\vec{v}$ możemy więc obliczyć jako sumę:

$$E_k = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{m_3 v_3^2}{2} + \ldots + \frac{m_n v_n^2}{2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v^2}{2} = \frac{v^2}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i$$

Ponieważ $\sum_{i=1}^{n} m_i = m$, to:

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

Energia kinetyczna bryły poruszającej się ruchem postępowym jest wyrażona znanym ci doskonale wzorem. Czy ten sam wzór można stosować dla ruchu obrotowego bryły? Domyślasz się już zapewne, że nie. W ruchu obrotowym wartość prędkości liniowej poszczególnych elementów bryły zależy od ich odległości od osi obrotu. Dla elementu, który oznaczymy wskaźnikiem i, odległego o r_i od osi obrotu, zachodzi związek $v_i = \omega r_i$ (chwilowa prędkość kątowa jest taka sama dla wszystkich elementów, więc przy oznaczającej jej wartość literze ω nie piszemy wskaźnika).

Energia kinetyczna rozważanego elementu o masie m_i w chwili, gdy jego prędkość liniowa ma wartość v_i, jest równa:

$$E_{ki} = \frac{m_i v_i^2}{2}$$

Aby obliczyć całkowitą energię kinetyczną wirującej bryły, musimy dodać energie kinetyczne wszystkich jej elementów:

$$E_{\mathrm{k}} = \sum_{i=1}^{n} E_{\mathrm{k}i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2}$$

Po podstawieniu $v_i = \omega r_i$ otrzymujemy:

$$E_{\mathrm{k}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \omega^2 r_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \qquad (3.1)$$

Wielkość $\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$ nazywamy **momentem bezwładności** bryły względem wybranej osi obrotu i oznaczamy jako J.

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \qquad (3.2)$$

Moment bezwładności bryły jest równy sumie iloczynów mas poszczególnych elementów bryły i kwadratów ich odległości od osi obrotu.
Jednostką tej wielkości jest $1\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$.

Po zastosowaniu definicji (3.2) zapisujemy wzór na **energię kinetyczną** bryły o momencie bezwładności J, poruszającej się ruchem obrotowym z chwilową szybkością kątową ω, w postaci:

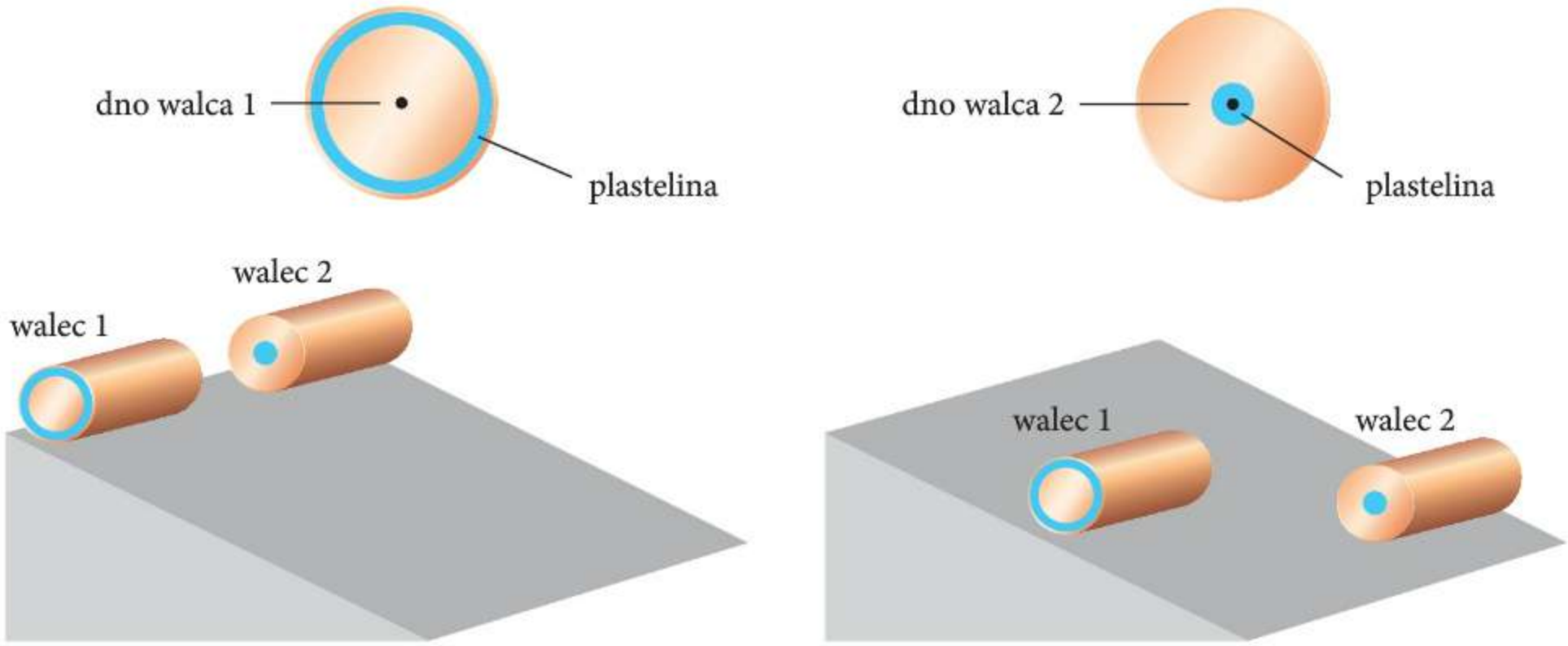
$$E_{\mathrm{k}} = \frac{J\omega^2}{2} \qquad (3.3)$$

Dla bryły o momencie bezwładności J jej energia kinetyczna w ruchu obrotowym jest wprost proporcjonalna do kwadratu prędkości kątowej. (Zauważ, że kwadrat prędkości kątowej jest równy kwadratowi szybkości kątowej: $(\vec{\omega})^2 = \vec{\omega} \cdot \vec{\omega} = \omega^2 \cos 0^\circ = \omega^2$).

Moment bezwładności bryły charakteryzuje jej bezwładność w ruchu obrotowym i jest wielkością analogiczną do masy, która jest miarą bezwładności ciała w ruchu postępowym.

Wpływ momentu bezwładności na ruch obrotowy ciała możemy sprawdzić jakościowo w prostym doświadczeniu (rys. 3.1). Przygotowujemy dwa jednakowe naczynia w kształcie walca, 6 jednakowych lasek plasteliny oraz deskę o długości ok. 1 m i szerokości ok. 0,5 m, która posłuży za równię pochyłą. Na dnie jednego z naczyń przyklejamy równomiernie 3 laski plasteliny wzdłuż obwodu dna. Z pozostałych trzech lasek formujemy kulę i przyklejamy ją w środku dna drugiego naczynia. Masy obu naczyń powinny być takie same, co sprawdzamy za pomocą wagi.

Ustawiamy równię pod takim kątem, by walce staczały się z niej bez poślizgu. Następnie układamy walce na szczycie równi, puszczamy i obserwujemy ich ruch.



Rys. 3.1 Ruch walców o różnych momentach bezwładności

Z faktu, że czasy ruchów walców po równi są różne, wynika, że nie masa ciała, lecz jej rozkład względem osi obrotu ma wpływ na ruch obrotowy ciała. W walcu 1, który później dotarł do podstawy równi, plastelina tworzyła „obręcz" o promieniu równym w przybliżeniu promieniowi dna, a w walcu 2 plastelina znajdowała się w niewielkiej odległości od osi obrotu, więc momenty bezwładności walców były różne. Walec o mniejszym momencie bezwładności dotarł do podstawy równi w krótszym czasie. Matematyczny opis ruchu walców poznasz w rozdziale 8.

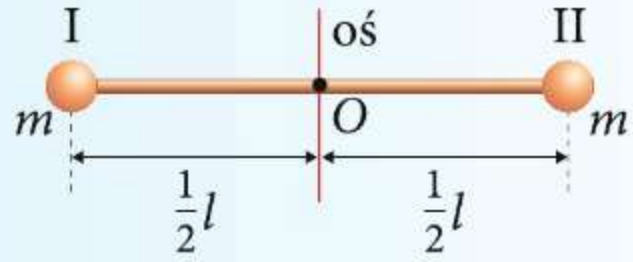
Z definicji momentu bezwładności (3.2) wynika, że ta sama bryła ma różne momenty bezwładności względem różnych osi obrotu.

Przykład 3.1

Momenty bezwładności względem różnych osi obrotu

Obliczymy momenty bezwładności – względem dwóch różnych osi obrotu – układu dwóch jednakowych niewielkich kulek o masie m każda, osadzonych na końcach cienkiego pręta o długości l. Załóżmy dla uproszczenia, że masa pręta jest pomijalna w porównaniu z masą każdej kulki, a jego długość znacznie większa od promienia kulki (kulki można traktować jak punkty materialne).

Oś obrotu jest prostopadła do pręta i przechodzi przez jego środek O (rys. 3.2).

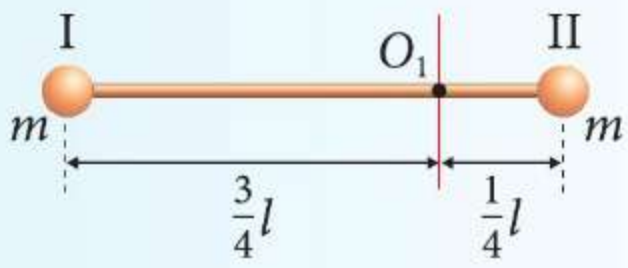


Rys. 3.2

Moment bezwładności jednej kulki jest równy $\frac{1}{4}ml^2$. Moment bezwładności układu dwóch kulek jest sumą momentów bezwładności każdej z tych kulek i wynosi:

$$J_0 = \frac{2ml^2}{4} = \frac{ml^2}{2}$$

Oś obrotu jest prostopadła do pręta i przechodzi przez punkt O_1 (rys. 3.3).



Rys. 3.3

Moment bezwładności pierwszej kulki:

$$J_1 = m \cdot \left(\frac{3}{4}l\right)^2 = \frac{9}{16}ml^2$$

a drugiej:

$$J_2 = m \cdot \left(\frac{1}{4}l\right)^2 = \frac{1}{16}ml^2$$

Moment bezwładności układu:

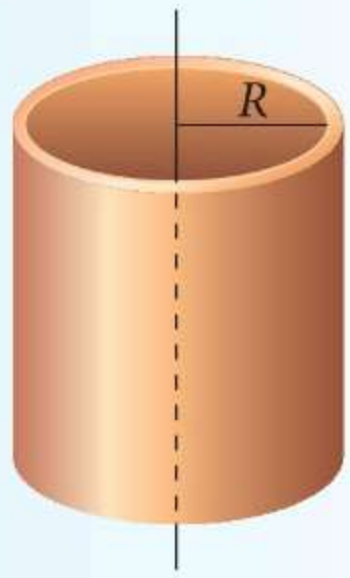
$$J = J_1 + J_2 = \frac{10}{16}ml^2 = \frac{5}{8}ml^2$$

Przykład 3.2

Cienkościenna rura i cienka obręcz

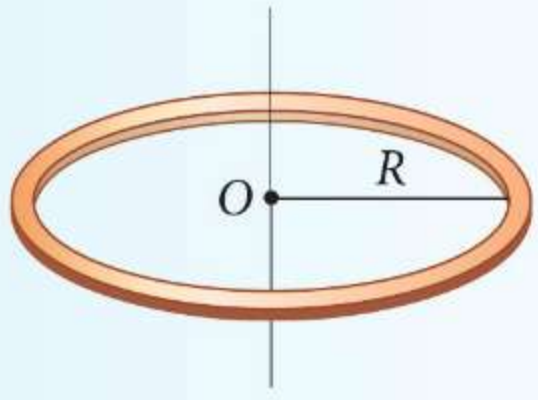
Wyprowadzimy wzór na moment bezwładności cienkościennej rury o promieniu R względem osi obrotu pokrywającej się z osią symetrii rury (rys. 3.4). Przyjmiemy, że grubość ścianki rury jest pomijalnie mała, więc wszystkie punkty rury są równoodległe od osi obrotu.

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_i R^2 = R^2 \sum_{i=1}^{n} m_i = R^2 m$$



Rys. 3.4

Takim samym wzorem wyraża się moment bezwładności cienkiej obręczy względem osi prostopadłej do jej płaszczyzny i przechodzącej przez punkt O, czyli środek obręczy (rys. 3.5).



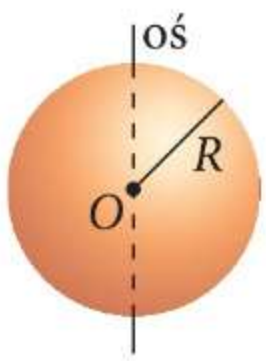
Rys. 3.5

Wyprowadzenie wzorów dla innych brył jest znacznie trudniejsze matematycznie (wymaga całkowania). Na stronie obok podano wzory pozwalające obliczyć momenty

bezwładności **jednorodnych** brył (przedstawionych na kolejnych rysunkach) względem ich osi symetrii. Symbolem m oznaczamy masę bryły.

kula

$$J_0 = \frac{2}{5}mR^2$$



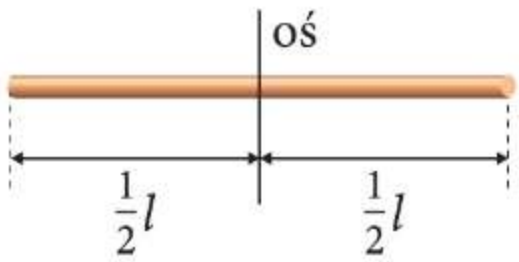


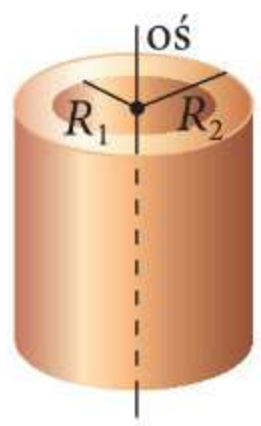
walec

$$J_0 = \frac{1}{2}mR^2$$

pręt

$$J_0 = \frac{1}{12}ml^2$$





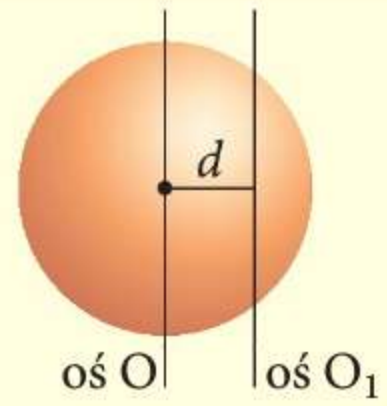
grubościenna rura

$$J_0 = \frac{1}{2}m(R_1^2 + R_2^2)$$

Do obliczania momentów bezwładności brył względem osi równoległych do osi O, ale nieprzechodzących przez środek masy bryły, stosuje się **twierdzenie Steinera**.
Mówi ono, że:

Moment bezwładności bryły J względem dowolnej osi O_1 równoległej do osi O, będącej osią symetrii bryły, jest równy sumie momentu bezwładności J_0 względem osi O oraz iloczynu masy bryły m i kwadratu odległości d między osiami O i O_1.

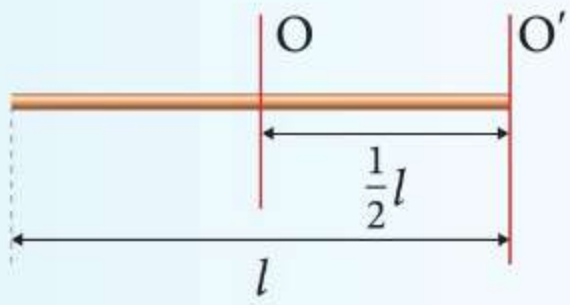
$$J = J_0 + md^2$$



Przykład 3.3

Ruch obrotowy pręta wokół osi przechodzącej przez jego koniec

Obliczymy moment bezwładności pręta o masie m i długości l względem osi O' prostopadłej do pręta i przechodzącej przez jego koniec (rys. 3.6).



Rys. 3.6

Skorzystamy z twierdzenia Steinera: $J = J_0 + md^2$. Moment bezwładności pręta względem osi O, która jest osią symetrii pręta, wyrażamy wzorem $J_0 = \frac{1}{12}ml^2$. Odległość d między osiami jest równa połowie długości pręta, więc:

$$J = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{1}{2}l\right)^2 = \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right)ml^2 = \frac{1}{3}ml^2$$

Moment bezwładności J jest cztery razy większy od momentu bezwładności J_0.

WIEDZIEĆ WIĘCEJ

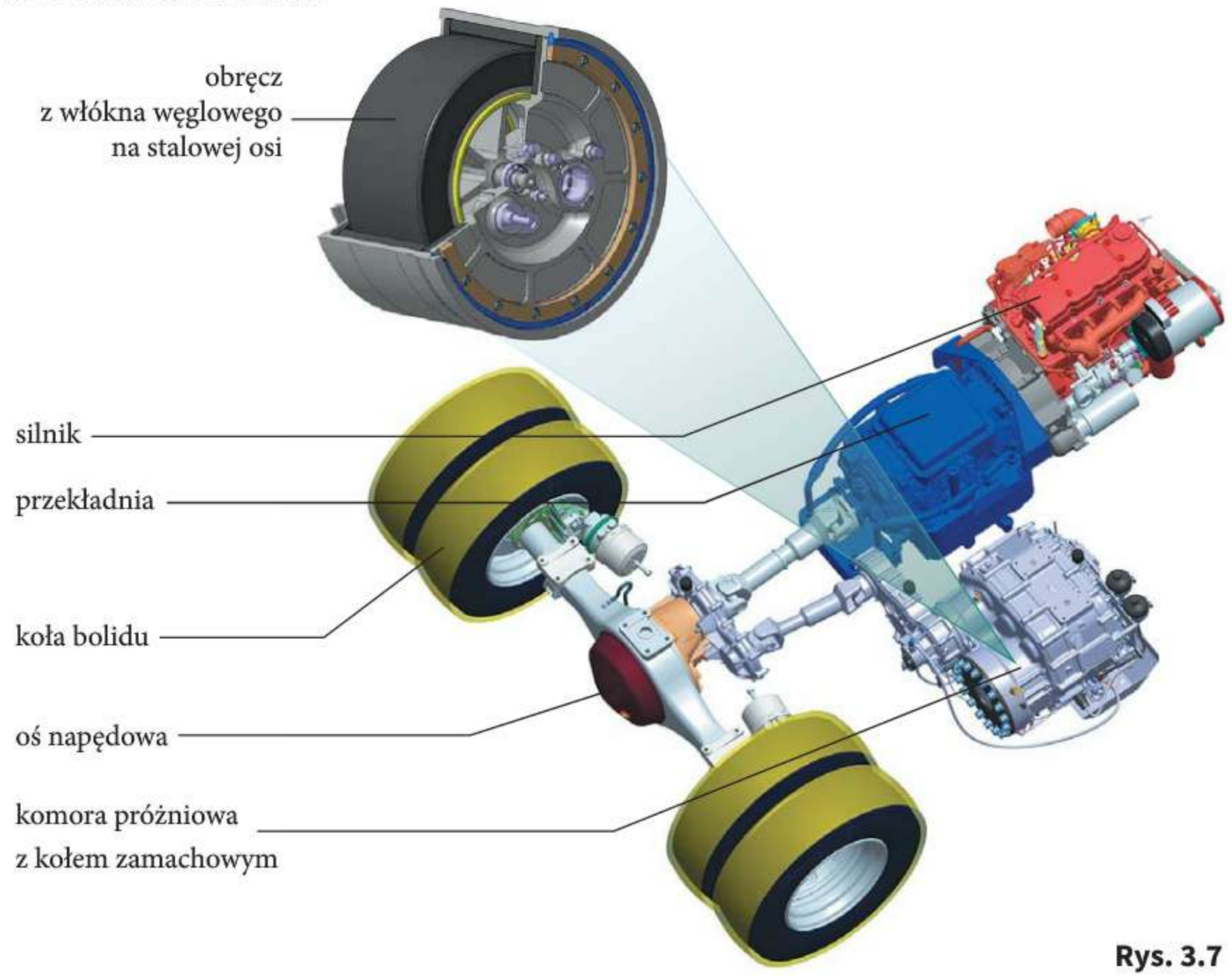
Koło zamachowe

Energię mechaniczną ruchu obrotowego można magazynować przy użyciu koła zamachowego, a następnie przekształcać w inne rodzaje energii. Poważnym ograniczeniem takiego rozwiązania jest wytrzymałość materiału, z którego wykonano koło zamachowe. Podczas wirowania jest ono rozciągane przez odśrodkowe siły bezwładności. Siły te grożą nawet rozerwaniem koła. Mimo to koła zamachowe są często stosowane w motoryzacji.

Pierwsze autobusy napędzane kołem zamachowym, tzw. żyrobusy, pojawiły się w drugiej połowie XX wieku w Szwajcarii. Koło zamachowe o masie 1,5 t i średnicy 1,6 m rozpędzano za pomocą silnika elektrycznego do częstotliwości 3000 obr./min. Zmagazynowaną w ten sposób energię kinetyczną ruchu obrotowego przekształcano następnie w energię elektryczną, zasilającą silniki pojazdu. Żyrobusy wycofano z użycia kilkanaście lat później ze względu na ograniczony zasięg.

Idea akumulatora mechanicznego odrodziła się jednak w systemach odzyskiwania energii kinetycznej KERS (od ang. *Kinetic Energy Recovery System*), stosowanych dzisiaj m.in. w Formule 1. Podczas hamowania pojazdu część jego energii kinetycznej jest przekształcana w energię kinetyczną ruchu obrotowego koła zamachowego o średnicy 24 cm i masie 5 kg, wykonanego z włókna węglowego (rys. 3.7). Dzięki dużej wytrzymałości tego materiału koło zamachowe może wirować z częstotliwością ponad 60 000 obr./min bez ryzyka, że zostanie rozerwane. Zgromadzona energia pozwala kierowcy na zwiększenie chwilowej mocy pojazdu podczas wyścigu.

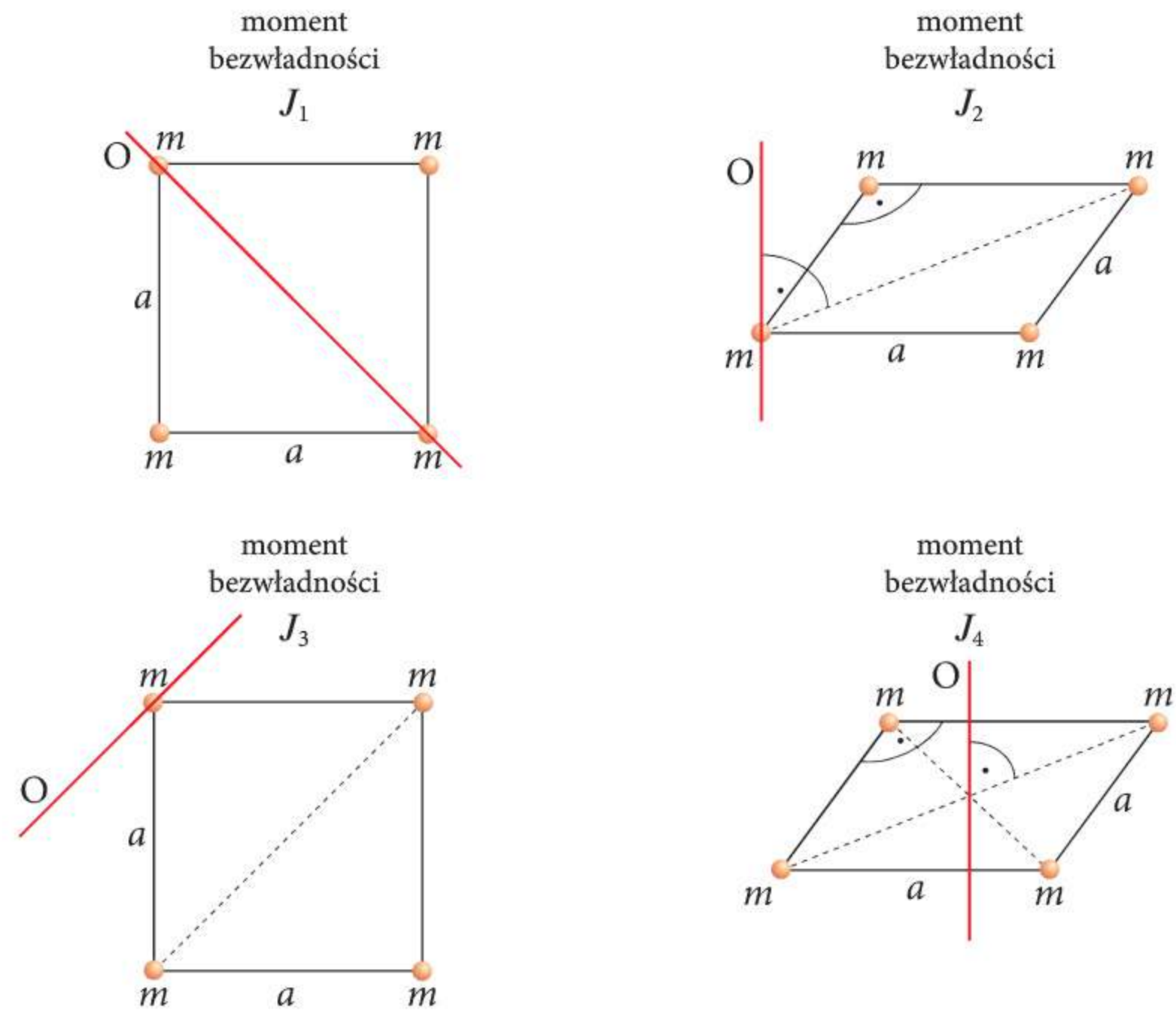
Koło zamachowe KERS



Rys. 3.7

ZADANIA

1. W wierzchołkach kwadratu o boku a wykonanego z bardzo lekkich prętów znajdują się jednakowe kulki. Promień kulki jest znacznie mniejszy od długości pręta, a jej masa – znacznie większa od masy pręta. Uszereguj momenty bezwładności brył przedstawionych na rysunku 3.8 od najmniejszego do największego.



Rys. 3.8

2. Wyprowadź wzór na moment bezwładności pręta o masie m względem osi obrotu równoległej do pręta i odległej od niego o r. Otrzymany wynik porównaj z momentem bezwładności punktu materialnego poruszającego się po okręgu o promieniu r wokół osi prostopadłej do płaszczyzny okręgu i przechodzącej przez jego środek. Zapisz wniosek.

3. Oblicz energię kinetyczną kwadratowej ramki o boku $a = 20\ \mathrm{cm}$, wykonanej z cienkiego drutu o masie $m = 120\ \mathrm{g}$, obracającej się z szybkością kątową $\omega = 5\ \mathrm{rad/s}$:
a) wokół osi przechodzącej przez środki przeciwległych boków,
b) wokół jednego z boków.

4. Kula o masie m i promieniu R wiruje wokół osi symetrii z częstotliwością ν_1. Wyprowadź wzór na częstotliwość ν_2, z którą powinna obracać się ta kula wokół osi obrotu stycznej do kuli i równoległej do jej osi symetrii, aby energia kinetyczna kuli nie uległa zmianie.



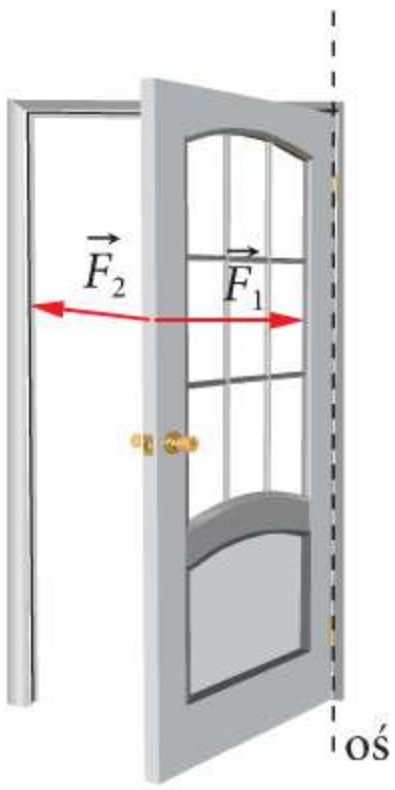
4. Przyczyny zmian ruchu obrotowego. Moment siły

- Definicja momentu siły
- Pierwsza zasada dynamiki ruchu obrotowego
- Druga zasada dynamiki ruchu obrotowego
- Praca i moc w ruchu obrotowym

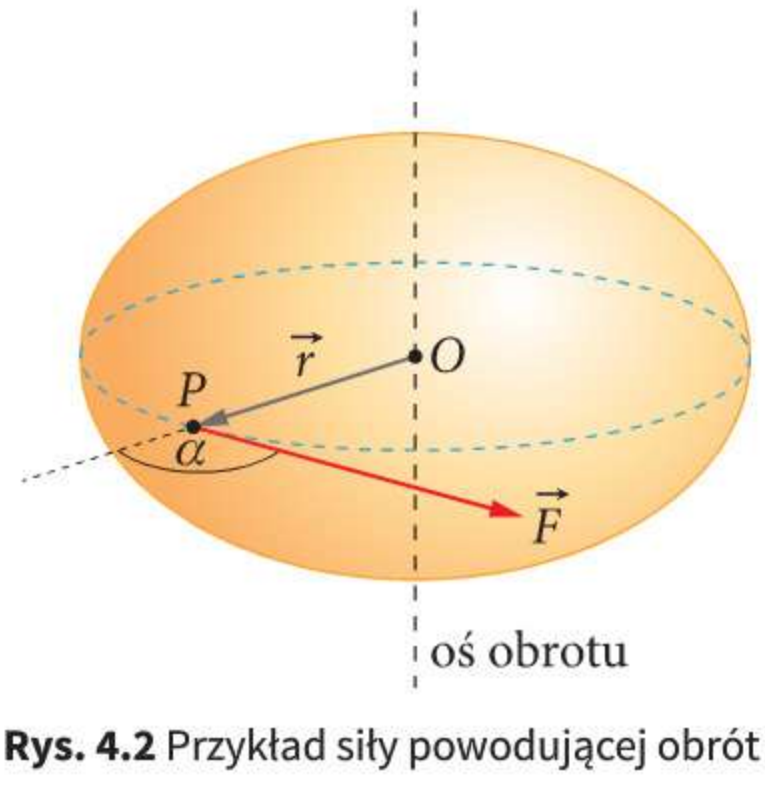
Przypomnij sobie treść zasad dynamiki Newtona oraz definicję pracy.

Jak wiesz, przyczyną zmiany stanu ruchu postępowego ciała jest zawsze działanie niezerowej wypadkowej siły. Zastanówmy się, czy działanie siły jest też warunkiem wystarczającym do wprawienia bryły w ruch obrotowy lub zmiany jej prędkości kątowej. Na rysunku 4.1 przedstawiono drzwi wahadłowe osadzone na zawiasach. Działająca na nie siła (np. $\vec{F}_1$) o kierunku poziomym zawartym w płaszczyźnie drzwi nie spowoduje żadnego ruchu, ponieważ zostanie zrównoważona przez siłę działającą na drzwi ze strony zawiasów.

Jeśli jednak zadziałamy siłą o kierunku prostopadłym do płaszczyzny drzwi (np. $\vec{F}_2$), to nastąpi ich obrót wokół osi przechodzącej przez zawiasy. Wobec tego działanie siły na bryłę jest warunkiem koniecznym, ale niewystarczającym, aby spowodować obrót.



Rys. 4.1 Która z sił spowoduje obrót drzwi?



Rys. 4.2 Przykład siły powodującej obrót bryły

Rozważmy bryłę (rys. 4.2), która może się obracać wokół osi przechodzącej przez punkt O. Po przyłożeniu w punkcie P siły (zawierającej się w płaszczyźnie prostopadłej do osi obrotu i przechodzącej przez punkt O) następuje obrót bryły.

Oznaczmy jako $\vec{r}$ wektor o początku w punkcie O i końcu w punkcie P (taki wektor jest nazywany ramieniem siły, jeśli jest do niej prostopadły). Iloczyn wektorowy wektorów $\vec{r}$ i $\vec{F}$ nazywamy **momentem siły** $\vec{F}$ względem osi obrotu i oznaczamy symbolem $\vec{M}$.

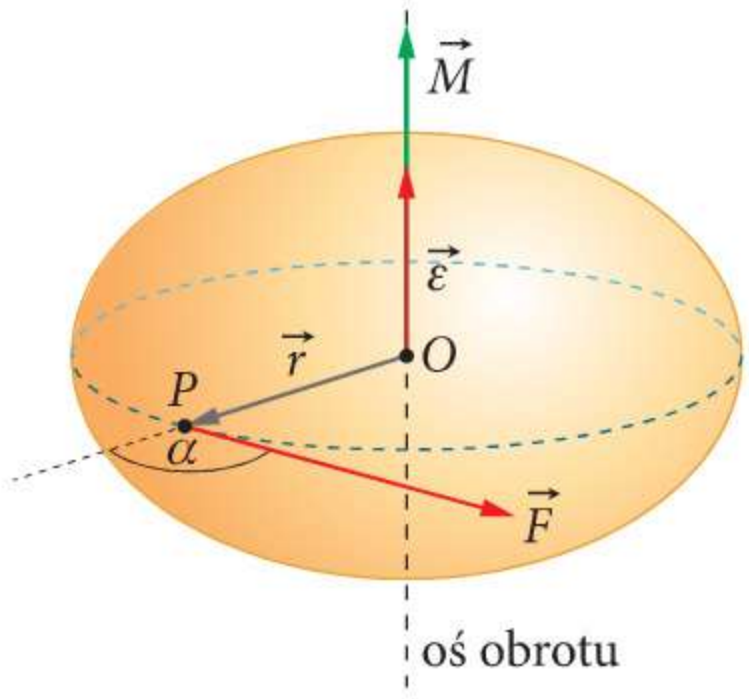
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Wartość momentu siły:

$$M = rF \sin\sphericalangle(\vec{r}, \vec{F}) = rF \sin\alpha$$

Warunkiem zmiany stanu ruchu obrotowego bryły jest działanie na nią siłą o niezerowym momencie względem osi obrotu. Aby moment siły był różny od zera, kąt zawarty pomiędzy $\vec{r}$ i $\vec{F}$ musi być różny od zera i od 180°. Dla siły o danej wartości i dla danego $\vec{r}$ moment siły ma wartość największą, gdy siła działa prostopadle do wektora $\vec{r}$. Wówczas $M = rF \sin 90° = Fr$.
Jednostką momentu siły jest 1 N · m (tzw. niutonometr).

Z definicji iloczynu wektorowego wynika, że kierunek wektora momentu siły jest prostopadły do płaszczyzny utworzonej przez wektory $\vec{r}$ i $\vec{F}$, a jego zwrot jest zgodny z regułą śruby prawoskrętnej. Moment siły ma więc kierunek osi, wokół której obraca się bryła, a zwrot zgodny ze zwrotem przyspieszenia kątowego $\vec{\varepsilon}$ (rys. 4.3).



Rys. 4.3 Kierunek i zwrot momentu siły i przyspieszenia kątowego bryły

Zależność przyspieszenia kątowego od momentu siły działającej na bryłę wyznacza się doświadczalnie, ale można ją przewidzieć dzięki analogii między ruchem postępowym i obrotowym. W ruchu postępowym $\vec{a} \sim \vec{F}$. Odpowiednikiem $\vec{a}$ jest $\vec{\varepsilon}$, siły $\vec{F}$ – moment siły $\vec{M}$, więc:

$$\vec{\varepsilon} \sim \vec{M}$$

Ponieważ $\vec{a} = \frac{1}{m}\vec{F}$, a odpowiednik masy m w ruchu obrotowym to moment bezwładności J, więc współczynnikiem proporcjonalności między przyspieszeniem kątowym i momentem siły jest odwrotność momentu bezwładności bryły.

Na podstawie przeprowadzonych rozważań możemy sformułować **drugą zasadę dynamiki** dla ruchu obrotowego bryły:

Jeżeli wypadkowy moment sił działających na bryłę jest różny od zera, to bryła porusza się zmiennym ruchem obrotowym z przyspieszeniem kątowym wprost proporcjonalnym do wypadkowego momentu siły. Współczynnikiem proporcjonalności jest odwrotność momentu bezwładności bryły względem wybranej osi obrotu.

$$\vec{\varepsilon} = \frac{1}{J}\vec{M} \tag{4.1}$$

Zastanówmy się teraz, jakie warunki muszą być spełnione, aby bryła sztywna pozostawała w spoczynku ($\vec{\omega} = \vec{0}$) lub w ruchu obrotowym ze stałą prędkością kątową ($\vec{\omega} = \text{const}$) mimo działających na nią sił o niezerowych momentach względem wybranej osi obrotu.

Ze wzoru (4.1) wynika, że przyspieszenie kątowe bryły $\vec{\varepsilon} = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \vec{0}$, gdy wypadkowy moment sił $\vec{M} = \vec{0}$. Wobec tego:

Jeżeli suma momentów sił działających na bryłę sztywną (czyli wypadkowy moment siły względem wybranej osi obrotu) jest równa zeru, to bryła pozostaje w spoczynku lub porusza się wokół tej osi ruchem obrotowym ze stałą prędkością kątową.

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{\omega} = \text{const} \neq \vec{0} \qquad \text{lub} \qquad \vec{\omega} = \vec{0}$$

O ruchu postępowym bryły decyduje siła wypadkowa (zgodnie z pierwszą i drugą zasadą dynamiki Newtona), a o ruchu obrotowym – wypadkowy moment sił. Jeśli wypadkowy moment sił jest różny od zera i **stały**, a jego kierunek jest zgodny z kierunkiem prędkości kątowej, to bryła porusza się ruchem **obrotowym jednostajnie zmiennym**. Jeśli ponadto:

- zwrot wypadkowego momentu siły (a więc i zwrot przyspieszenia kątowego) jest **zgodny ze zwrotem prędkości kątowej** bryły, to jej ruch jest ruchem obrotowym jednostajnie przyspieszonym;
- zwrot wypadkowego momentu siły (a więc i zwrot przyspieszenia kątowego) jest **przeciwny do zwrotu prędkości kątowej** bryły, to jej ruch jest ruchem obrotowym jednostajnie opóźnionym.

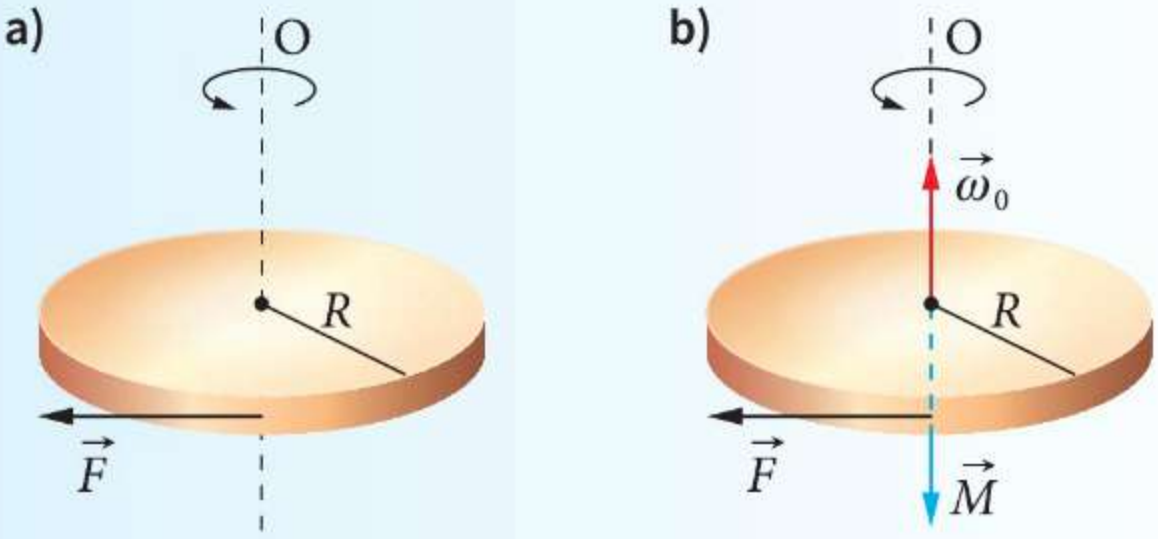
Jeśli wypadkowy moment siły jest różny od zera, a jego wartość zmienia się podczas ruchu ciała, to ruch ten jest ruchem obrotowym **niejednostajnie zmiennym**:

- **przyspieszonym**, gdy zwrot wypadkowego momentu siły jest zgodny ze zwrotem prędkości kątowej bryły;
- **opóźnionym**, gdy zwroty wypadkowego momentu siły i prędkości kątowej bryły są przeciwne.

Przykład 4.1

Hamowanie wirującej tarczy

Tarczę o masie $m = 1\ \text{kg}$ i promieniu $R = 0{,}1\ \text{m}$ wirującą z szybkością $\omega_0 = 100\,\text{rad/s}$ zatrzymano w czasie $t = 5\ \text{s}$ w wyniku działania stałą siłą $\vec{F}$ przyłożoną stycznie do tarczy (rys. 4.4a). Obliczymy wartość tej siły oraz liczbę obrotów tarczy podczas hamowania.



Rys. 4.4

Na tarczę działa siła o stałym momencie $\vec{M}$ zwróconym przeciwnie do zwrotu jej prędkości kątowej $\vec{\omega}_0$ (rys. 4.4b), więc tarcza porusza się ruchem obrotowym jednostajnie opóźnionym. Zgodnie z drugą zasadą dynamiki dla ruchu obrotowego:

$$M = \varepsilon J_0$$

Do powyższego wzoru podstawiamy wartość momentu działającej siły ($M = RF$) oraz moment bezwładności tarczy ($J_0 = \frac{1}{2}mR^2$). Po przekształceniu otrzymujemy:

$$F = \frac{\varepsilon m R}{2}$$

W ruchu obrotowym jednostajnie opóźnionym:

$$\omega(t) = \omega_0 - \varepsilon t$$

W rozważanym przypadku tarcza się zatrzymała, więc:

$$\omega(5\ \text{s}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{\omega_0}{t}$$

Wobec tego:

$$F = \frac{\omega_0 m R}{2t}$$

Wstawiamy wartości liczbowe i otrzymujemy:

$$F = \frac{100\frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 1\ \text{kg} \cdot 0{,}1\ \text{m}}{10\ \text{s}} = 1\ \text{N}$$

Liczbę n obrotów tarczy wyrażamy wzorem $n = \frac{\alpha}{2\pi}$, gdzie α jest (wyrażoną w radianach) miarą kąta, o który tarcza obróciła się podczas jednostajnie opóźnionego ruchu w czasie t.

W tym ruchu:

$$\alpha = \omega_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2} = \omega_0 t - \frac{\omega_0}{t} \cdot \frac{t^2}{2} = \frac{\omega_0 t}{2}$$

Zatem:

$$n = \frac{\omega_0 t}{4\pi}$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy:

$$n = \frac{\frac{100}{\text{s}} \cdot 5\ \text{s}}{4\pi} \approx 40$$

Przykład 4.2

Wpływ momentu bezwładności krążka na wartość przyspieszenia układu

Przeanalizujemy ruch układu przedstawionego na rysunku 4.5. Na krążku o masie m i promieniu R zawieszono na nierozciągliwej, cienkiej lince (o pomijalnie małej masie) dwa obciążniki o masach m_1 i m_2 ($m_2 > m_1$). Współczynnik tarcia statycznego linki o krążek jest tak duży, że linka nie ślizga się po krążku, lecz powoduje jego obrót. Odważniki puszczono.

a) Obliczymy najpierw wartość przyspieszenia układu obciążników bez uwzględniania ruchu obrotowego krążka.

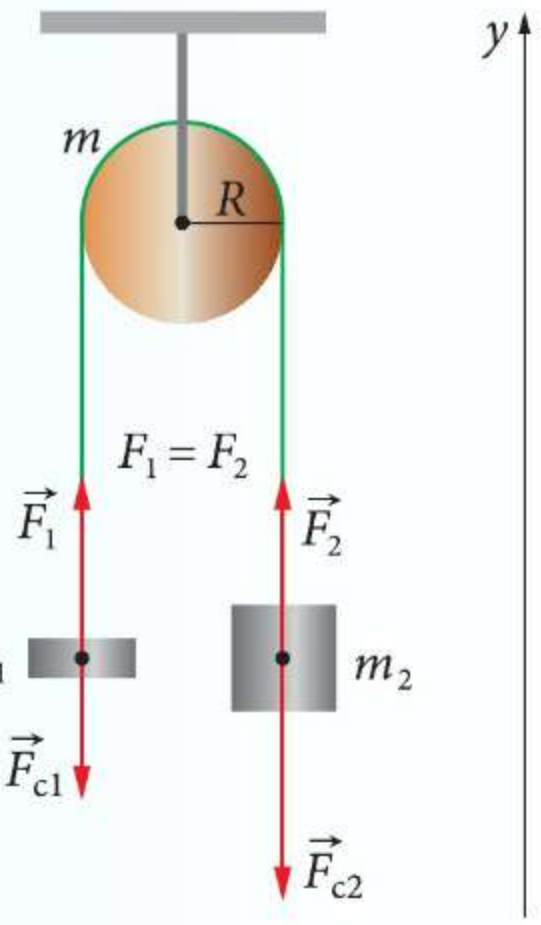
Przy takim założeniu $F_1 = F_2 = F$. Równania ruchu obciążników zapisane za pomocą współrzędnych wektorów mają postać:

$$F - m_1 g = m_1 a$$

$$-m_2 g + F = -m_2 a$$

skąd:

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g$$



Rys. 4.5

b) Uwzględnimy teraz bezwładność krążka (rys. 4.6). Zwróć uwagę, że krążek obraca się zgodnie ze wskazówkami zegara ($m_2 > m_1$) przyspieszonym ruchem obrotowym, więc siły $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$, którymi linka działa na krążek (i oczywiście siły napięcia linki po obu stronach krążka), muszą mieć różne wartości, ponieważ tylko wtedy wypadkowy moment sił działających na krążek jest różny od zera. Wyznacz zwroty momentów tych sił i sprawdź, że moment siły $\vec{F}_2$ jest zwrócony pod rysunek, a moment siły $\vec{F}_1$ – przed rysunek.

Obieramy układ współrzędnych x, y o początku w środku krążka i o osiach zwróconych tak, jak na rysunku 4.6 (oś x jest prostopadła do płaszczyzny rysunku i zwrócona pod rysunek). Zapisujemy teraz za pomocą współrzędnych wektorów równania ruchu postępowego każdego z obciążników i równanie ruchu obrotowego krążka.

Dla obciążnika o masie m_1: $F_1' - m_1 g = m_1 a$

Dla obciążnika o masie m_2: $F_2' - m_2 g = -m_2 a$

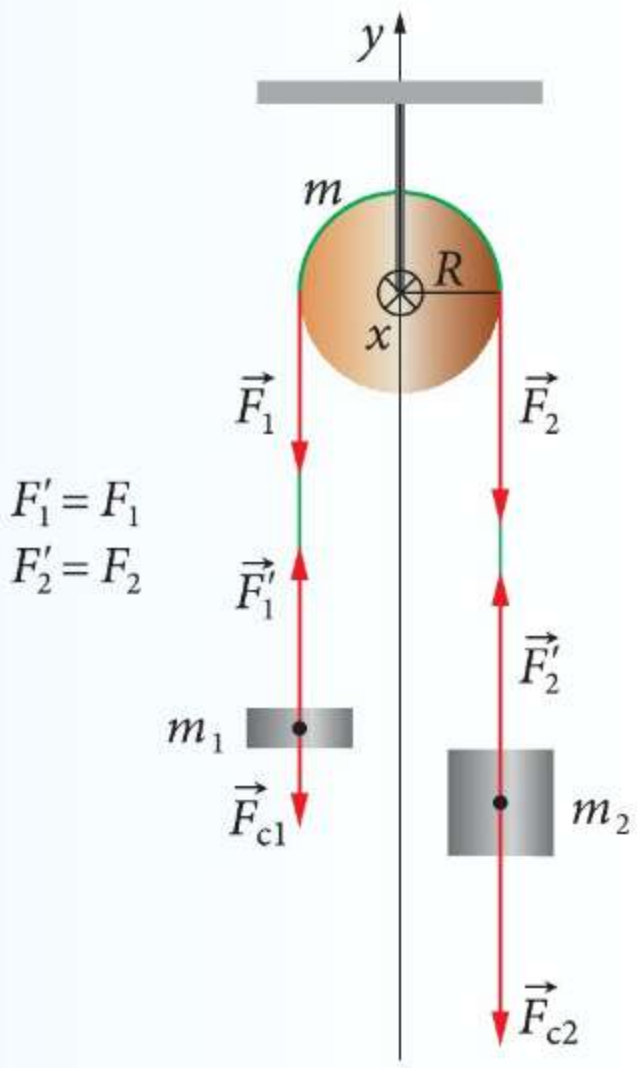
Dla krążka o masie m i promieniu R: $RF_2 - RF_1 = J\varepsilon$

Jednak $F_1' = F_1$, $F_2' = F_2$ i $\varepsilon = \frac{a}{R}$, bo a jest równe wartości przyspieszenia stycznego punktów na obwodzie krążka (linka nie ślizga się po krążku). Wobec tego:

$$F_1 - m_1 g = m_1 a$$

$$F_2 - m_2 g = -m_2 a$$

$$R(F_2 - F_1) = J\frac{a}{R}$$



Rys. 4.6

Obliczamy z dwóch pierwszych równań F_1 oraz F_2, podstawiamy do trzeciego równania i otrzymujemy wartość przyspieszenia układu:

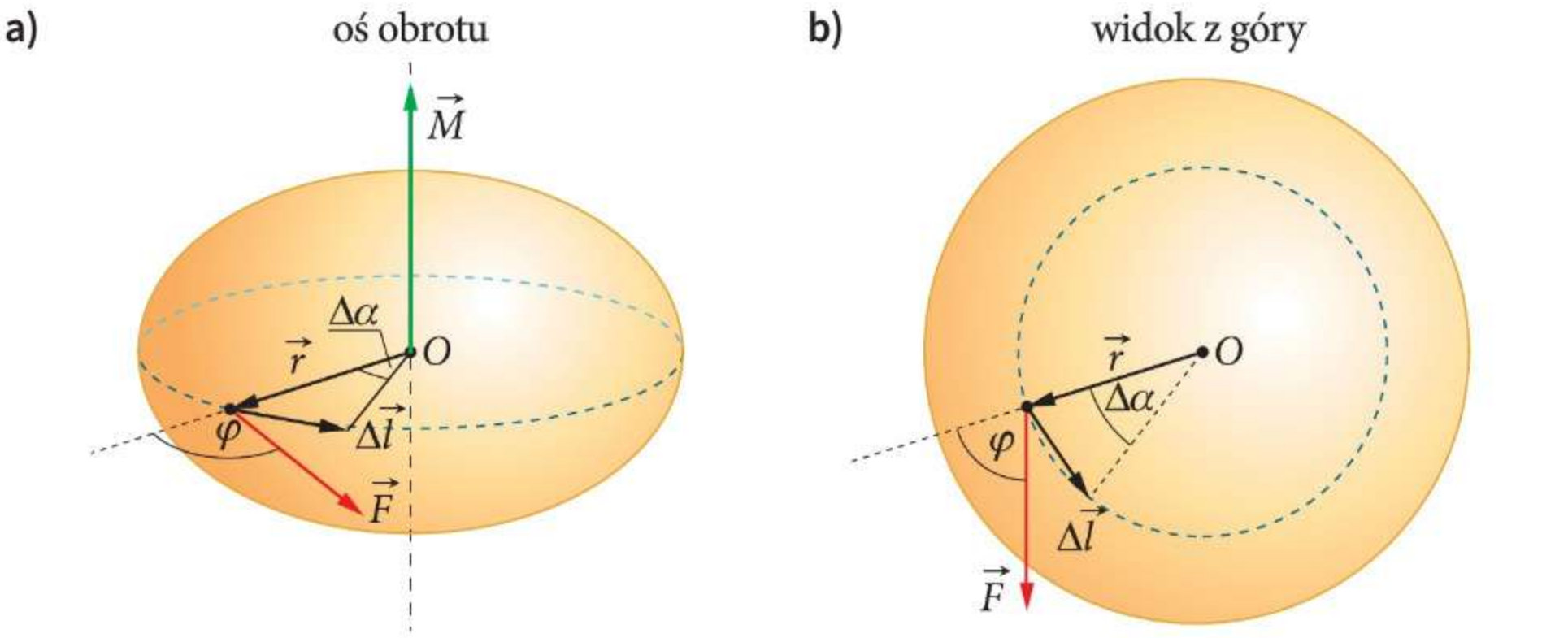
$$a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + \frac{J}{R^2}}$$

Po wstawieniu momentu bezwładności krążka ($J = \frac{mR^2}{2}$):

$$a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}}$$

Z otrzymanego wzoru wynika, że dla $m \ll m_1 + m_2$ (dla nieważkiego krążka) wartość przyspieszenia układu jest taka sama jak w przypadku a. Przyspieszenie układu z nieważkim bloczkiem jest zawsze większe od przyspieszenia układu z bloczkiem, którego masy nie można pominąć.

Obliczymy teraz pracę ΔW wykonaną przez siłę $\vec{F}$ przy obrocie bryły o bardzo mały kąt $\Delta\alpha$ (rys. 4.7). Skorzystamy z definicji pracy: $\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{l}$.



Rys. 4.7 Ilustracja wyprowadzenia wzoru na pracę momentu siły

$$\Delta W = F\Delta l \cos(90^\circ - \varphi) = F\Delta l \sin\varphi$$

gdzie Δl jest wartością wektora przemieszczenia.

Dla małych kątów (wyrażonych w mierze łukowej) $\Delta l = r\Delta\alpha$, więc:

$$\Delta W = Fr\Delta\alpha \sin\varphi = M\Delta\alpha$$

Wobec tego **przy obracaniu bryły pracę wykonuje moment siły**.

Po podzieleniu obu stron równania przez czas Δt, jaki upłynął podczas obrotu o kąt $\Delta\alpha$, i po przejściu do granicy dla $\Delta t \to 0$:

$$\left(\frac{\Delta W}{\Delta t}\right)_{\Delta t \to 0} = \left(M\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}\right)_{\Delta t \to 0}$$

otrzymujemy wzór na **moc chwilową** w ruchu obrotowym bryły:

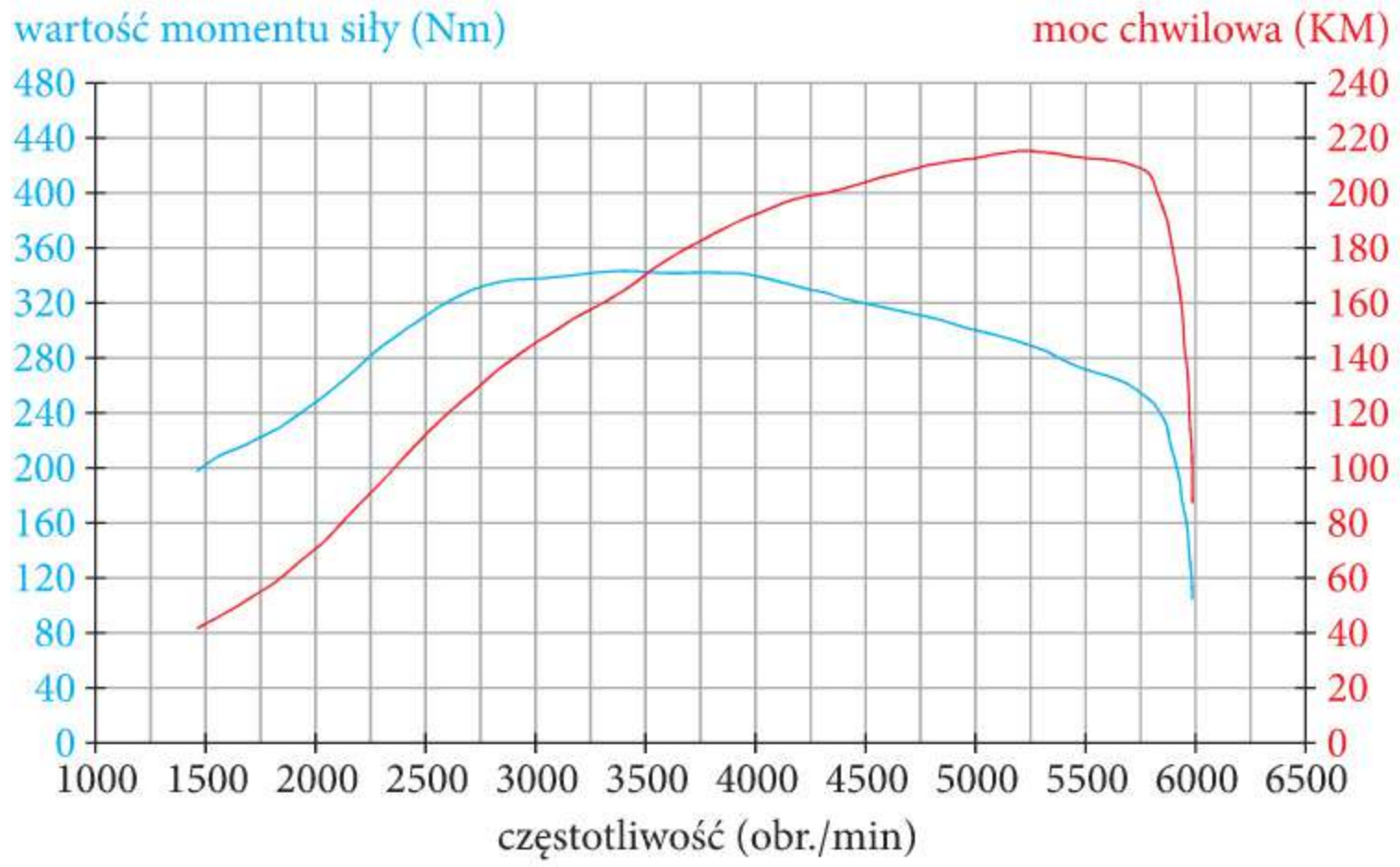
$$P = M\omega$$

Znajomość zależności mocy chwilowej od wartości momentu siły jest niezbędna do obliczenia osiągów wszelkich pojazdów mechanicznych. Jak wiesz, poruszają się one dzięki przekazywaniu energii uzyskanej ze spalania paliw tłokowi silnika, potem jego obracającym się elementom i układowi przenoszenia napędu, a na koniec kołom. W związku z tym umiejętność porównania szybkości zmian różnych form energii (z uwzględnieniem strat spowodowanych tarciem i mniejszą od 100% sprawnością silników) ma ważne znaczenie praktyczne.

WIEDZIEĆ WIĘCEJ

Moc chwilowa

Czy duża moc silnika samochodu przekłada się bezpośrednio na duże przyspieszenie?
Aby poprawnie ocenić możliwości pojazdu, nie wystarczy znać jego maksymalną moc (podaną np. w dowodzie rejestracyjnym), lecz należy zapoznać się z wykresami zależności mocy chwilowej i wartości momentu siły od częstotliwości obrotów silnika. Przykładowy wykres przedstawiono poniżej; moc podano w koniach mechanicznych ($1\ \mathrm{KM} \approx 736\ \mathrm{W}$).



Wartość przyspieszenia auta poruszającego się po poziomym torze można wyrazić wzorem:

$$a = \frac{\frac{M}{r} - F_{\mathrm{op}}}{m}$$

gdzie: r to promień koła pojazdu, m – masa pojazdu, F_{op} – wartość sił oporu.

A zatem im większy moment siły, tym większe przyspieszenie samochodu. Moment siły jest przekazywany na koło z silnika, czyli silnik będzie pracował z optymalną wydajnością przy takiej liczbie obrotów, dla której moment siły utrzymuje się na wysokim poziomie (na wykresie odpowiada to przedziałowi częstotliwości 3000–4000 obr./min).
Maksymalna moc przykładowego silnika jest osiągana dla częstotliwości ok. 5200 obr./min, jednak – po pierwsze – jazda na tak wysokich obrotach jest nieekonomiczna, a – po drugie – mniejszy moment siły powoduje, że auto ma mniejsze przyspieszenie niż w przypadku 3000–4000 obr./min.

ZADANIA

1. Pozioma tarcza o masie $m = 1\ \mathrm{kg}$ i promieniu $R = 0{,}1\ \mathrm{m}$ obraca się z szybkością kątową $\omega_0 = 20\ \mathrm{rad/s}$ wokół osi prostopadłej do tarczy i przechodzącej przez jej środek. Oblicz wartość siły, którą trzeba byłoby działać stycznie do tarczy, aby:
a) dwukrotnie zwiększyć szybkość jej obrotów w czasie $t = 2\ \mathrm{s}$,
b) dwukrotnie zmniejszyć szybkość jej obrotów w czasie $t = 2\ \mathrm{s}$.

2. Na linie nawiniętej na walec kołowrotu studni wisi wiadro o masie $m_1 = 3\ \mathrm{kg}$. Masa walca $m_2 = 20\ \mathrm{kg}$, a jego promień $R = 0{,}1\ \mathrm{m}$. Pomiń masę liny, masę korby kołowrotu oraz opory ruchu i oblicz:
a) wartość przyspieszenia wiadra opadającego na linie w głąb studni,
b) wartość przyspieszenia kątowego walca kołowrotu,
c) szybkość, z którą dno wiadra uderzy w taflę wody, znajdującą się w odległości $h = 4\ \mathrm{m}$ od jego początkowego położenia.

***3.** Pracę wykonaną przez moment siły przy obrocie bryły o bardzo mały kąt wyrażamy wzorem $\Delta W = M\Delta\alpha$. Obliczanie pracy momentu siły przy obrocie o dowolny kąt wymaga na ogół stosowania rachunku całkowego. Jednak w szczególnym przypadku, gdy moment siły jest stały (nie zależy od kąta obrotu), a jego kierunek jest zgodny z kierunkiem prędkości kątowej bryły obracającej się wokół stałej osi, można obliczyć pracę momentu siły wykonaną przy obrocie bryły o kąt α za pomocą wzoru:

$$W = M\alpha$$

Skorzystaj z powyższego wzoru i wykaż, że praca wykonana przez stały moment siły M podczas rozpędzania tarczy o momencie bezwładności J do szybkości kątowej ω w czasie t jest równa przyrostowi energii kinetycznej tarczy.



5. Równowaga bryły sztywnej

- Warunki równowagi statycznej bryły sztywnej
- Maszyny proste (dźwignia, blok stały, blok ruchomy, kołowrót)

Przypomnij sobie wiadomości o maszynach prostych i o sprawności urządzeń mechanicznych.

Warunkami równowagi ciał lub układów ciał zajmuje się statyka, jeden z działów mechaniki. Spoczywająca w wybranym układzie odniesienia bryła sztywna jest w równowadze statycznej, jeśli są spełnione dwa warunki:

1. Siła wypadkowa wszystkich sił zewnętrznych działających na bryłę jest równa zeru.

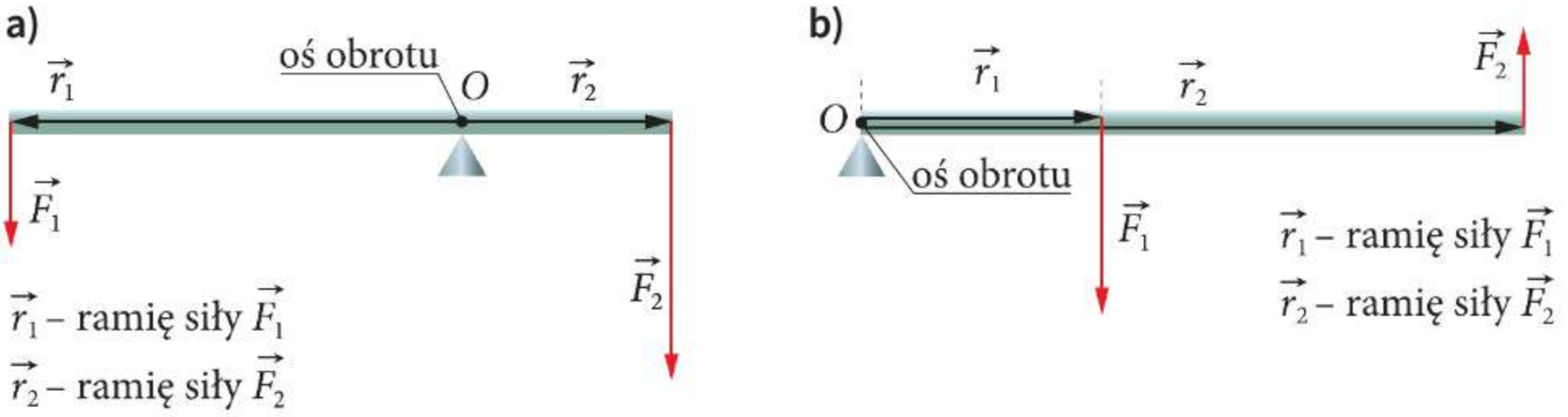
$$\vec{F}_{\text{wyp}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{\text{zew}\,i} = \vec{0}$$

2. Wypadkowy moment wszystkich momentów sił zewnętrznych działających na bryłę, obliczony względem dowolnie wybranej osi obrotu, jest równy zeru.

$$\vec{M}_{\text{wyp}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{\text{zew}\,i} = \vec{0}$$

Z powyższych warunków równowagi korzystamy również w przypadku brył znajdujących się w równowadze dynamicznej, czyli w ruchu jednostajnym obrotowym.

Zastosujemy warunki równowagi statycznej dla **dźwigni** – znanej od starożytności jednej z **maszyn prostych**, które ułatwiają wykonywanie pracy przez umożliwianie działania siłą o innych cechach (np. o mniejszej wartości, innym kierunku, zwrocie oraz o innym punkcie przyłożenia) na innej, zazwyczaj dłuższej drodze. Dźwignia to sztywny pręt (lub belka), osadzony na osi albo podparty. Punkty przyłożenia sił działających na dźwignię dwustronną (rys. 5.1a) znajdują się po dwóch stronach osi obrotu, a w przypadku dźwigni jednostronnej (rys. 5.1b) – po tej samej stronie osi obrotu.



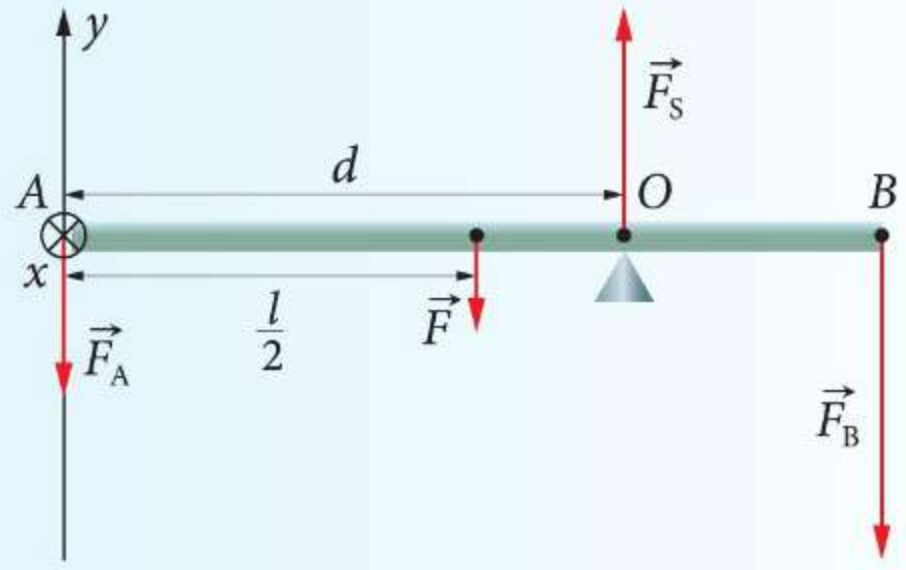
Rys. 5.1 Schemat dźwigni: dwustronnej (a), jednostronnej (b)

Zapisz samodzielnie warunek równowagi dźwigni oraz znajdź związek między wartościami sił i ich ramionami.

Przykład 5.1

Dźwignia dwustronna

Z deski o masie $m = 8\ \text{kg}$ i długości $l = 2\ \text{m}$ wykonano huśtawkę dla Ani i Basi. Miejsce Ani o masie $m_\text{A} = 20\ \text{kg}$ znajduje się w odległości $d = 1{,}2\ \text{m}$ od osi obrotu O (rys. 5.2). Huśtawka jest w równowadze, gdy obie dziewczynki siedzą na swoich miejscach.



Rys. 5.2

Obliczymy:

a) masę m_B Basi,

b) wartość siły nacisku huśtawki na podporę.

a) Obieramy związany z huśtawką układ współrzędnych x, y, którego oś x jest prostopadła do rysunku i zwrócona pod rysunek, a oś y – zwrócona w górę. Na huśtawkę działają:

- siła $\vec{F}_\text{A}$, którą Ania naciska na deskę w punkcie A ($F_\text{A} = m_\text{A}g$),
- siła $\vec{F}_\text{B}$, którą Basia naciska na deskę w punkcie B ($F_\text{B} = m_\text{B}g$),
- siła $\vec{F}$ – ciężar deski ($F = mg$),
- siła $\vec{F}_\text{s}$, którą podpora działa na deskę w punkcie O.

Zgodnie z warunkiem równowagi suma momentów wszystkich sił działających na huśtawkę względem dowolnej osi jest równa zeru. Obliczamy sumę momentów sił względem osi obrotu prostopadłej do rysunku i przechodzącej przez punkt O. Moment siły $\vec{F}_\text{s}$ względem tej osi jest równy zeru, a momenty pozostałych trzech sił są równoległe do osi x. Zwrot momentu siły $\vec{F}_\text{B}$ jest zgodny ze zwrotem osi x, więc jego współrzędna jest dodatnia, a zwroty momentów sił $\vec{F}_\text{A}$ i $\vec{F}$ są przeciwne do zwrotu osi x, czyli ich współrzędne są ujemne. Wobec tego:

$$m_\text{B}g(l-d) - m_\text{A}gd - mg\left(d - \frac{l}{2}\right) = 0$$

$$m_\text{B} = \frac{m_\text{A}d + m\left(d - \frac{l}{2}\right)}{l-d}$$

Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy:

$$m_\text{B} = \frac{20\ \text{kg} \cdot 1{,}2\ \text{m} + 8\ \text{kg} \cdot 0{,}2\ \text{m}}{0{,}8\ \text{m}} = 32\ \text{kg}$$

b) W celu obliczenia wartości siły $\vec{F}_N$ nacisku huśtawki na podporę korzystamy z trzeciej zasady dynamiki, z której wynika, że $F_N = F_s$, i stosujemy drugi warunek równowagi: suma wszystkich sił zewnętrznych działających na deskę jest równa zeru. Wszystkie te siły są równoległe do osi y. Współrzędna siły $\vec{F}_s$ jest dodatnia, a współrzędne pozostałych trzech sił są ujemne, więc:

$$F_s - F_A - F - F_B = 0 \qquad \text{czyli} \qquad F_s = F_A + F_B + F$$

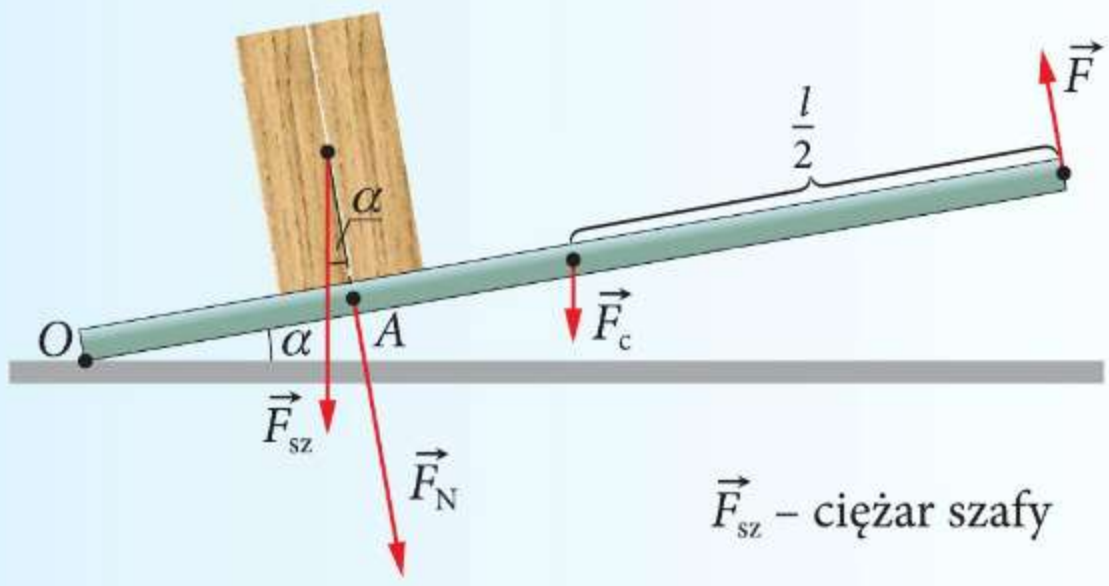
Przyjmujemy $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$ i otrzymujemy:

$$F_N = F_s = 200\ \mathrm{N} + 320\ \mathrm{N} + 80\ \mathrm{N} = 600\ \mathrm{N}$$

Przykład 5.2

Dźwignia jednostronna

Do odchylenia od pionu szafy o masie $m_1 = 100\ \mathrm{kg}$ użyto metalowej sztaby o masie $m = 10\ \mathrm{kg}$ i długości $l = 1{,}2\ \mathrm{m}$, tak jak na rysunku 5.3.



Rys. 5.3

Środek ciężkości szafy leży w płaszczyźnie podłużnego przekroju sztaby, a odcinek OA ma długość $d = 0{,}4\ \mathrm{m}$. Kąt α odchylenia szafy od pionu jest równy $10°$. Sztaba nie przesuwa się po podłodze, a szafa – po sztabie.

Obliczymy wartość siły $\vec{F}$, którą działano na sztabę prostopadle do niej.

Aby skorzystać z warunku równowagi, zgodnie z którym suma momentów wszystkich sił działających na sztabę względem dowolnej osi obrotu jest równa zeru, wybieramy oś prostopadłą do rysunku i przechodzącą przez punkt O, równoległą do zwróconej pod rysunek osi x układu współrzędnych. Na sztabę działają trzy siły o niezerowym momencie względem osi obrotu: siła $\vec{F}_N$ (o wartości $F_N = m_1 g \cos\alpha$), którą szafa naciska na sztabę, ciężar sztaby $\vec{F}_c$ i siła $\vec{F}$. Momenty tych sił są równoległe do osi x. Zwroty momentów sił $\vec{F}_N$ i $\vec{F}_c$ są zgodne ze zwrotem osi x, więc ich współrzędne są dodatnie, a zwrot momentu siły $\vec{F}$ jest przeciwny do zwrotu osi x, czyli jego współrzędna jest ujemna.

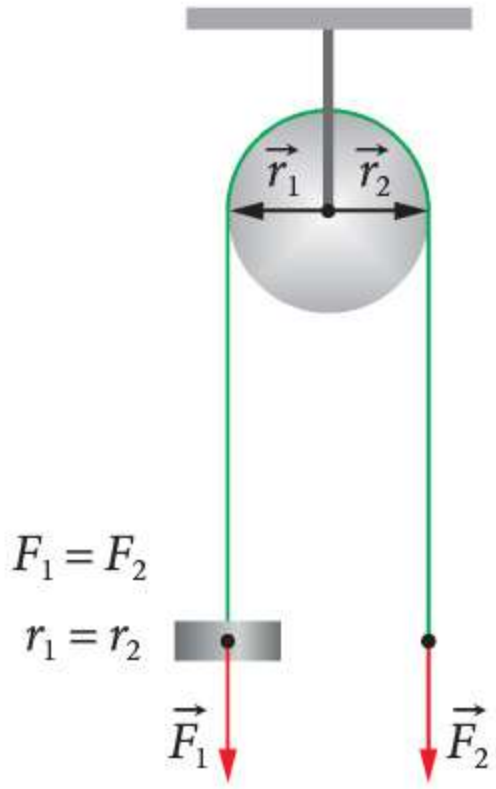
$$(m_1 g \cos\alpha)d + \frac{mgl}{2}\sin(90° + \alpha) - Fl = 0$$

$$F = \frac{m_1 g d \cos\alpha + \frac{mgl}{2}\cos\alpha}{l} = \frac{g\cos\alpha\left(m_1 d + m\frac{l}{2}\right)}{l}$$

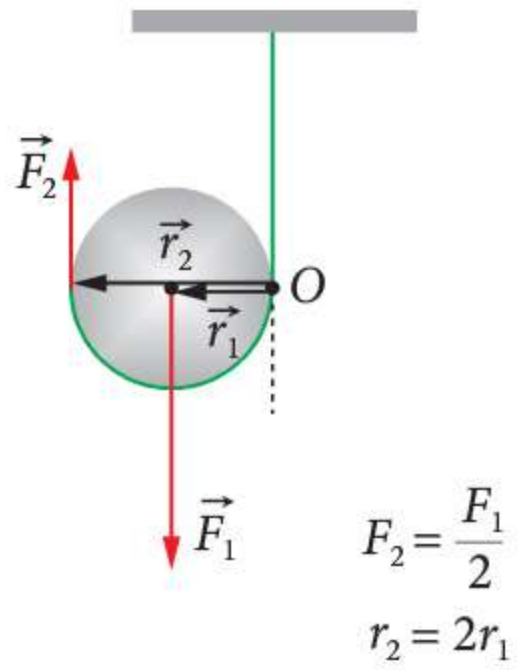
Podstawiamy wartości liczbowe (przyjmujemy $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$) i otrzymujemy:

$$F = \frac{10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 0{,}9848(100\ \mathrm{kg} \cdot 0{,}4\ \mathrm{m} + 10\ \mathrm{kg} \cdot 0{,}6\ \mathrm{m})}{1{,}2\ \mathrm{m}} \approx 378\ \mathrm{N}$$

Odmianami dźwigni są **krążki** (bloki) **nieruchomy** i **ruchomy** oraz **kołowrót**. Krążek nieruchomy (dźwignia dwustronna równoramienna) umożliwia tylko zmianę zwrotu siły wykonującej pracę (rys. 5.4). Natomiast dzięki zastosowaniu krążka ruchomego (dźwigni jednostronnej) działamy siłą o dwukrotnie mniejszej wartości (rys. 5.5).

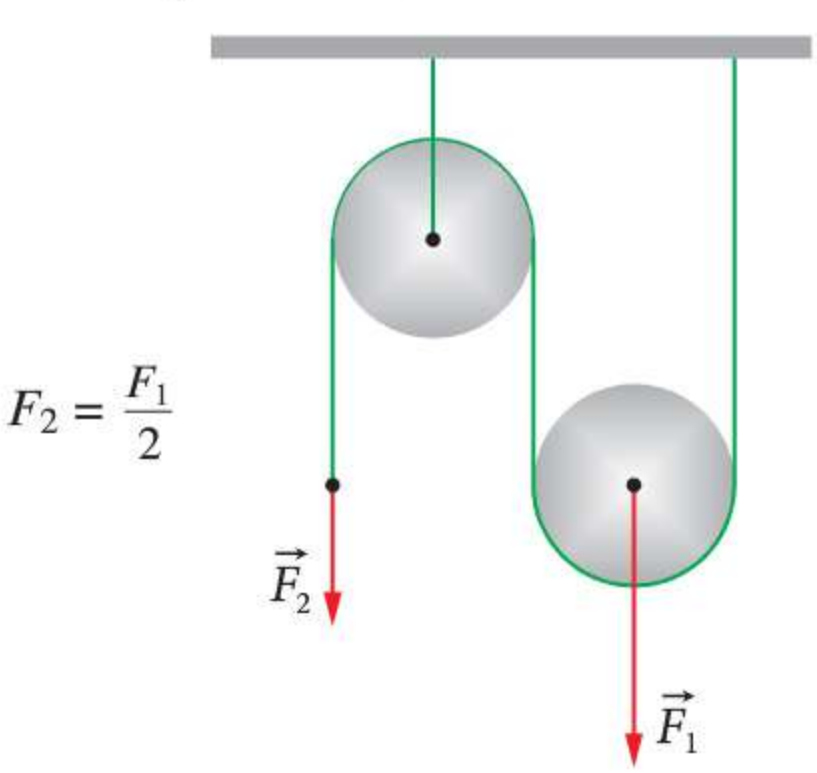


Rys. 5.4 Schemat krążka nieruchomego

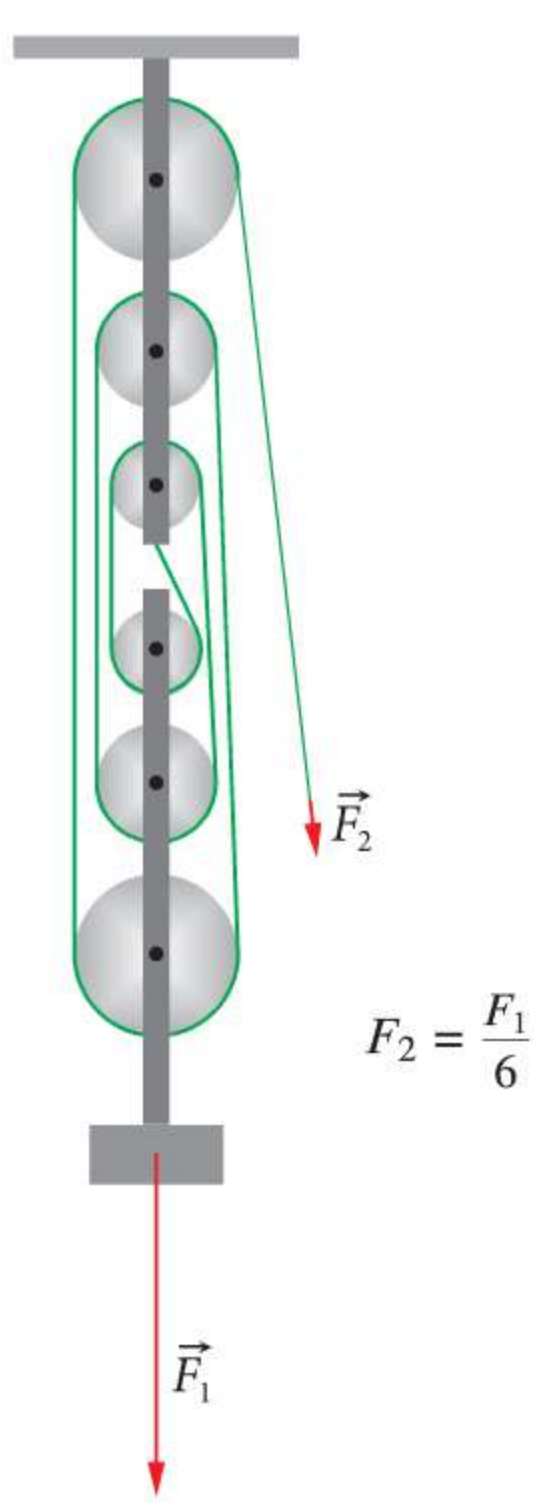


Rys. 5.5 Schemat krążka ruchomego

W praktyce stosuje się często układ złożony z krążków nieruchomego i ruchomego, pozwalający wykonywać pracę mniejszą siłą o „wygodnie" wybranym zwrocie (rys. 5.6) lub układy wielu krążków zwane wielokrążkami (rys. 5.7).

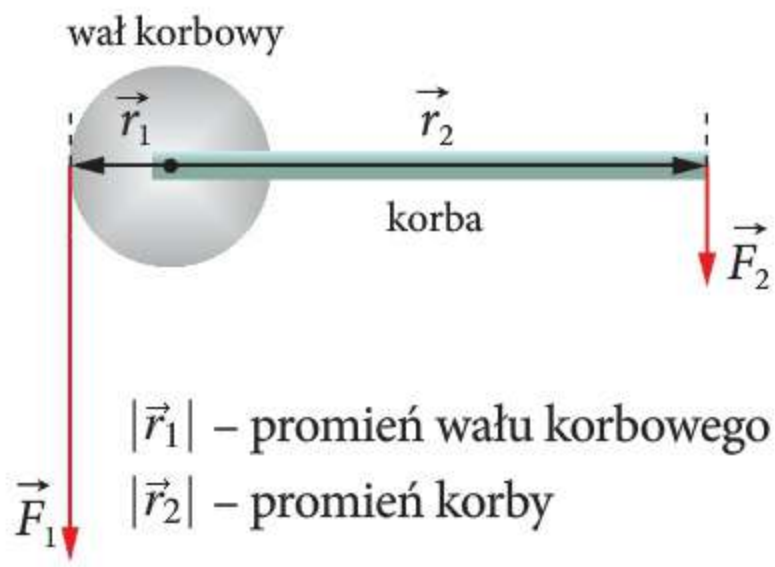


Rys. 5.6 Schemat układu krążków nieruchomego i ruchomego



Rys. 5.7 Schemat wielokrążka

Rodzajem dźwigni jest też kołowrót (rys. 5.8). Zauważ, że przez pół obrotu korby siły $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ działają po przeciwnych stronach osi obrotu (tak jak w dźwigni dwustronnej), a przez drugie pół obrotu – po tej samej stronie (tak jak w dźwigni jednostronnej).



Rys. 5.8 Schemat kołowrotu

WIEDZIEĆ WIĘCEJ

Jak powstały megality?

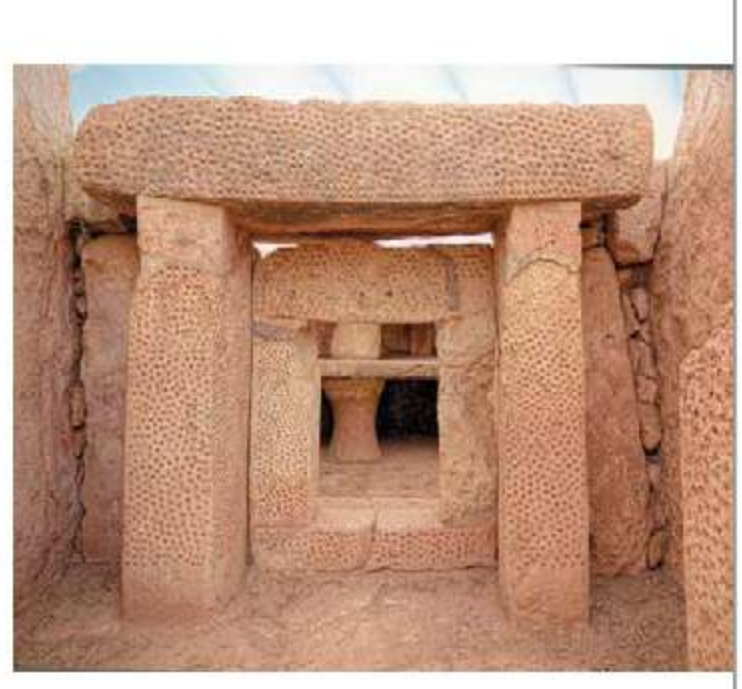
Najsłynniejsze **megality**, czyli wielkie kamienie lub budowle wzniesione z tych kamieni kilka tysięcy lat p.n.e. (zgodnie z zasadami fizyki!), rozsiane są po całym świecie. Budzą podziw i zdumienie, ponieważ sposób ich powstania owiany jest tajemnicą.

Jak transportowano potężne głazy? Jak podnoszono je i układano jeden na drugim, by wznieść wysokie, skomplikowane budowle bez stosowania spoiwa, zgodnie z zasadami statyki? Jak wkopywano pionowo w ziemię kilkusettonowe kamienne słupy – **menhiry** (jeden z największych miał wysokość 23 m i masę ok. 350 t) lub zwieńczano nimi kurhany? Jak z ogromnych głazów tworzono konstrukcje koliste (**kromlechy**) lub z masywnych, najczęściej prostopadłościennych płyt budowano grobowce (**dolmeny**)? Naukowcy od lat poszukują odpowiedzi na te pytania.

Odszukaj informacje na temat megalitów na terenie Polski.



Stonehenge – najsłynniejszy kromlech w południowej Anglii



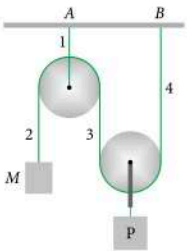
Grobowiec megalityczny na **Malcie**



Menhiry w **Callanish** w Szkocji

ZADANIA

1. Na rysunku 5.9 przedstawiono układ krążków.



Rys. 5.9

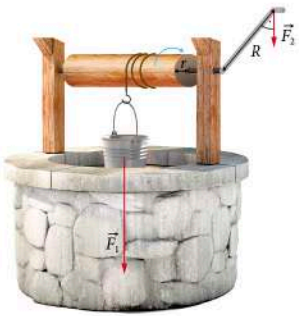
a) Przerysuj rysunek schematycznie do zeszytu. Narysuj siły działające na betonową płytę P, którą zawieszono na ruchomym krążku, oraz na ciało o masie M i części lin oznaczone na rysunku cyframi: 1, 2, 3 oraz 4 – przy założeniu, że układ krążków jest w równowadze.

b) Oblicz wartość siły napinającej linę. Przyjmij, że $M = 40\ \text{kg}$, a $g = 10\ \text{m/s}^2$. Pomiń ciężar ruchomego krążka i liny.

c) Oblicz wartość ciężaru betonowej płyty.

d) Oblicz wartości sił działających na sufit w punktach A i B.

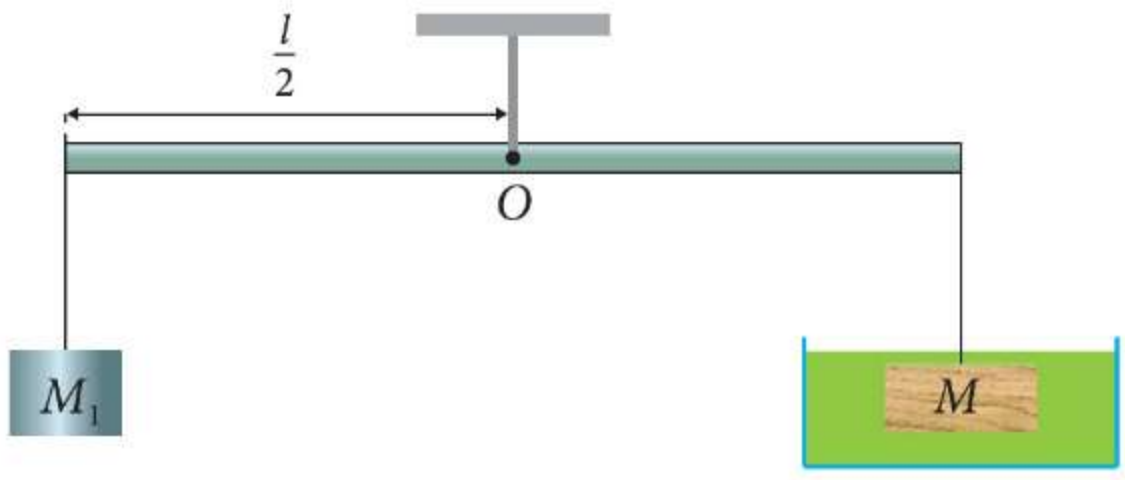
2. Ze studni (rys. 5.10) wyciągano ruchem jednostajnym wiadro wody, którego ciężar miał wartość $F_1 = 150\ \text{N}$.



Rys. 5.10

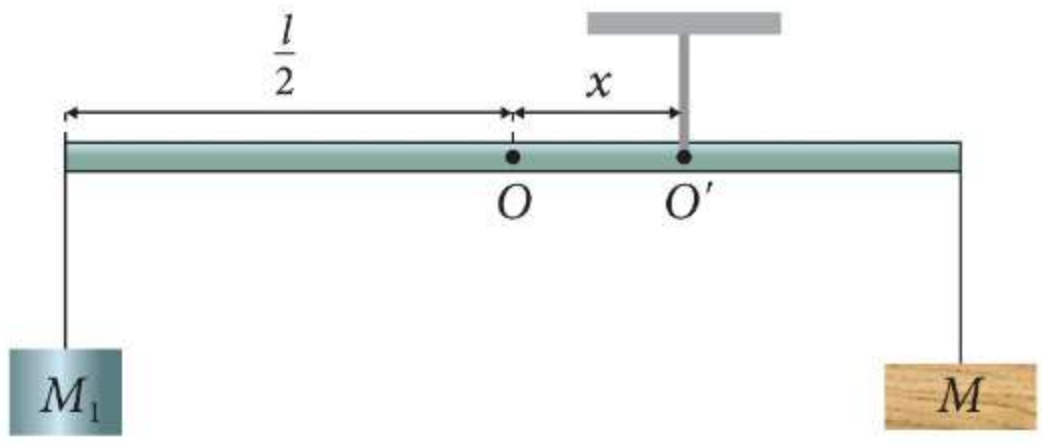
Lina jest nawinięta na walec o promieniu $r = 0{,}1\ \text{m}$, a promień korby $R = 0{,}5\ \text{m}$. Pomiń opory ruchu i oblicz wartość F_2 siły, którą działano na korbę.

3. Kloc drewna dębowego o objętości $0{,}5\ \mathrm{m}^3$, przeznaczonego do wykonania mebli ogrodowych, impregnowano powierzchniowo przez zanurzenie w cieczy o gęstości $\rho = 940\ \mathrm{kg/m}^3$, mniejszej od gęstości drewna (rys. 5.11). Podczas procesu impregnowania dźwignia użyta do tego celu znajdowała się w równowadze.



Rys. 5.11

Po kilku godzinach kloc wynurzono i suszono. Aby dźwignia nadal była w równowadze, zmieniono odpowiednio położenie punktu zawieszenia dźwigni z O na O' (rys. 5.12).



Rys. 5.12

Masa obciążnika $M_1 = 30\ \mathrm{kg}$, masa dźwigni $m = 57{,}5\ \mathrm{kg}$, jej długość $l = 2\ \mathrm{m}$. Oblicz odległość x, zaznaczoną na rysunku 5.12, przy założeniu, że masa drewnianego kloca nie zmieniła się w wyniku moczenia.

4. Podaj przykłady zastosowań dźwigni dwustronnej i jednostronnej w życiu codziennym.

5. Wyszukaj informacje o wynalazkach Archimedesa. Skomentuj przypisywane Archimedesowi stwierdzenie: „Dajcie mi punkt podparcia, a poruszę Ziemię”.



6. Moment pędu

- Moment pędu punktu materialnego
- Moment pędu bryły obracającej się wokół stałej osi symetrii
- Inna postać drugiej zasady dynamiki ruchu obrotowego
- Prawo zachowania momentu pędu

Przypomnij sobie definicję pędu, treść drugiej zasady dynamiki w innej postaci oraz zasadę zachowania pędu.

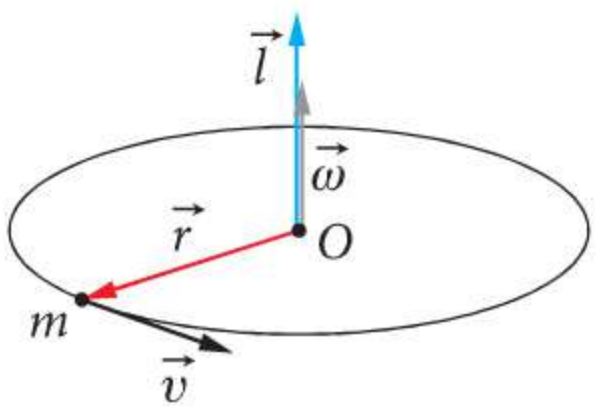
Jedną z wielkości fizycznych opisujących ruch obrotowy jest moment pędu. Dla punktu materialnego o masie m, poruszającego się ruchem jednostajnym z prędkością $\vec{v}$ po okręgu o środku O (rys. 6.1), moment pędu $\vec{l}$ to iloczyn wektorowy promienia wodzącego $\vec{r}$ tego punktu i jego pędu $\vec{p}$:

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} = m\vec{r} \times \vec{v}$$

Wartość momentu pędu:

$$l = rp \sin\sphericalangle(\vec{r}, \vec{p}) = mrv \sin\sphericalangle(\vec{r}, \vec{v})$$

Jeśli $\vec{r} \perp \vec{p}$, to $l = rp = mvr = m\omega r^2$.



Rys. 6.1 Ilustracja definicji momentu pędu

Mówimy, że $\vec{l}$ jest **momentem pędu** punktu materialnego względem punktu O.

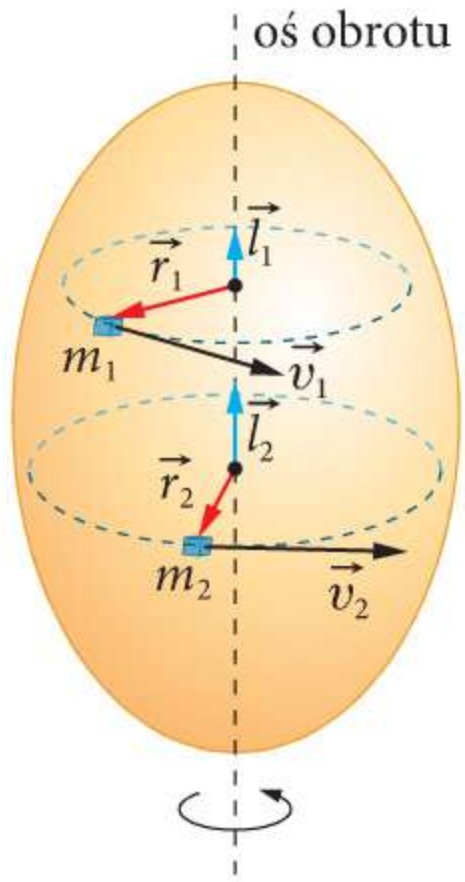
Jednostką momentu pędu jest 1 $\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}}$.

Zauważ, że kierunek i zwrot wektora $\vec{l}$ jest zgodny z kierunkiem i zwrotem prędkości kątowej punktu o masie m.

Wyprowadzimy teraz wzór na moment pędu bryły o symetrii osiowej, obracającej się wokół stałej osi będącej osią symetrii. (W tym podręczniku będziemy zajmować się takimi przypadkami). Moment pędu $\vec{L}$ całej bryły względem tej osi jest sumą momentów pędu wszystkich punktów tej bryły:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{l}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$

W tym wzorze m_i to masy poszczególnych punktów, na które dzielimy bryłę, a $\vec{v}_i$ to ich prędkości (na rysunku 6.2 pokazano dwa przykładowe punkty).



Rys. 6.2 Momenty pędu punktów bryły

Momenty pędu wszystkich punktów leżą na osi obrotu i mają taki sam zwrot, zgodny ze zwrotem prędkości kątowej $\vec{\omega}$. Wobec tego wartość momentu pędu całej bryły jest sumą wartości momentów pędu poszczególnych jej punktów.

$$L = \sum_{i=1}^{n} l_i = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i v_i \cdot \sin\sphericalangle(\vec{r}_i, \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i v_i$$

ponieważ kąty między wektorami $\vec{r}_i$ i $\vec{v}_i$ są równe 90°. Korzystamy ze związku $v_i = \omega r_i$ i otrzymujemy:

$$L = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i \omega r_i = \omega \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

Suma $\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$ to moment bezwładności bryły J, zatem:

$$L = \omega J \tag{6.1}$$

Dla bryły obracającej się wokół stałej osi symetrii związek ten możemy zapisać w postaci wektorowej[2]:

$$\vec{L} = J\vec{\omega}$$

Doszliśmy do wniosku, że moment pędu bryły obracającej się względem stałej osi symetrii jest iloczynem momentu bezwładności i prędkości kątowej bryły. Związek ten przypomina wzór na pęd znany z mechaniki ruchu postępowego: $\vec{p} = m\vec{v}$. Tak jak w przypadku energii kinetycznej, rolę masy ciała odgrywa tutaj moment bezwładności, a rolę prędkości $\vec{v}$ – prędkość kątowa $\vec{\omega}$.

Jeśli bryła sztywna obraca się ruchem zmiennym, to w czasie Δt jej moment pędu oraz prędkość kątowa ulegają zmianom, które są związane wzorem:

$$\Delta\vec{L} = J\Delta\vec{\omega}$$

[2] W ogólnym przypadku wektory $\vec{L}$ i $\vec{\omega}$ zazwyczaj nie są do siebie równoległe.

Po podzieleniu obu stron tego wzoru przez czas Δt, w którym zaszły zmiany, otrzymujemy:

$$\frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} = J\frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t}$$

Dla $\Delta t \to 0$:

$$\frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} = J\vec{\varepsilon}$$

Ponieważ iloczyn $J\vec{\varepsilon}$ jest równy wypadkowemu momentowi siły $\vec{M}$:

$$\frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} = \vec{M} \qquad (6.2)$$

Powyższy związek to **inna postać drugiej zasady dynamiki dla ruchu obrotowego**. Wypowiadamy ją następująco:

> Wypadkowy moment sił działających na bryłę sztywną jest równy szybkości zmiany momentu pędu tej bryły.

Ze związku (6.2) wynika, że:
Jeśli wypadkowy moment sił działających na bryłę sztywną jest równy zeru, to moment pędu tej bryły nie ulega zmianie.

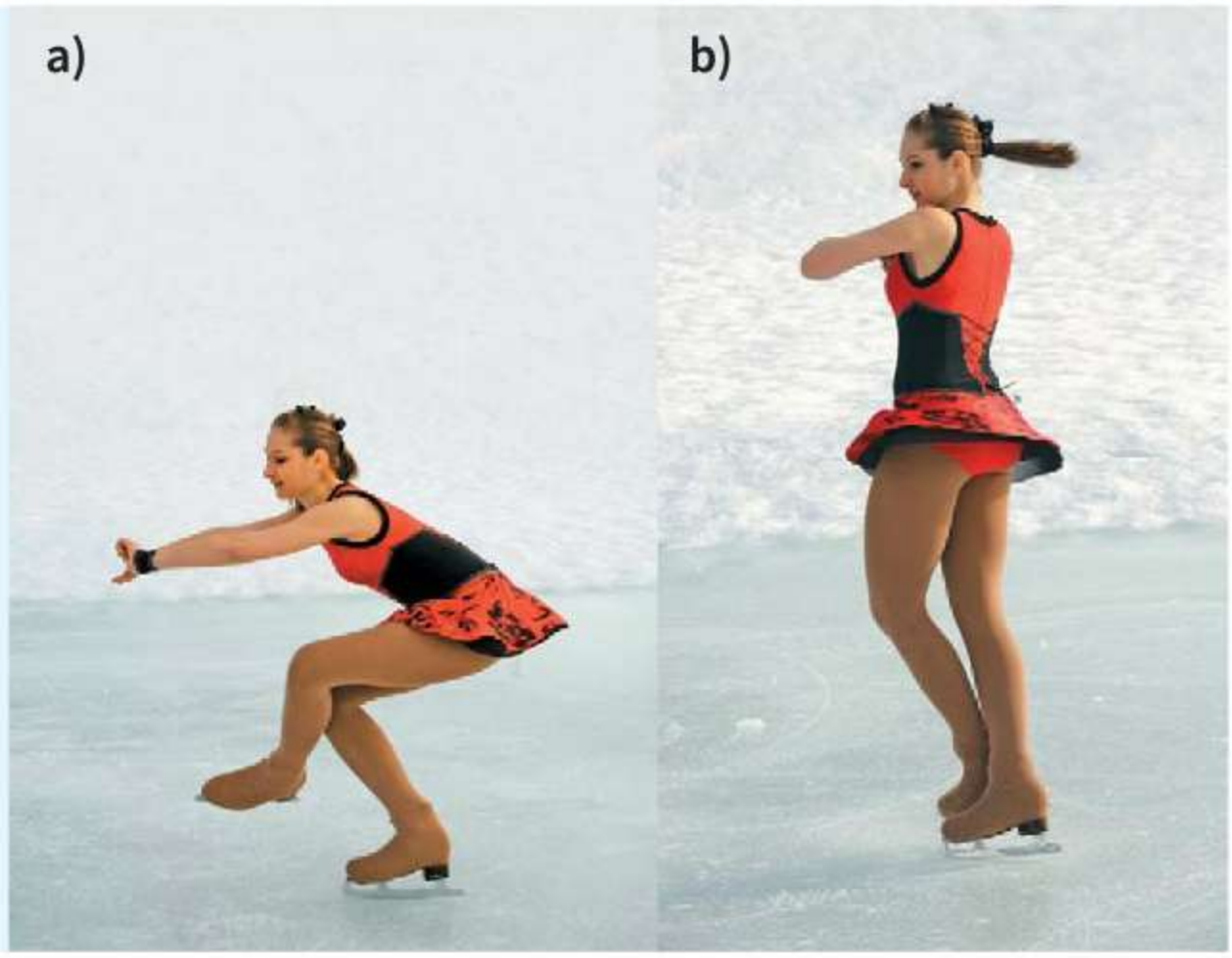
Wniosek ten nazywamy **zasadą** (prawem) **zachowania momentu pędu**.
Zasadę tę można sprawdzić eksperymentalnie (patrz doświadczenie 2 na s. 332).
Dla układu obracających się ciał zmiana momentu pędu może oczywiście nastąpić tylko w wyniku działania sił (o niezerowych momentach względem osi obrotu) pochodzących spoza tego układu. Zasada zachowania momentu pędu dotyczy nie tylko bryły sztywnej, lecz także dowolnego układu punktów materialnych.

Przykład 6.1

Piruety na łyżwach

Łyżwiarka wiruje z szybkością ω_1 (rys. 6.3a).

W pewnej chwili prostuje się, zbliża ręce do tułowia (rys. 6.3b) i jej szybkość kątowa wzrasta do ω_2. Wyjaśnimy to zjawisko.



Rys. 6.3

Na łyżwiarkę działa siła tarcia łyżwy o lód, ale jej wartość jest znikomo mała, więc moment siły tarcia można w rozważaniach pominąć i skorzystać z zasady zachowania momentu pędu. Początkowy moment pędu $\vec{L}_1$ łyżwiarki (rys. 6.3a) będzie równy jej momentowi pędu $\vec{L}_2$ w sytuacji przedstawionej na rysunku 6.3b, zatem:

$$\vec{L}_1 = \vec{L}_2$$

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{J_1}{J_2}$$

Szybkość kątowa łyżwiarki wzrośnie tyle razy, ile razy zmaleje jej moment bezwładności względem osi obrotu.

Zastanówmy się jeszcze, czy w wyniku zmian momentu bezwładności i szybkości kątowej zmieni się energia kinetyczna łyżwiarki.

Podczas ruchu z szybkością ω_1: $E_{k1} = \frac{J_1\omega_1^2}{2}$

Po zmianie pozycji: $E_{k2} = \frac{J_2\omega_2^2}{2} = \frac{J_2}{2} \cdot \left(\frac{J_1}{J_2} \cdot \omega_1\right)^2 = \frac{J_1^2\omega_1^2}{2J_2} = E_{k1}\frac{J_1}{J_2}$

Ponieważ $J_1 > J_2$, więc $E_{k2} > E_{k1}$. Wzrost energii kinetycznej łyżwiarki nastąpił kosztem pracy, którą wykonała podczas prostowania się i zbliżania rąk do tułowia.

WIEDZIEĆ WIĘCEJ

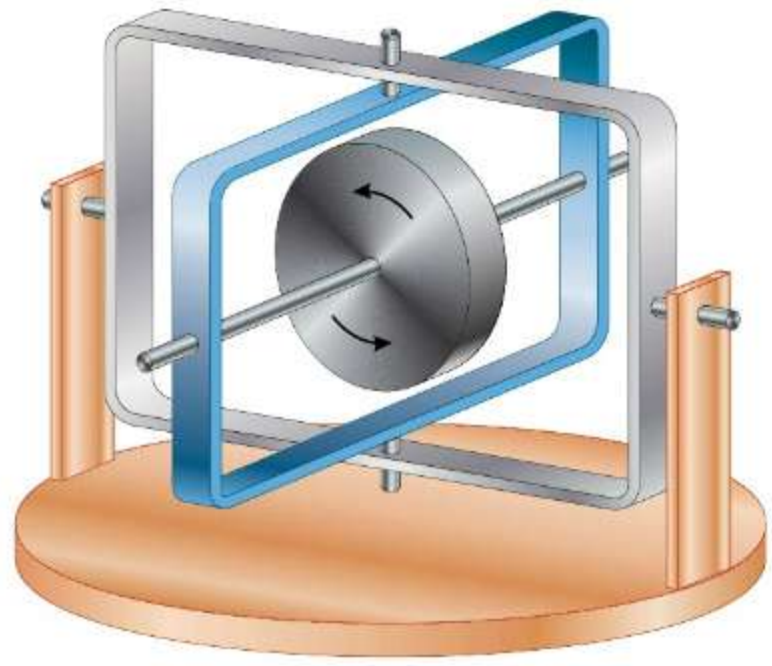
Żyroskop

Żyroskop to układ fizyczny, w którym szybko wirujące ciało dąży do zachowania płaszczyzny obrotu. Ma trzy stopnie swobody, czyli może dowolnie zmieniać swoje położenie w przestrzeni, a kierunek osi jego obrotu zawsze pozostaje bez zmian. Działanie żyroskopu to praktyczne zastosowanie zasady zachowania momentu pędu.

Żyroskopy mają szerokie zastosowanie w urządzeniach nawigacyjnych, które wskazują wybrany kierunek, i samosterujących. Są montowane na statkach, w śmigłowcach czy samolotach.

Masywne żyroskopy, które umieszcza się na śródokręciu w płaszczyźnie symetrii jednostki, od lat służą do tłumienia kołysania statków.

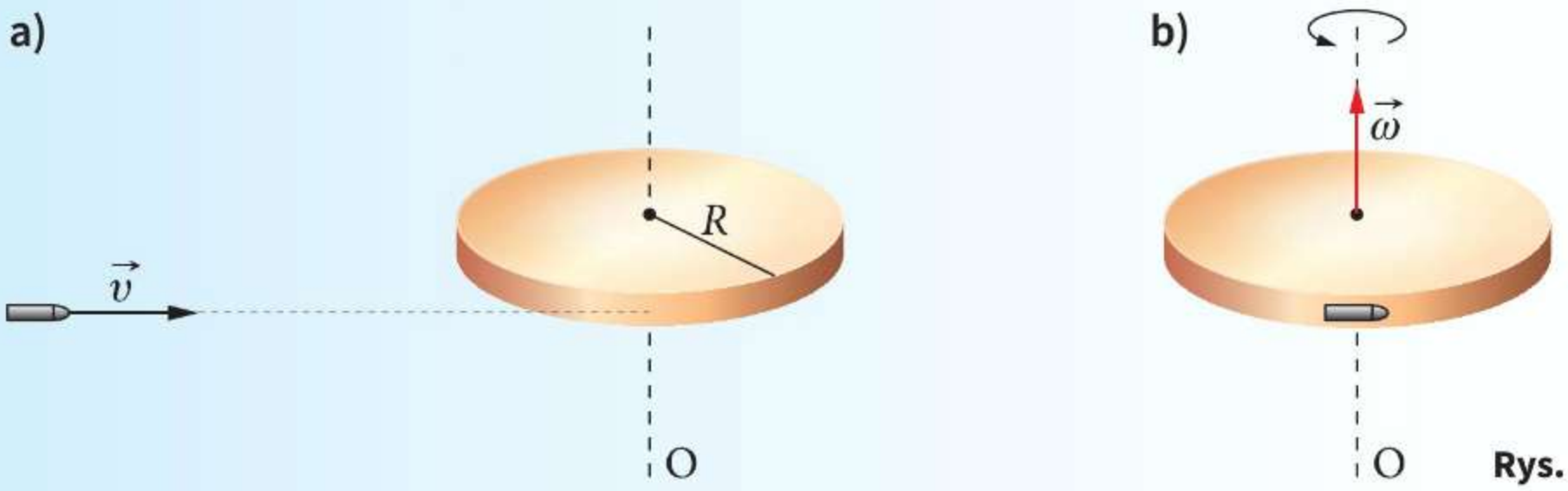
Kosmiczny Teleskop Hubble'a jest wyposażony w sześć żyroskopów pracujących z szybkością 19 200 obr./min, z czego standardowo używa się trzech (pozostałe stanowią rezerwę). Pozwala to na wykonywanie kilkudziesięciominutowych ekspozycji, w czasie których położenie teleskopu się nie zmienia. Aby wydłużyć żywotność żyroskopów oraz zmniejszyć tarcie i drgania, w żyroskopach teleskopu zastosowano łożyska gazowe.



Przykład 6.2

Tarcza i pocisk

W brzeg nieruchomej poziomej tarczy o masie $m_1 = 1{,}6\ \mathrm{kg}$ i promieniu $R = 0{,}25\ \mathrm{m}$, osadzonej na osi obrotu (wokół której tarcza może obracać się z pomijalnie małym tarciem), wbija się pocisk o masie $m = 2\ \mathrm{g}$ z szybkością $v = 400\ \mathrm{m/s}$ (rys. 6.4a). Obliczymy szybkość kątową, którą uzyska tarcza **tuż po** wbiciu się w nią pocisku.



Rys. 6.4

W układzie złożonym z tarczy i pocisku moment siły, którą pocisk działa na tarczę w chwili wbijania się w nią, jest momentem siły wewnętrznej, więc moment pędu układu nie ulegnie zmianie.

Zgodnie z zasadą zachowania momentu pędu:

$$\vec{L}_1 = \vec{L}_2$$

Początkowy moment pędu układu jest równy momentowi pędu pocisku względem osi obrotu O w chwili uderzenia w tarczę (rys. 6.4b):

$$\vec{L}_1 = \vec{r} \times \vec{p}$$

gdzie $\vec{p} = m\vec{v}$ jest pędem pocisku.

A zatem:

$$\vec{L}_1 = \vec{r} \times m\vec{v} = m\vec{r} \times \vec{v} = m|\vec{r}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin 90^\circ = m|\vec{r}| \cdot |\vec{v}|$$

$$|\vec{r}| = R$$

$$L_1 = mRv$$

Moment pędu tarczy z pociskiem:

$$\vec{L}_2 = J_{\text{układu}}\vec{\omega}$$

$$L_2 = \left(mR^2 + \frac{m_1 R^2}{2}\right)\omega = \frac{2m + m_1}{2}R^2\omega$$

Wobec tego:

$$\frac{2m + m_1}{2}R^2\omega = mRv$$

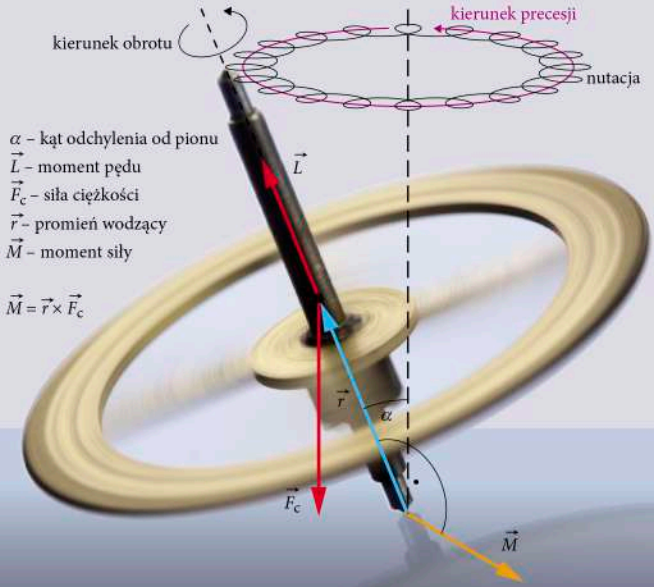
$$\omega = \frac{2mv}{(2m + m_1)R}$$

Podstawiamy wartości liczbowe i obliczamy szybkość kątową:

$$\omega = \frac{2 \cdot 0{,}002\ \mathrm{kg} \cdot 400\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{(2 \cdot 0{,}002\ \mathrm{kg} + 1{,}6\ \mathrm{kg}) \cdot 0{,}25\ \mathrm{m}} \approx 4\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

Precesja

Bąk – znana chyba wszystkim dzieciom zabawka – często nawet dorosłych fascynuje swoim niezbyt oczywistym zachowaniem. Najstarsze odnalezione bączki, wykonane z gliny, liczą sobie ponad 5000 lat.



Bąk wprawiony w szybki ruch obrotowy nie przewraca się, nawet jeśli jest mocno przechylony. Jego oś obrotu powoli zakreśla okręgi, a bąk przewraca się dopiero wtedy, gdy na skutek tarcia utraci zbyt dużo energii ruchu obrotowego i zaczepi krawędzią o podłoże.

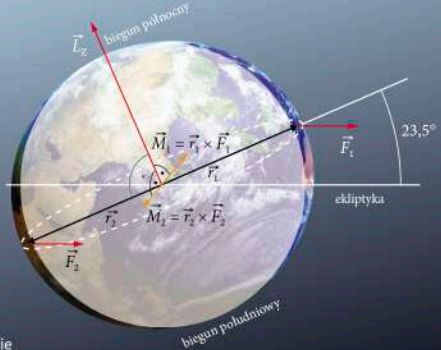
Okrężna zmiana kierunku osi obrotu bąka jest wywołana momentem siły ciężkości, która próbuje przewrócić pochyloną zabawkę, czyli obrócić ją względem punktu podparcia. Moment siły ciężkości jest w każdej chwili prostopadły do momentu pędu bąka, więc nie może zmienić jego wartości, ale zmienia kierunek, przy czym kąt odchylenia bąka od pionu pozostaje stały.

Tę zmianę kierunku momentu pędu, a tym samym osi obrotu, nazywamy precesją.

Niekiedy udaje się zaobserwować, że oś obrotu bąka (oprócz precesji) szybko zatacza nieduże pętle. Zazwyczaj jest to spowodowane drobnymi asymetriami, które sprawiają, że kierunek wektora momentu pędu bąka nie pokrywa się z chwilową osią obrotu bąka. Takie drgania nazywamy **nutacją**.

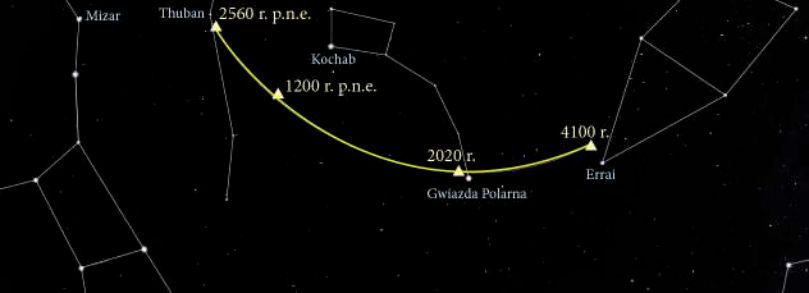
Precesja osi Ziemi

Dzięki efektowi żyroskopowemu zarówno położenie biegunów geograficznych Ziemi, jak i kierunek, który wyznaczają, są bardzo dobrze ustabilizowane. Bryła Ziemi nie jest jednak idealnie symetryczną kulą, co umożliwia ciałom Układu Słonecznego wywieranie wpływu na jej ruch obrotowy. Spłaszczenie Ziemi wynikające z jej ruchu wirowego powoduje, że średnica Ziemi w płaszczyźnie równika jest mniej więcej o 43 km dłuższa od średnicy biegunowej.



Na powyższym rysunku uwydatniono równikową „nadwyżkę" masy. Wypadkowy moment sił działających na zaznaczone warstwy Ziemi, a pochodzących od Księżyca, Słońca i planet (tzw. sił pływowych), jest mały, ale niepomijalny. Podobnie jak w zabawkowym bączku, powoduje on precesję osi obrotu Ziemi – o okresie ok. 9 mln dni, czyli 26 tys. lat.

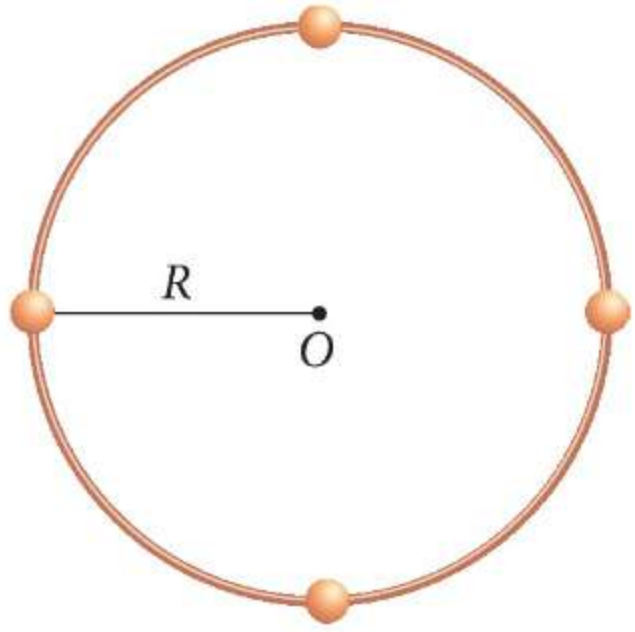
Nie zmienia to jednak znacząco nachylenia osi obrotu Ziemi do płaszczyzny orbity (ekliptyki). Dzięki temu cykl pór roku praktycznie nie zmienił się od wielu tysięcy lat, choć np. w starożytności, gdy Fenicjanie zakładali port w miejscu obecnej stolicy Portugalii, północny biegun niebieski znajdował się dość daleko od Gwiazdy Polarnej. Jeszcze dawniej, gdy w starożytnym Egipcie budowano piramidy, do wyznaczenia kierunku północnego najlepiej nadawały się dość jasne gwiazdy Kochab i Mizar oraz znajdująca się pomiędzy nimi Thuban. Na początku czwartego tysiąclecia funkcję gwiazdy wskazującej północ będzie pełnić Errai.



ZADANIA

1. Tarcza opisana w przykładzie 6.2 wiruje z prędkością kątową o wartości $\omega = 4\ \mathrm{rad/s}$ i zwrocie w dół. Oblicz wartość prędkości, z którą pocisk o masie $m = 4\ \mathrm{g}$ powinien uderzyć w brzeg tarczy stycznie do niej, aby ją zatrzymać.

2. Obręcz o masie m i promieniu R z przyklejonymi niewielkimi kulkami o masie $m_1 = 0{,}25m$ każda wiruje z szybkością kątową ω wokół osi prostopadłej do płaszczyzny obręczy i przechodzącej przez punkt O (rys. 6.5).



Rys. 6.5

Odpowiedz na poniższe pytania i uzasadnij odpowiedzi.

a) Czy szybkość kątowa obręczy zmieniłaby się w chwili, w której wszystkie kulki by się od niej oderwały?

b) Czy masa kulek ma wpływ na ruch obręczy po oderwaniu się kulek?

3. Na brzegu karuzeli obracającej się z szybkością kątową $\omega_1 = 0{,}55\ \mathrm{rad/s}$ stoi dziecko o masie $m = 40\ \mathrm{kg}$. Moment bezwładności karuzeli $J_0 = 400\ \mathrm{kg \cdot m^2}$, a jej promień $R = 2\ \mathrm{m}$. W pewnej chwili dziecko przechodzi do miejsca odległego o $r = 1\ \mathrm{m}$ od osi obrotu karuzeli.

Oblicz szybkość kątową ω_2 karuzeli po zmianie położenia dziecka.



7. Analogie w opisie ruchów postępowego i obrotowego

- Analogie między wielkościami fizycznymi w dynamice
- Analogie między zasadami dynamiki
- Analogia między zasadami zachowania pędu i momentu pędu

Przypomnij sobie analogie między wielkościami kinematycznymi dla ruchów postępowego i obrotowego.

W rozdziale 2, w tabeli 2.1 przedstawiliśmy analogie między wielkościami kinematycznymi dla ruchów postępowego i obrotowego. W tabeli 7.1 przedstawiamy analogie występujące w dynamicznym opisie tych dwóch rodzajów ruchu.

Tabela 7.1

Ruch postępowy	Ruch obrotowy
masa m	moment bezwładności J
siła $\vec{F}$	moment siły $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$
pęd $\vec{p} = m\vec{v}$	moment pędu[3] $\vec{L} = J\vec{\omega}$
Energia kinetyczna	
$E_k = \frac{mv^2}{2}$	$E_k = \frac{J\omega^2}{2}$
Moc chwilowa	
$P = Fv$	$P = M\omega$
I zasada dynamiki	
$\vec{F}_{wyp} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \vec{0}$ lub $\vec{v} = \text{const} \neq \vec{0}$	$\vec{M}_{wyp} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{\omega} = \vec{0}$ lub $\vec{\omega} = \text{const} \neq \vec{0}$
II zasada dynamiki	
$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{wyp}}{m}$	$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}_{wyp}}{J}$
Inna postać II zasady dynamiki	
$\vec{F}_{wyp} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$	$\vec{M}_{wyp} = \frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t}$
Zasada zachowania pędu $\vec{F}_{wyp} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = \text{const}$	Zasada zachowania momentu pędu $\vec{M}_{wyp} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \text{const}$

[3] Dla bryły sztywnej obracającej się wokół osi symetrii.

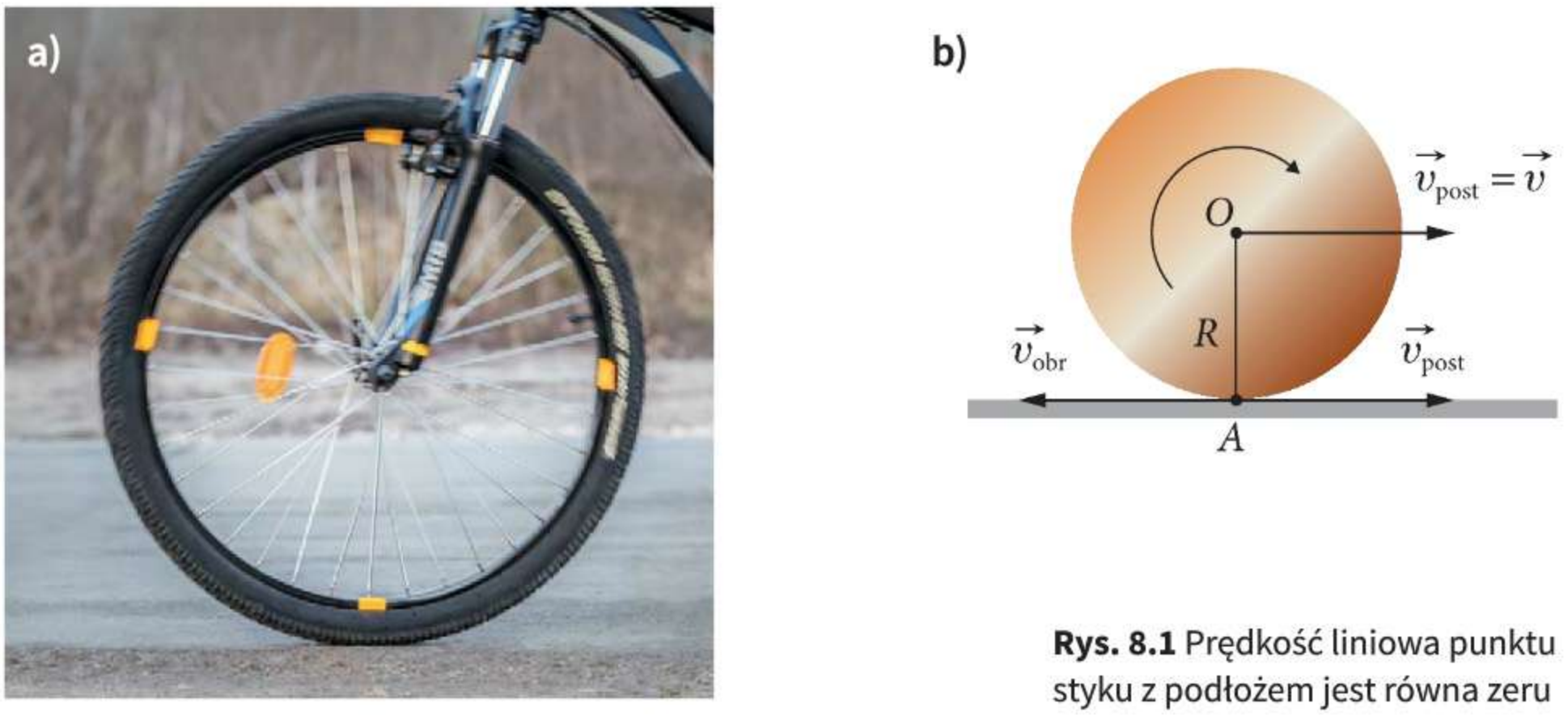


8. Toczenie: złożenie ruchów postępowego i obrotowego

- Prędkość liniowa punktów toczącej się bryły
- Toczenie jako złożenie ruchu postępowego środka masy i ruchu obrotowego wokół osi symetrii
- Toczenie jako ruch obrotowy względem chwilowej osi obrotu
- Warunek toczenia bez poślizgu
- Toczenie bez poślizgu po równi pochyłej

Przypomnij sobie wiadomości o składaniu ruchów.

Wspominaliśmy już, że toczenie się kuli, walca albo obręczy możemy rozpatrywać jako złożenie ruchu postępowego względem podłoża i obrotowego wokół osi symetrii. Będziemy rozważać toczenie się bez poślizgu. W takim przypadku punkt bryły stykający się w danej chwili z podłożem ma w tej chwili względem podłoża prędkość równą zeru (rys. 8.1a). Co wynika z tego faktu? W ruchu złożonym każdy punkt bryły nieleżący na osi obrotu ma prędkość równą sumie dwóch prędkości – ruchu postępowego i obrotowego. Punkty leżące na osi nie poruszają się po okręgu.



Rys. 8.1 Prędkość liniowa punktu styku z podłożem jest równa zeru

Skoro wypadkowa prędkość punktu A (rys. 8.1b) jest równa zeru, oznacza to, że prędkość liniowa tego punktu (i wszystkich punktów leżących w odległości R od osi obrotu) w ruchu obrotowym ma taką samą wartość jak prędkość w ruchu postępowym bryły, czyli jak prędkość, z którą przesuwa się jej oś:

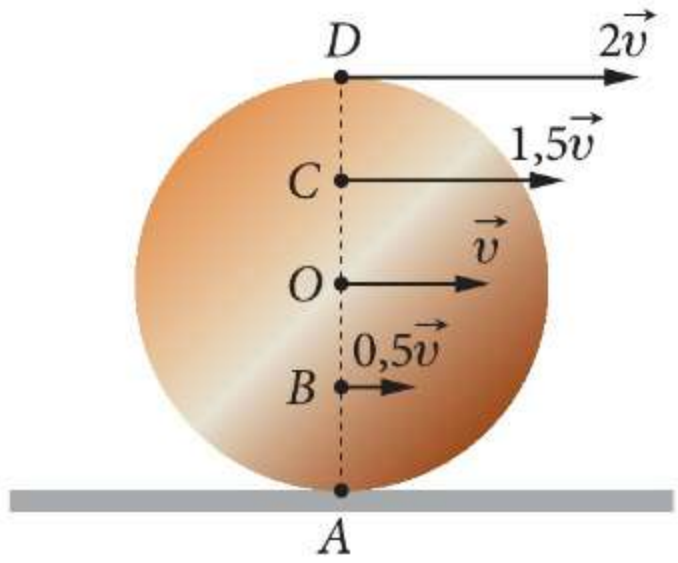
$$v = v_{obr} \qquad \text{ale} \qquad v_{obr} = \omega R$$

zatem:

$$v = \omega R$$

Taki jest związek między szybkością liniową v, z którą przemieszcza się bryła, a szybkością kątową ω jej ruchu obrotowego. (Zastanów się, która wielkość byłaby większa: v czy ωR, gdyby bryła toczyła się z poślizgiem).

Jaką prędkość wypadkową mają inne punkty bryły, np. te, które leżą na pionowej średnicy, zaznaczonej na rysunku 8.2?



Rys. 8.2 Prędkości wybranych punktów podczas toczenia

Na przykład punkt C ma prędkość wypadkową złożoną z dwóch prędkości o zgodnych zwrotach i wartościach równych: w ruchu postępowym v i w ruchu obrotowym $v_{\text{obr C}} = \omega\frac{R}{2}$, zatem:

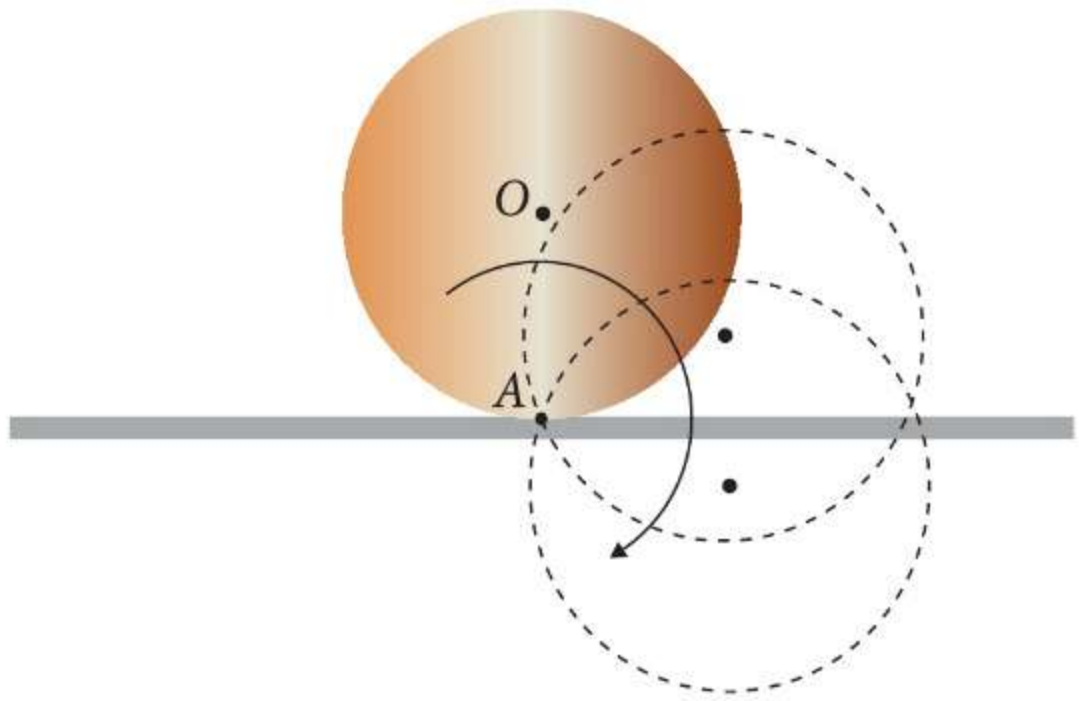
$$v_{\text{C}} = v + \frac{\omega R}{2} = v + \frac{v}{2} = 1{,}5v$$

Zwróć uwagę, że prędkość $\vec{v}_{\text{obr B}}$ jest zwrócona w lewo i ma wartość równą $\frac{\omega R}{2} = \frac{v}{2}$, więc prędkość wypadkowa punktu B jest zwrócona w prawo i ma wartość:

$$v_{\text{B}} = v - \frac{v}{2} = 0{,}5v$$

Wyjaśnij, dlaczego wypadkowa prędkość punktu D wynosi $2\vec{v}$.

Bryła w danej chwili **zachowuje się tak, jakby wykonywała tylko obrót względem tzw. chwilowej osi obrotu A**, równoległej do osi O (rys. 8.3).



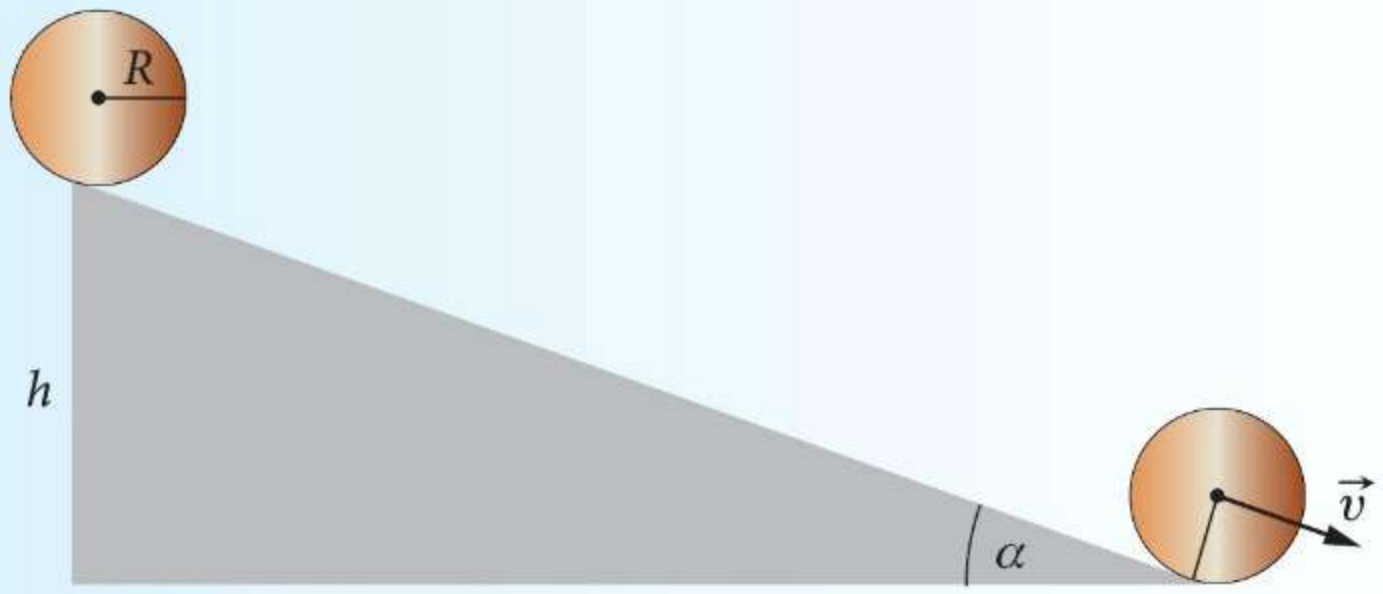
Rys. 8.3 Toczenie jako obrót względem chwilowej osi obrotu

Ruch bryły toczącej się bez poślizgu jest równoważny takiemu obrotowi (przykład 8.1, sposób II).

Przykład 8.1

Ruch walca po równi pochyłej – toczenie bez poślizgu

Obliczymy wartość prędkości ruchu postępowego walca u podstawy równi pochyłej (rys. 8.4). Walec o masie m i promieniu R stacza się z niej bez poślizgu.



Rys. 8.4

Zadanie rozwiążemy czterema sposobami.

Sposób I

Potraktujmy ruch staczającego się walca jako złożenie dwóch ruchów: obrotowego wokół osi symetrii i postępowego z prędkością równą prędkości środka masy.

Stosujemy drugą zasadę dynamiki dla obu ruchów i na jej podstawie piszemy równania ruchu:

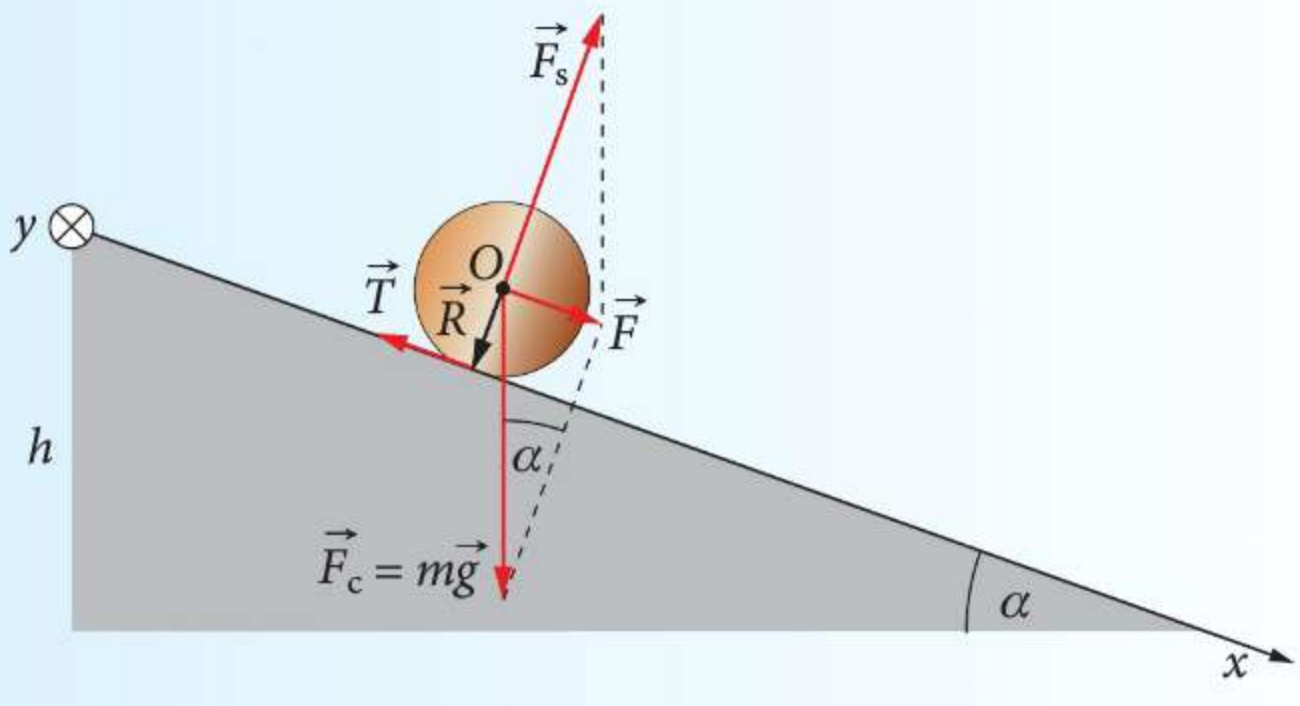
- postępowego $\vec{F}_{\mathrm{w}} = m\vec{a}$
- i obrotowego $\vec{M} = J_0\vec{\varepsilon}$

Ruch postępowy powoduje wypadkowa siły $\vec{F}$ o wartości $mg\sin\alpha$ i siły tarcia o wartości T, więc:

$$mg\sin\alpha - T = ma \tag{8.1}$$

gdzie a jest współrzędną przyspieszenia (równą jego wartości) w ruchu postępowym walca.

Przyspieszenie kątowe zostało nadane bryle przez moment siły tarcia, bo momenty pozostałych sił ($\vec{F}_{\mathrm{c}}$ i $\vec{F}_{\mathrm{s}}$) lub też $\vec{F}$, która jest ich wypadkową, są równe zeru – kierunki tych sił przecinają oś obrotu (rys. 8.5).



Rys. 8.5

Moment siły tarcia ma wartość TR (bo $\vec{T}\perp\vec{R}$), kierunek prostopadły do płaszczyzny rysunku, a zwrot pod rysunek, tzn. zgodny ze zwrotem osi y (sprawdź to!).

$$TR = J_0\varepsilon \tag{8.2}$$

Założyliśmy, że ruch odbywa się bez poślizgu, więc $\varepsilon = \frac{a}{R}$.

Po rozwiązaniu układu równań (8.1) i (8.2) o dwóch niewiadomych a i T:

$$\begin{cases} mg\sin\alpha - T = ma \\ TR = J_0\frac{a}{R} \end{cases}$$

otrzymujemy:

$$a = \frac{mg\sin\alpha}{m + \frac{J_0}{R^2}} \qquad T = \frac{mgJ_0\sin\alpha}{mR^2 + J_0} \tag{8.3}$$

Zauważ, że wyniki te są dość ogólne, stosują się do dowolnej bryły obrotowej staczającej się z równi pochyłej. Po wstawieniu momentu bezwładności walca ($J_0 = \frac{mR^2}{2}$) otrzymujemy:

$$a = \frac{2}{3}g\sin\alpha \qquad T = \frac{1}{3}mg\sin\alpha$$

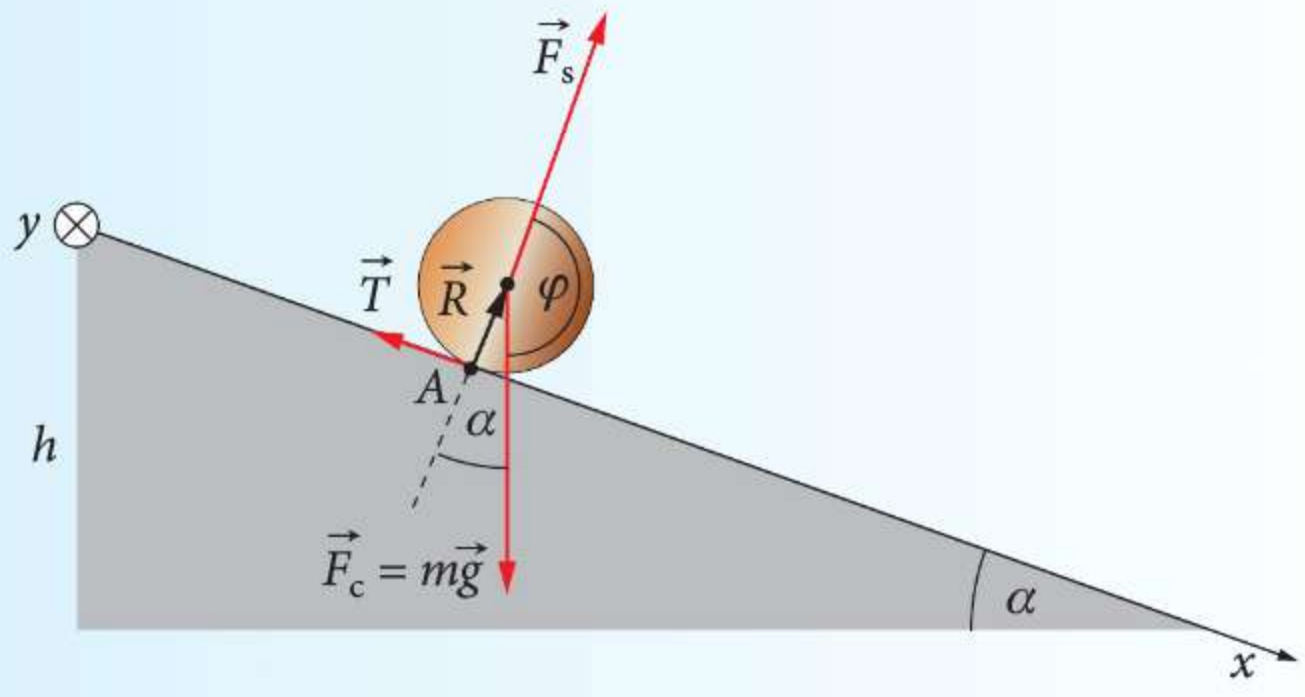
Przyjrzyj się tym wynikom i wyciągnij samodzielnie wnioski. Są one bardzo pouczające, w szczególności te, które dotyczą wartości siły tarcia.

Ruch postępowy bryły odbywa się z przyspieszeniem o wartości a, zatem $s = \frac{at^2}{2}$, gdzie $t = \frac{v}{a}$, więc $v = \sqrt{2as}$. Droga $s = \frac{h}{\sin\alpha}$, więc szybkość końcowa środka każdej bryły obrotowej będzie wyrażona wzorem:

$$v = \sqrt{\frac{2mgh}{m + \frac{J_0}{R^2}}} \quad \text{a walca} \quad v = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$$

Sposób II

Potraktujmy teraz ruch staczającego się bez poślizgu walca jako ruch obrotowy wokół chwilowej osi obrotu A (rys. 8.6).



Rys. 8.6

Teraz do obliczenia wartości przyspieszenia bryły wystarczy jedno równanie. Różny od zera moment siły względem punktu A ma tylko siła ciężkości. Moment tej siły nadaje bryle w tym ruchu przyspieszenie kątowe $\vec{\varepsilon}$.

Sprawdź, że moment siły $\vec{F}_c = m\vec{g}$ jest prostopadły do płaszczyzny rysunku i zwrócony pod rysunek. Jego wartość wynosi:

$$mgR\sin\varphi = mgR\sin(180^\circ - \alpha) = mgR\sin\alpha$$

Druga zasada dynamiki dla ruchu obrotowego przyjmuje więc postać:

$$mgR\sin\alpha = J\varepsilon$$

gdzie $\varepsilon = \frac{a}{R}$, ponieważ ruch odbywa się bez poślizgu. W tym przypadku moment bezwładności bryły J musimy obliczyć z twierdzenia Steinera:

$$J = J_0 + mR^2$$

$$mgR\sin\alpha = \left(J_0 + mR^2\right)\frac{a}{R}$$

Obliczona z tego wzoru wartość przyspieszenia bryły wyraża się wzorem:

$$a = \frac{mg\sin\alpha}{m + \frac{J_0}{R^2}} \qquad (8.4)$$

i jest oczywiście taka sama jak obliczona sposobem I. Szybkość końcową obliczamy tak jak poprzednio.

Jeśli potraktujemy ruch bryły jako „czysty" ruch obrotowy, nie obliczymy wartości siły tarcia, siła ta bowiem nie występuje w równaniu ruchu – jej kierunek przecina oś obrotu.

Do wzoru (8.4) wstaw moment bezwładności:
- kuli,
- obręczy

i oblicz wartości przyspieszeń, z którymi te bryły staczają się z równi.

Sposób III

Szybkość końcową walca możemy także obliczyć dzięki zastosowaniu zasady zachowania energii mechanicznej.

Walec rozpoczynający ruch na szczycie równi ma (względem podstawy równi) energię potencjalną ciężkości $E_\mathrm{p} = mgh$. Podczas ruchu następuje przemiana tej energii w energię kinetyczną ruchu postępowego i obrotowego względem osi symetrii.

$$E_\mathrm{p} = E_{\mathrm{k\,postępowego}} + E_{\mathrm{k\,obrotowego}}$$

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{J_0\omega^2}{2}$$

(v – szybkość ruchu postępowego, a ω – szybkość ruchu obrotowego u podstawy równi).

Ponieważ w ruchu bez poślizgu w każdej chwili $v = \omega R$, to:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{J_0v^2}{2R^2} = \frac{v^2}{2}\left(m + \frac{J_0}{R^2}\right)$$

skąd:

$$v = \sqrt{\frac{2mgh}{m + \frac{J_0}{R^2}}}$$

Po wstawieniu $J_0 = \frac{1}{2}mR^2$ otrzymamy:

$$v = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$$

Uwaga: Przeprowadzone rozumowania i uzyskany wynik w postaci:

$$v = \sqrt{\frac{2mgh}{m + \frac{J_0}{R^2}}}$$

będą takie same dla każdej bryły obrotowej o promieniu R. Gdy wstawimy do tego wzoru odpowiednie momenty bezwładności J_0, otrzymamy szybkości końcowe kuli, walca i obręczy.

Jeśli znamy szybkość końcową i kąt nachylenia równi, możemy obliczyć wartości przyspieszeń, z którymi te bryły staczają się z równi bez poślizgu.

Zwróć uwagę, że możemy tu stosować zasadę zachowania energii mimo występowania siły tarcia, ponieważ **nie ma poślizgu, więc siła tarcia nie wykonuje pracy**.

Sposób IV

Szybkość liniową walca uzyskaną u podnóża równi po stoczeniu się z niej można obliczyć z zasady zachowania energii, porównując energię potencjalną na szczycie równi z końcową energią kinetyczną ruchu obrotowego względem chwilowej osi obrotu.

$$mgh = \frac{J\omega^2}{2}$$

gdzie J – moment bezwładności względem chwilowej osi obrotu, równoległej do osi symetrii bryły.

Z twierdzenia Steinera wiemy, że:

$$J = J_0 + mR^2$$

Wobec tego:

$$mgh = \frac{(J_0 + mR^2)\omega^2}{2} \qquad (8.5)$$

Po obliczeniu ω ze związku $v = \omega R$ i podstawieniu do wzoru (8.5) otrzymamy:

$$mgh = \frac{(J_0 + mR^2)v^2}{2R^2}$$

skąd:

$$v = \sqrt{\frac{2mghR^2}{J_0 + mR^2}} = \sqrt{\frac{2mgh}{\frac{J_0}{R^2} + m}}$$

Po wstawieniu momentu bezwładności walca $J_0 = \frac{1}{2}mR^2$ otrzymamy:

$$v = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$$

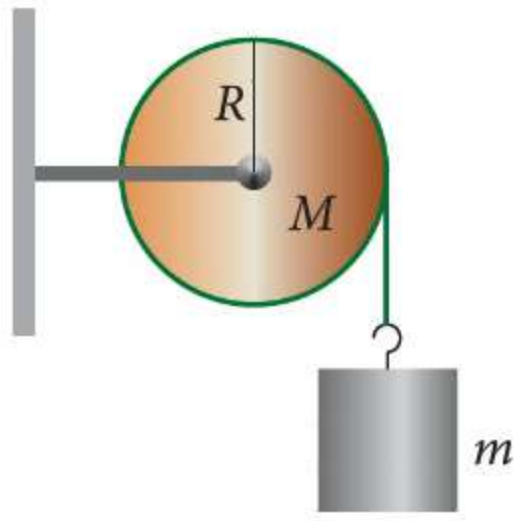
Wykaż samodzielnie, że czas, w którym walec o momencie bezwładności J_0 stoczy się bez poślizgu z równi pochyłej o wysokości h nachylonej do poziomu pod kątem α, wyraża się wzorem:

$$t = \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{2h\left(m + \frac{J_0}{R^2}\right)}{mg}}$$

Na podstawie tego wzoru wyjaśnij wynik doświadczenia (pokazującego wpływ momentu bezwładności na ruch obrotowy) opisanego na stronach 18–19 w rozdziale 3.

ZADANIA

1. Na jednorodny krążek o masie $M = 0{,}5\ \mathrm{kg}$ i promieniu $R = 0{,}05\ \mathrm{m}$ nawinięto cienką, nierozciągliwą i nieważką linkę, która nie ślizga się po krążku (rys. 8.7).
Krążek może się obracać bez oporu wokół osi przechodzącej przez jego środek i prostopadłej do powierzchni. Na lince zawieszono obciążnik o masie $m = 0{,}25\ \mathrm{kg}$ i puszczono.
Przyjmij, że $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$, i oblicz:
a) wartość przyspieszenia obciążnika,
b) wartość przyspieszenia kątowego krążka,
c) wartość siły napinającej linkę,
d) szybkość kątową krążka i szybkość liniową punktów na jego obwodzie, uzyskaną po upływie czasu $t = 2\ \mathrm{s}$ od rozpoczęcia ruchu.



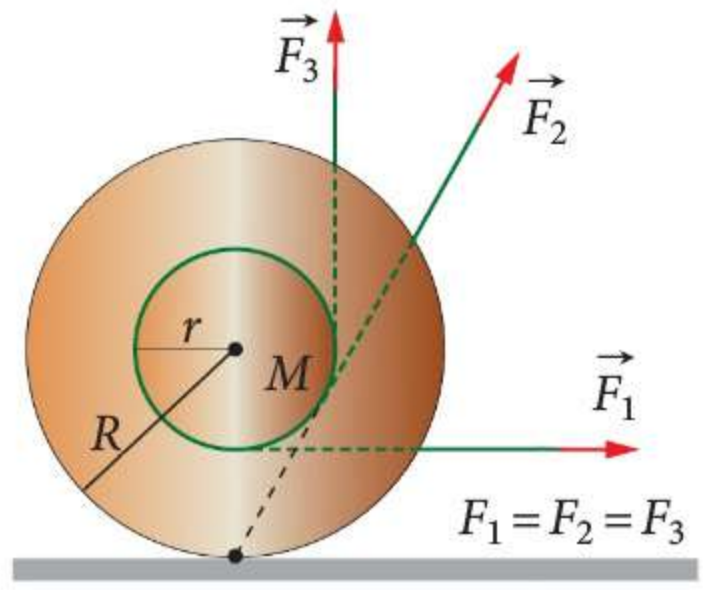
Rys. 8.7

2. Oblicz stosunek energii kinetycznej ruchu obrotowego do:
a) całkowitej energii kinetycznej,
b) energii kinetycznej ruchu postępowego
dla walca, kuli i cienkościennej obręczy, toczących się z prędkością $\vec{v}$ bez poślizgu po poziomej powierzchni. Czy wyniki zmienią się, gdy ruch będzie odbywał się wzdłuż równi? Uzasadnij odpowiedź.

3. Dwie identyczne metalowe kule staczają się bez poślizgu ze szczytu dwóch równi o takiej samej wysokości, ale o różnych kątach nachylenia do poziomu ($\alpha_1 > \alpha_2$).
Porównaj:
a) szybkości ruchu postępowego kul uzyskane u podnóża równi,
b) czasy trwania ich ruchów wzdłuż równi.

4. Czy wyniki otrzymane w poprzednim zadaniu byłyby takie same dla:
a) kul o różnych masach i jednakowych promieniach,
b) kul o jednakowych masach i różnych promieniach,
c) kul o różnych masach i różnych promieniach?
Uzasadnij odpowiedź.

***5.** Na poziomym stole leży szpula, która może się po nim toczyć bez poślizgu (rys. 8.8).
Przeanalizuj ruch szpuli, przedstawionej na rysunku 8.8, gdy na nawiniętą na szpulę nić będzie działać:
a) siła $\vec{F}_1$,
b) siła $\vec{F}_2$,
c) siła $\vec{F}_3$.



Rys. 8.8

Wskazówka: Wyprowadź wzór na współrzędną a_x przyspieszenia liniowego środka masy szpuli oraz na wartość siły tarcia $\vec{T}$. Przedyskutuj warunki, jakie muszą spełniać wartości sił: $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$, aby szpula toczyła się bez poślizgu. Czy w każdym przypadku szpula będzie się toczyła?



Iloczyn wektorowy dwóch wektorów

Iloczyn wektorowy $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ ma następujące cechy:

- wartość $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$,
- kierunek – prostopadły do płaszczyzny, w której leżą wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$,
- zwrot – zgodny z regułą śruby prawoskrętnej.



Ruch obrotowy bryły sztywnej

W ruchu obrotowym punkty bryły poruszają się po okręgach o środkach znajdujących się na osi obrotu, do której są prostopadłe płaszczyzny tych okręgów.

Kinematyczne wielkości fizyczne opisujące ruch obrotowy to:

- **szybkość kątowa średnia** $\omega_{\text{śr}} = \dfrac{\Delta\alpha}{\Delta t}$;
- **szybkość kątowa chwilowa** $\omega = \left(\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta t}\right)_{\Delta t \to 0}$, której jednostką jest radian/s $(1/\text{s})$;
- **prędkość kątowa średnia** $\vec{\omega}_{\text{śr}} = \dfrac{\Delta\alpha}{\Delta t}\vec{k}$ o wartości $\omega_{\text{śr}} = \dfrac{\Delta\alpha}{\Delta t}$, kierunku pokrywającym się z kierunkiem osi obrotu bryły i zwrocie wyznaczonym za pomocą reguły śruby prawoskrętnej (zobrazowanym przez jednostkowy wektor $\vec{k}$);
- **prędkość kątowa chwilowa** $\vec{\omega}$ o wartości $\omega = \left(\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta t}\right)_{\Delta t \to 0}$, kierunku pokrywającym się z kierunkiem osi obrotu bryły i zwrocie wyznaczonym za pomocą reguły śruby prawoskrętnej;
- **przyspieszenie kątowe średnie** $\vec{\varepsilon}_{\text{śr}} = \dfrac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}$;
- **przyspieszenie kątowe chwilowe** $\vec{\varepsilon} = \left(\dfrac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}\right)_{\Delta t \to 0}$, którego jednostką jest radian/s^2 $(1/\text{s}^2)$.

W opisie ruchu po okręgu punktu bryły, odległego o r od osi obrotu, występują wielkości liniowe: prędkość $\vec{v}$ i szybkość liniowa v oraz przyspieszenie liniowe $\vec{a}$ o wartości $a = \sqrt{a_{\text{n}}^2 + a_{\text{s}}^2}$, gdzie $a_{\text{s}} = \dfrac{|\Delta v|}{\Delta t}$ oraz $a_{\text{n}} = \omega^2 r$.

Wielkości liniowe są związane z wielkościami kątowymi związkami:

$$v = \omega r \qquad a_{\text{s}} = \varepsilon r$$



Energia kinetyczna bryły sztywnej

Energia kinetyczna bryły o masie m poruszającej się ruchem postępowym z prędkością o wartości v wyraża się wzorem $E_{\text{k}} = \dfrac{mv^2}{2}$, a energia kinetyczna bryły obracającej się z szybkością kątową ω wokół osi symetrii – wzorem $E_{\text{k}} = \dfrac{J_0\omega^2}{2}$, gdzie J_0 jest momentem bezwładności względem tej osi obrotu.

Moment bezwładności bryły (traktowanej jako układ punktów materialnych) jest równy sumie iloczynów mas poszczególnych elementów bryły i kwadratów ich odległości od osi obrotu.

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

Moment bezwładności bryły charakteryzuje jej bezwładność w ruchu obrotowym. Z definicji momentu bezwładności wynika, że ta sama bryła ma różne momenty bezwładności względem różnych osi obrotu.

Jednostką momentu bezwładności jest $1\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$.

Moment bezwładności J względem dowolnej osi O_1 równoległej do osi O, która jest osią symetrii bryły, można obliczyć za pomocą **twierdzenia Steinera**:

$$J = J_0 + md^2$$

gdzie J_0 jest momentem bezwładności względem osi O, m – masą bryły, a d – odległością między osiami O_1 i O.



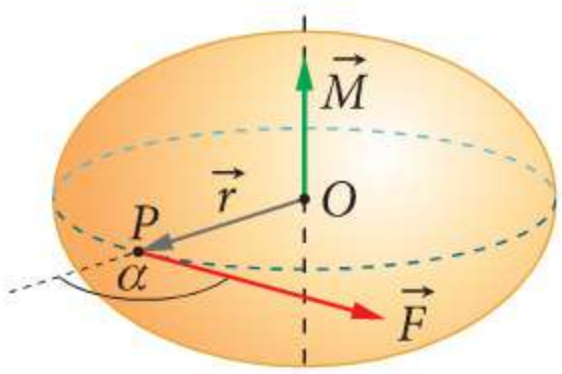
Przyczyny zmian ruchu obrotowego. Moment siły

Warunkiem wprawienia bryły w ruch obrotowy lub zmiany ruchu obrotowego jest działanie na bryłę siłą o niezerowym momencie względem osi obrotu.

Moment $\vec{M}$ siły $\vec{F}$ względem osi obrotu to iloczyn wektorowy:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Wektor $\vec{r}$ (tzw. promień wodzący punktu przyłożenia siły) ma początek w punkcie O na osi obrotu, a koniec w punkcie P przyłożenia siły.



Związek między wypadkowym momentem siły a rodzajem ruchu obrotowego przedstawiają zasady dynamiki.

Pierwsza zasada dynamiki ruchu obrotowego

Treść pierwszej zasady dynamiki ruchu obrotowego informuje, jakie warunki muszą być spełnione, aby bryła sztywna pozostawała w spoczynku lub w ruchu obrotowym ze stałą prędkością kątową.

Jeżeli suma momentów sił działających na bryłę sztywną (czyli wypadkowy moment siły względem wybranej osi obrotu) jest równa zeru, to bryła pozostaje w spoczynku lub porusza się wokół tej osi ruchem obrotowym ze stałą prędkością kątową.

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{\omega} = \mathrm{const}$$

Druga zasada dynamiki ruchu obrotowego

W treści drugiej zasady dynamiki ruchu obrotowego sformułowane są warunki zmiennego ruchu obrotowego oraz odpowiedź na pytanie, od czego zależy przyspieszenie kątowe w tym ruchu.

Jeżeli wypadkowy moment sił działających na bryłę jest różny od zera, to bryła porusza się zmiennym ruchem obrotowym z przyspieszeniem kątowym wprost proporcjonalnym do wypadkowego momentu siły. Współczynnikiem proporcjonalności jest odwrotność momentu bezwładności bryły względem wybranej osi obrotu.

$$\vec{\varepsilon} = \frac{1}{J}\vec{M} \quad \Rightarrow \quad \vec{M} = J\vec{\varepsilon}$$

Możliwe rodzaje ruchu obrotowego bryły, na którą działają siły o niezerowym momencie wypadkowym $\vec{M}_{\text{wyp}}$:

Rodzaj ruchu obrotowego	Cechy wypadkowego momentu siły
1) niejednostajnie zmienny obrotowy	$\vec{M}_{\text{wyp}} \neq \vec{0}$ i $\vec{M}_{\text{wyp}} \neq \text{const}$
• przyspieszony	zwroty $\vec{M}_{\text{wyp}}$ i $\vec{\omega}$ zgodne
• opóźniony	zwroty $\vec{M}_{\text{wyp}}$ i $\vec{\omega}$ przeciwne
2) jednostajnie zmienny obrotowy	$\vec{M}_{\text{wyp}} \neq \vec{0}$ i $\vec{M}_{\text{wyp}} = \text{const}$
• jednostajnie przyspieszony	zwroty $\vec{M}_{\text{wyp}}$ i $\vec{\omega}$ zgodne
• jednostajnie opóźniony	zwroty $\vec{M}_{\text{wyp}}$ i $\vec{\omega}$ przeciwne

Podczas obracania bryły pracę wykonuje moment siły.
Moc chwilową w ruchu obrotowym bryły wyrażamy wzorem $P = M\omega$, gdzie M jest wartością momentu siły, a ω – chwilową szybkością kątową bryły.



Równowaga bryły sztywnej

Bryła sztywna spoczywająca w wybranym układzie odniesienia jest w równowadze statycznej, jeśli są spełnione dwa warunki:

1. Siła wypadkowa wszystkich sił zewnętrznych działających na bryłę jest równa zeru.

$$\vec{F}_{\text{wyp}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{\text{zew } i} = \vec{0}$$

2. Wypadkowy moment wszystkich momentów sił zewnętrznych działających na bryłę względem dowolnie wybranej osi obrotu jest równy zeru.

$$\vec{M}_{\text{wyp}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{\text{zew } i} = \vec{0}$$



Moment pędu

Momentem pędu punktu materialnego o masie m, poruszającego się ruchem jednostajnym z prędkością $\vec{v}$ po okręgu o środku O (czyli momentem pędu punktu materialnego względem punktu O), nazywamy iloczyn wektorowy promienia wodzącego $\vec{r}$ tego punktu i jego pędu $\vec{p}$:

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} = m\vec{r} \times \vec{v}$$

Wartość wektora momentu pędu $l = rp \sin\sphericalangle(\vec{r}, \vec{p}) = mrv \sin\sphericalangle(\vec{r}, \vec{v})$.
Jeśli $\vec{r} \perp \vec{p}$, to $l = rp = mvr = m\omega r^2$.
Jednostką momentu pędu jest $1\ \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}}$.

Moment pędu bryły obracającej się względem stałej osi symetrii jest iloczynem momentu bezwładności i prędkości kątowej bryły:

$$\vec{L} = J\vec{\omega}$$

W czasie Δt zmiennego ruchu obrotowego prędkość kątowa i moment pędu bryły ulegają zmianom zgodnie ze wzorem: $\Delta\vec{L} = J\Delta\vec{\omega}$. Szybkość zmian momentu pędu bryły:

$$\frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t} = J\frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t} = \vec{M}$$

Wypadkowy moment sił działających na bryłę sztywną jest równy szybkości zmiany momentu pędu tej bryły: $\vec{M} = \frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t}$.

Związek ten to **inna postać drugiej zasady dynamiki dla ruchu obrotowego**. Wynika z niej **zasada zachowania momentu pędu**:
Jeśli wypadkowy moment sił działających na bryłę sztywną jest równy zeru, to moment pędu tej bryły nie ulega zmianie.
Zasada ta dotyczy także dowolnego układu punktów materialnych.



Analogie w opisie ruchów postępowego i obrotowego

Ruch postępowy	Ruch obrotowy
KINEMATYKA	
s	α
$v_{śr} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$	$\omega_{śr} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$
$v = \left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)_{\Delta t\to 0}$	$\omega = \left(\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}\right)_{\Delta t\to 0}$
$\vec{v}_{śr} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$	$\vec{\omega}_{śr} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}\vec{k} \quad \lvert\vec{k}\rvert = 1$
$\vec{v} = \left(\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right)_{\Delta t\to 0}$	$\vec{\omega} = \left(\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}\right)_{\Delta t\to 0}\vec{k} \quad \lvert\vec{k}\rvert = 1$
$\vec{a}_{śr} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$	$\vec{\varepsilon}_{śr} = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}$
$\vec{a} = \left(\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\right)_{\Delta t\to 0}$	$\vec{\varepsilon} = \left(\frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}\right)_{\Delta t\to 0}$
DYNAMIKA	
masa m	moment bezwładności J
siła $\vec{F}$	moment siły $\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F}$
pęd $\vec{p} = m\vec{v}$	moment pędu[4] $\vec{L} = J\vec{\omega}$
Energia kinetyczna	
$E_k = \frac{mv^2}{2}$	$E_k = \frac{J\omega^2}{2}$
Moc chwilowa	
$P = Fv$	$P = M\omega$

[4] Dla bryły sztywnej obracającej się wokół osi symetrii.

Ruch postępowy	Ruch obrotowy
I zasada dynamiki	
$\vec{F}_{\text{wyp}} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \vec{0} \quad \text{lub} \quad \vec{v} = \text{const} \neq \vec{0}$	$\vec{M}_{\text{wyp}} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{\omega} = \vec{0} \quad \text{lub} \quad \vec{\omega} = \text{const} \neq \vec{0}$
II zasada dynamiki	
$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{\text{wyp}}}{m}$	$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}_{\text{wyp}}}{J}$
Inna postać II zasady dynamiki	
$\vec{F}_{\text{wyp}} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$	$\vec{M}_{\text{wyp}} = \frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t}$
Zasada zachowania	
pędu $\vec{F}_{\text{wyp}} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = \text{const}$	momentu pędu $\vec{M}_{\text{wyp}} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \text{const}$



Toczenie: złożenie ruchów postępowego i obrotowego

Toczenie (bez poślizgu) można rozpatrywać jako:

1. złożenie ruchu postępowego z szybkością v względem podłoża i ruchu obrotowego wokół osi symetrii O z szybkością kątową $\omega = \frac{v}{R}$;
2. ruch obrotowy względem chwilowej osi obrotu A, równoległej do osi O i przechodzącej przez punkt styczności z podłożem. Podczas toczenia bez poślizgu każdy punkt bryły nieleżący na osi obrotu ma prędkość równą sumie dwóch prędkości – ruchu postępowego i ruchu obrotowego. Punkt, w którym bryła styka się w danej chwili z podłożem, ma w tej chwili względem podłoża prędkość równą zeru.

Oba sposoby opisu toczenia bez poślizgu są równoważne.

Zadania związane z toczeniem się ciał bez poślizgu możemy rozwiązywać dwoma sposobami.

1. Jeśli traktujemy toczenie bryły o promieniu R jako złożenie ruchu postępowego z prędkością równą prędkości środka masy oraz ruchu obrotowego wokół osi symetrii, to stosujemy drugą zasadę dynamiki dla obu ruchów i piszemy równania ruchu:
   - postępowego $\vec{F}_{\text{wyp}} = m\vec{a}$
   - obrotowego $\vec{M}_{\text{wyp}} = J_0\vec{\varepsilon}$

   oraz korzystamy ze związku $a = \varepsilon R$.
2. Jeśli traktujemy toczenie bryły jako ruch obrotowy wokół chwilowej osi obrotu A, to stosujemy drugą zasadę dynamiki dla ruchu obrotowego i piszemy równanie tego ruchu:

   $$\vec{M}_{\text{wyp}} = J_{\text{A}}\vec{\varepsilon}$$

   oraz korzystamy ze związku $a = \varepsilon R$.
   Moment bezwładności bryły względem osi chwilowej $J_{\text{A}} = J_0 + mR^2$.

Podczas toczenia bez poślizgu siła tarcia statycznego $T_{\text{s}} < fF_{\text{N}}$ i $v = \omega R$. Siła tarcia nie wykonuje pracy, więc energia mechaniczna jest w tym ruchu zachowana.
Podczas toczenia z poślizgiem siła tarcia kinetycznego $T_{\text{k}} = fF_{\text{N}}$ i $v > \omega R$.

ZADANIA POWTÓRZENIOWE

1. Kołową tarczę wprawiono w ruch wokół osi prostopadłej do tarczy i przechodzącej przez jej środek. W czasie $10\ \mathrm{s}$ od rozpoczęcia ruchu tarcza poruszała się ruchem jednostajnie przyspieszonym, w czasie kolejnych $40\ \mathrm{s}$ – ruchem jednostajnym, a następnie przez $20\ \mathrm{s}$ – ruchem jednostajnie opóźnionym do zatrzymania. Podczas ruchu jednostajnie przyspieszonego tarcza wykonała 25 obrotów.

1.1. Wskaż poprawne dokończenie zdania.
Przyspieszenie kątowe tarczy w ruchu jednostajnie przyspieszonym miało wartość

A. $\frac{1}{2}\pi\ \mathrm{rad/s^2}$ **B.** $\pi\ \mathrm{rad/s^2}$ **C.** $\frac{3}{2}\pi\ \mathrm{rad/s^2}$ **D.** $2\pi\ \mathrm{rad/s^2}$

1.2. Narysuj wykres zależności szybkości kątowej tarczy od czasu podczas całego ruchu.

1.3. Oblicz średnią szybkość kątową tarczy podczas całego ruchu.

1.4. Przepisz tekst do zeszytu z poprawnymi uzupełnieniami wybranymi spośród A–C oraz 1–3.
Związek między wartościami momentów sił M_1 i M_2 działających na tarczę podczas ruchu jednostajnie przyspieszonego i jednostajnie opóźnionego przedstawia relacja **A / B / C**, a związek między wartościami przyspieszeń kątowych tarczy w tych ruchach przedstawia relacja **1 / 2 / 3**.

A. $M_1 = 2M_2$ **B.** $M_1 = M_2$ **C.** $M_1 = \frac{1}{2}M_2$

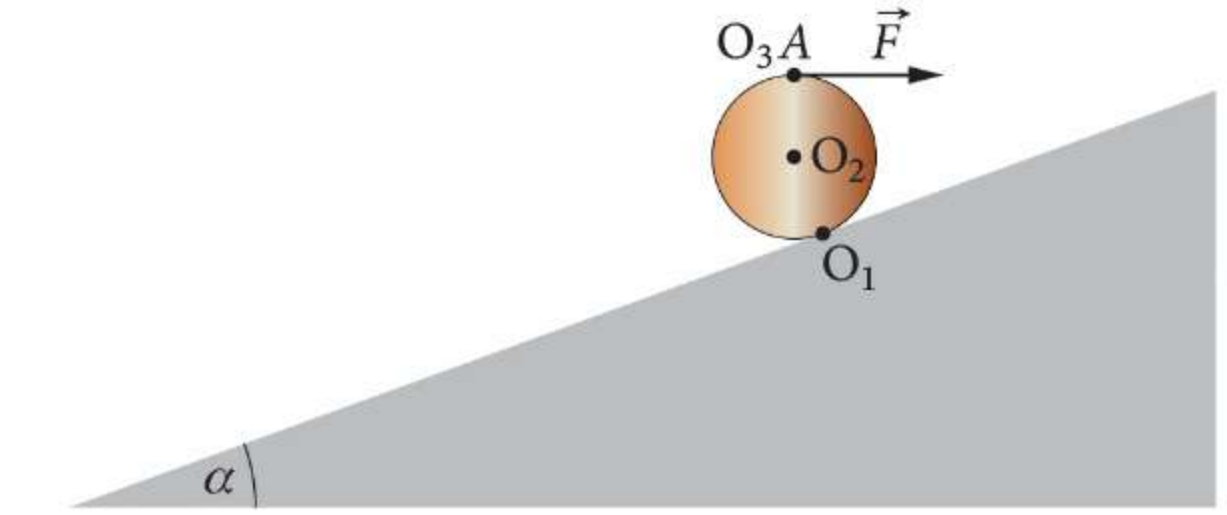
1. $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\varepsilon_2$ **2.** $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ **3.** $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_2$

2. Aby otworzyć metalowe pudełko, wsunięto koniec noża w wąską szczelinę między brzegiem pokrywki a ścianką. Na drugi koniec noża działano siłą $\vec{F}$ o wartości $12\ \mathrm{N}$ tak, jak pokazuje rysunek. Grubość ścianki pudełka jest równa $2\ \mathrm{mm}$, a długość noża to $15\ \mathrm{cm}$.



a) Oblicz wartość siły, którą nóż działa na pokrywkę. Pomiń ciężar noża.
b) Sformułuj warunek uniesienia brzegu pokrywki.
c) Oblicz wartość siły, którą nóż naciska na ściankę pudełka.

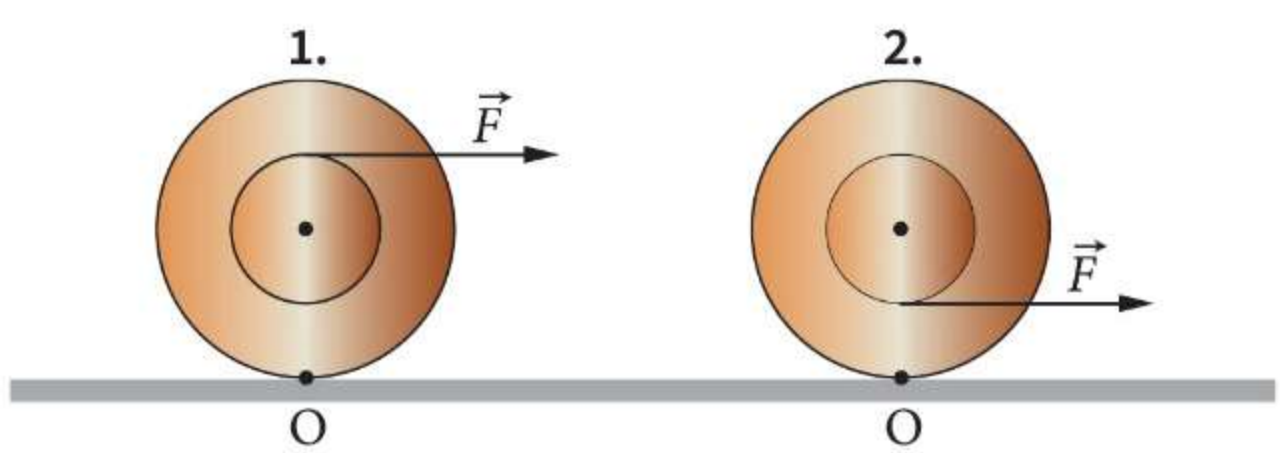
3. Na równi pochyłej, nachylonej do poziomu pod kątem α, położono walec o promieniu R z nawiniętą linką, którą ciągnięto poziomo siłą $\vec{F}$ o takiej wartości, że walec pozostawał w spoczynku (rysunek).



a) **Wymień wszystkie siły działające na walec. Rozstrzygnij, czy walec mógłby pozostawać w spoczynku, gdyby między nim a równią nie występowało tarcie. Podaj uzasadnienie.**
b) **Wymień siły, których momenty względem osi:**
   - **O_1,**
   - **O_2,**
   - **O_3 (przechodzącej przez punkt A)**

   są różne od zera, ale ich suma jest równa zeru.

4. Szpulkę z nawiniętą nicią położono na płaszczyźnie poziomej. Koniec nici ciągnięto siłą $\vec{F}$ tak, jak na rysunkach 1 i 2. W obu przypadkach szpula toczyła się bez poślizgu.

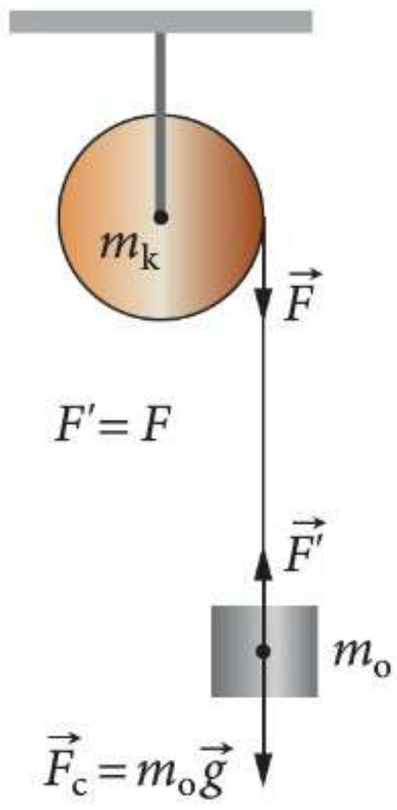


a) **Rozważ obrót szpulki względem tzw. chwilowej osi obrotu O i odpowiedz na pytanie (bez wykonywania obliczeń): *W którym przypadku wartość przyspieszenia a środka masy szpulki była większa?* Uzasadnij odpowiedź.**
b) **Odpowiedz na pytanie dotyczące ruchu postępowego szpulki: *W którym przypadku wartość siły tarcia między szpulką a podłożem była większa?* Uzasadnij odpowiedź. Skorzystaj z odpowiedzi w punkcie a zadania.**

5. Kula i walec o jednakowych masach wtaczają się bez poślizgu na równię pochyłą. Szybkości liniowe środków masy obu brył u podstawy równi są jednakowe.
Oceń prawdziwość zdań opisujących ruch brył. Wskaż P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F, jeśli jest fałszywe.

1.	Siły tarcia działające na wtaczające się bryły są zwrócone w górę równi.	**P**	**F**
2.	Wartości sił tarcia działających na bryły są jednakowe, jeśli ich masy są takie same.	**P**	**F**
3.	Energie kinetyczne kuli i walca u podstawy równi są jednakowe.	**P**	**F**
4.	Kula i walec wtoczą się na taką samą wysokość.	**P**	**F**
5.	Wartość przyspieszenia środka masy kuli jest większa niż wartość przyspieszenia środka masy walca.	**P**	**F**
6.	Czas ruchu kuli wzdłuż równi jest krótszy niż czas ruchu walca.	**P**	**F**

6. W chwili początkowej układ złożony z obciążnika o masie m_o zawieszonego za pomocą nieważkiej, nierozciągliwej nici na krążku o masie $m_k = 4m_o$ (rysunek) znajdował się w spoczynku. Wiadomo, że po zwolnieniu obciążnika krążek obracał się ruchem jednostajnie przyspieszonym. Można powiedzieć, że obciążnik rozpędzał krążek przez działanie nań siłą $\vec{F}$ i wykonał w czasie t pracę W.



a) Wykaż, że $W = \frac{m_o g^2}{9} \cdot t^2$. Skorzystaj ze wzoru $W = M\alpha$ (gdzie M jest wartością momentu siły $\vec{F}$, natomiast α kątem obrotu krążka).

b) Wykaż, że obciążnik wykonał pracę W kosztem ubytku swojej energii mechanicznej w czasie t.

7. Człowiek o masie m stoi na brzegu nieruchomej, poziomej tarczy o promieniu R, która może się obracać bez tarcia wokół pionowej osi przechodzącej przez jej środek. Moment bezwładności tarczy względem tej osi jest równy J. W pewnej chwili człowiek zaczyna wędrówkę po obwodzie tarczy z prędkością $\vec{v}$ względem niej. Człowieka traktujemy jako punkt materialny.

a) Wyjaśnij, dlaczego moment pędu układu tarcza–człowiek nie uległ zmianie, gdy człowiek rozpoczął wędrówkę.

b) Wyraź odpowiednimi wzorami wartości prędkości kątowych tarczy (ω_t) i człowieka (ω_{cz}) w układzie obserwatora z zewnątrz.

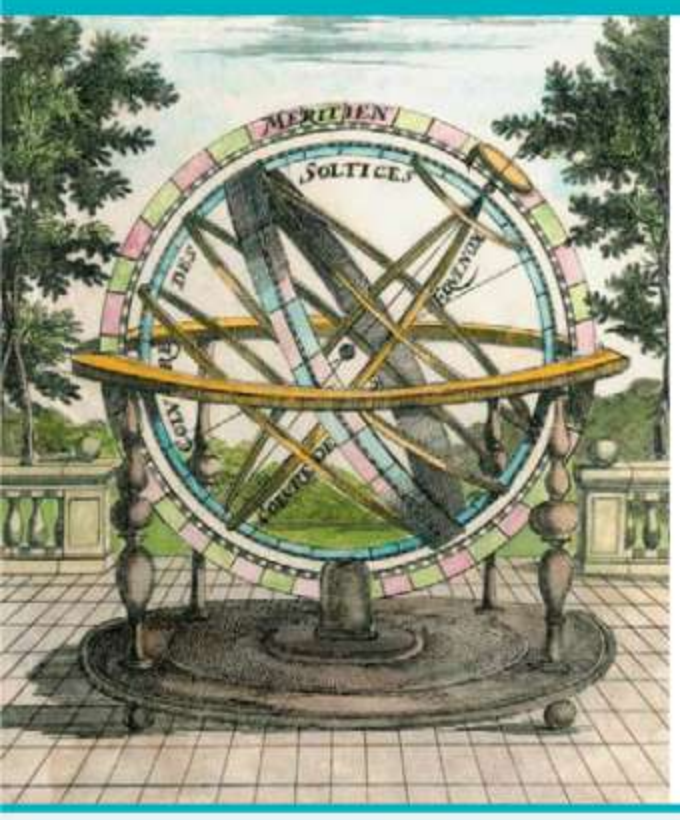
c) Podaj przyczynę zmian momentów pędu poszczególnych części układu.



POLE GRAWITACYJNE

- Prawo grawitacji Newtona
- Prawa Keplera
- Opis pola grawitacyjnego
- Pierwsza i druga prędkość kosmiczna
- Przeciążenie, niedociążenie, nieważkość





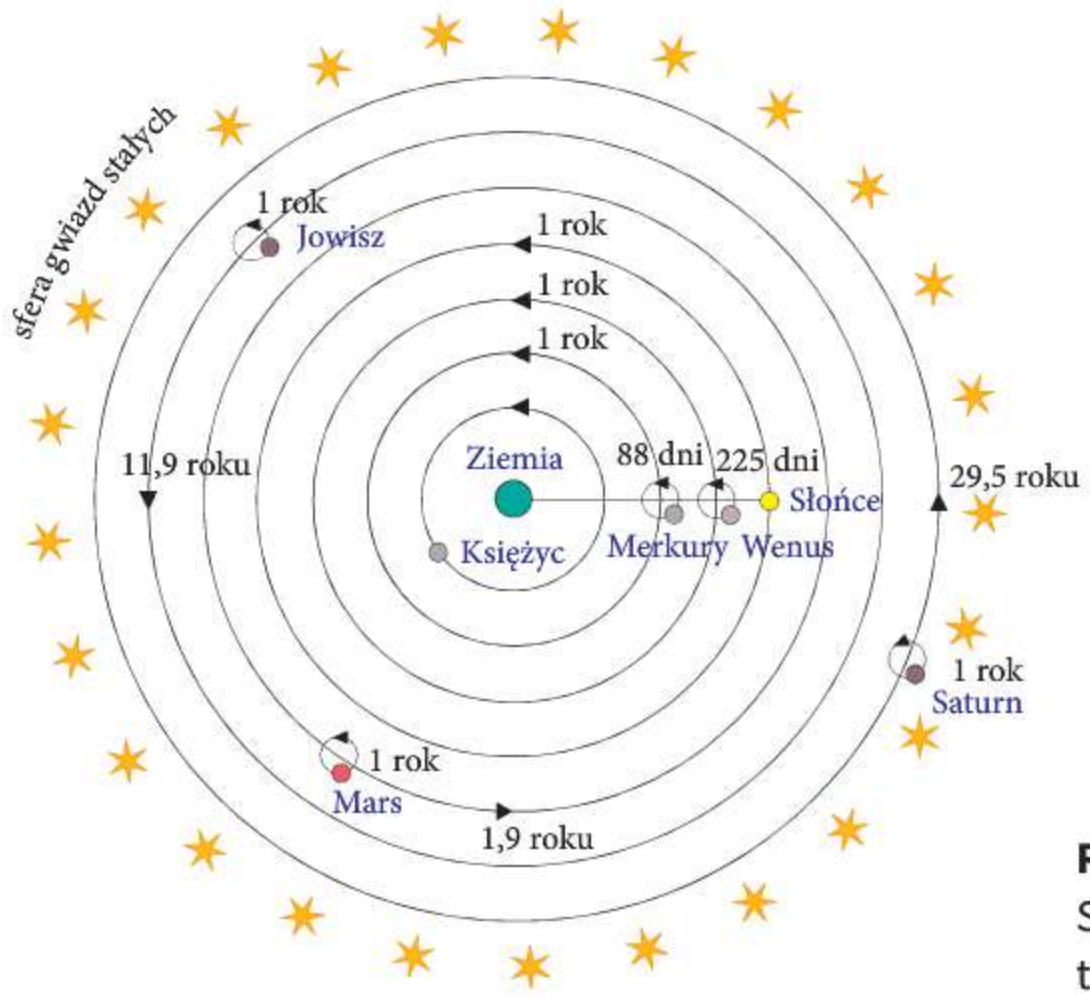
9. O odkryciach Kopernika i Keplera

- Rewolucja kopernikańska
- Prawa Keplera
- Drugie prawo Keplera jako konsekwencja zasady zachowania momentu pędu

Przypomnij sobie wiadomości z geografii: o budowie Układu Słonecznego, o ruchu obrotowym Ziemi i jej ruchu obiegowym oraz o konsekwencjach tych ruchów.

Opis ruchów ciał niebieskich zawdzięczamy naszemu wybitnemu rodakowi Mikołajowi Kopernikowi (1473–1543) i niemieckiemu astronomowi Johannesowi Keplerowi (1571–1630).

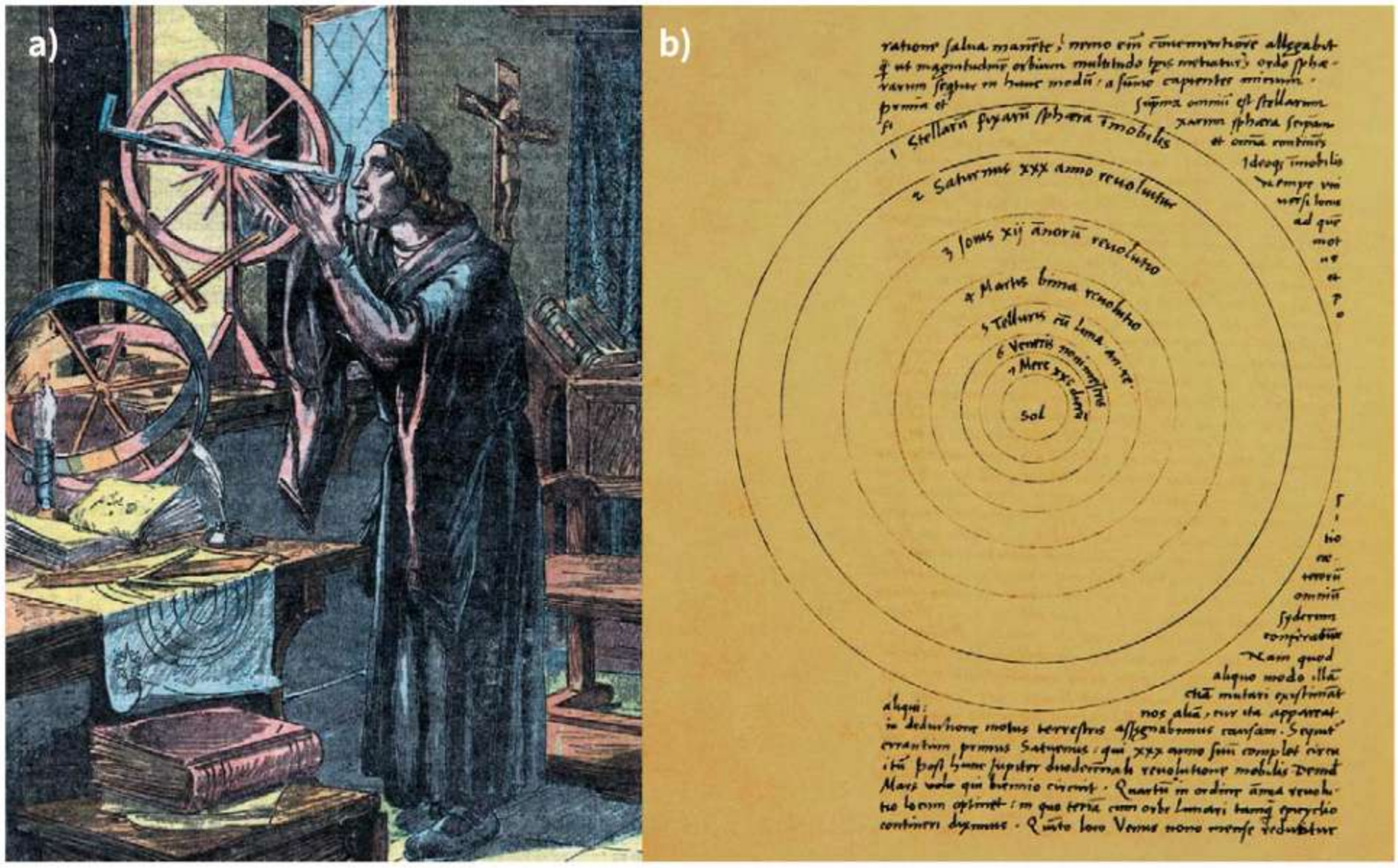
Przez 1400 lat poprzedzających tzw. rewolucję kopernikańską panowała niepodzielnie geocentryczna teoria Ptolemeusza. Zgodnie z nią sądzono, że nieruchoma Ziemia jest centrum świata i zajmuje w nim wyjątkowe, uprzywilejowane miejsce. Wokół niej miały poruszać się po okręgach Słońce, Księżyc i gwiazdy, a po bardziej skomplikowanych torach – planety (rys. 9.1).



Rys. 9.1 Tory ruchu Słońca i planet według teorii geocentrycznej

Jednak w miarę upływu czasu stwierdzano coraz większe rozbieżności między wynikami obserwacji astronomicznych a przewidywaniami teorii geocentrycznej. Mimo skomplikowanych poprawek wprowadzanych do tej teorii coraz trudniej było wyjaśniać za jej pomocą obserwowane ruchy planet.

Wielkie dzieło **Mikołaja Kopernika** (rys. 9.2a), wydane drukiem w 1543 roku pod tytułem *De revolutionibus orbium coelestium* (*O obrotach sfer niebieskich*), zasadniczo zmieniło poglądy na budowę Wszechświata. Teoria heliocentryczna stała się kluczem do zrozumienia mechaniki nieba. W myśl tej teorii Ziemia (wraz z Księżycem) i inne planety obiegają Słońce po torach, których kształt jest zbliżony do okręgów (rys. 9.2b). Ponadto Ziemia obraca się wokół własnej osi, a konsekwencją ruchu obrotowego Ziemi jest następstwo dnia i nocy.



Rys. 9.2 Mikołaj Kopernik (a) i strona z jego dzieła *De revolutionibus*… (b)

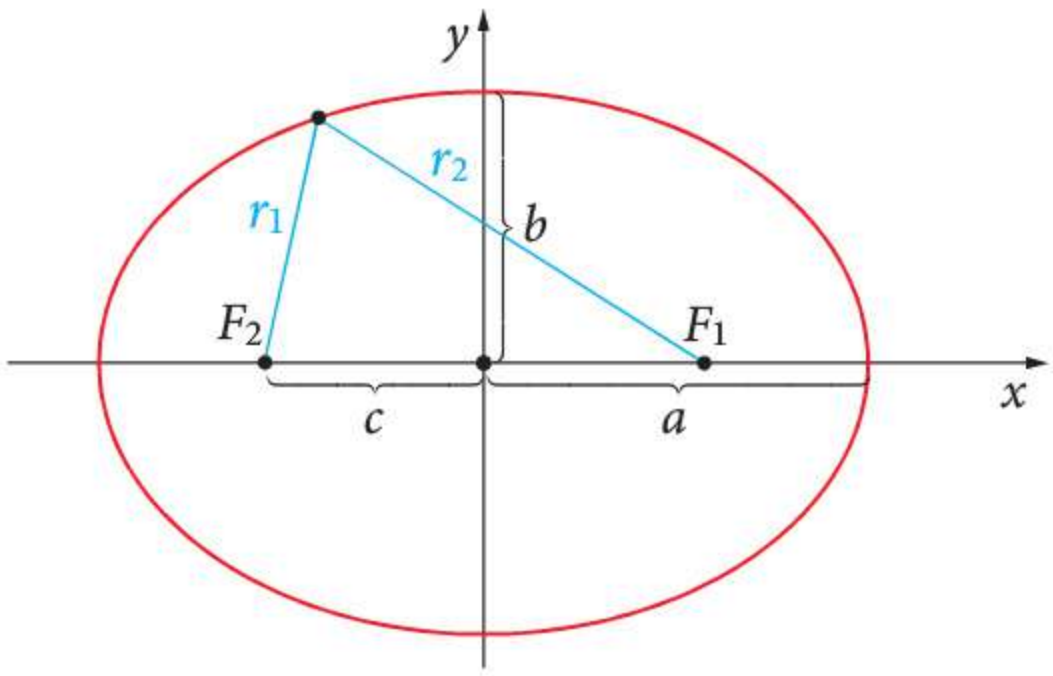
Poglądy Kopernika powoli zyskiwały coraz szersze grono zwolenników. Należał do nich Galileusz, słynny włoski fizyk, astronom i filozof. Obserwacje nieba, które prowadził przez własnoręcznie skonstruowaną lunetę, zaowocowały odkryciem (w 1610 roku) czterech księżyców Jowisza. Analiza ich ruchu utwierdziła Galileusza w przekonaniu o słuszności teorii Kopernika.

Współczesny Galileuszowi **Johannes Kepler** (rys. 9.3) na podstawie wyników wieloletnich obserwacji astronomicznych sformułował prawa rządzące ruchem planet. W dziele zatytułowanym *Astronomia nova* (*Nowa astronomia*), wydanym w 1609 roku, podał treść dwóch z tych praw.



Rys. 9.3 Johannes Kepler

Dzięki Keplerowi wiemy, że planety obiegają Słońce po elipsach (rys. 9.4).



a – wielka półoś elipsy
b – mała półoś elipsy
F_1, F_2 – ogniska elipsy
c – odległość ogniska od środka elipsy
$r_1 + r_2 = 2a$
Sprawdź, że $a^2 = b^2 + c^2$.

Rys. 9.4 Elipsa

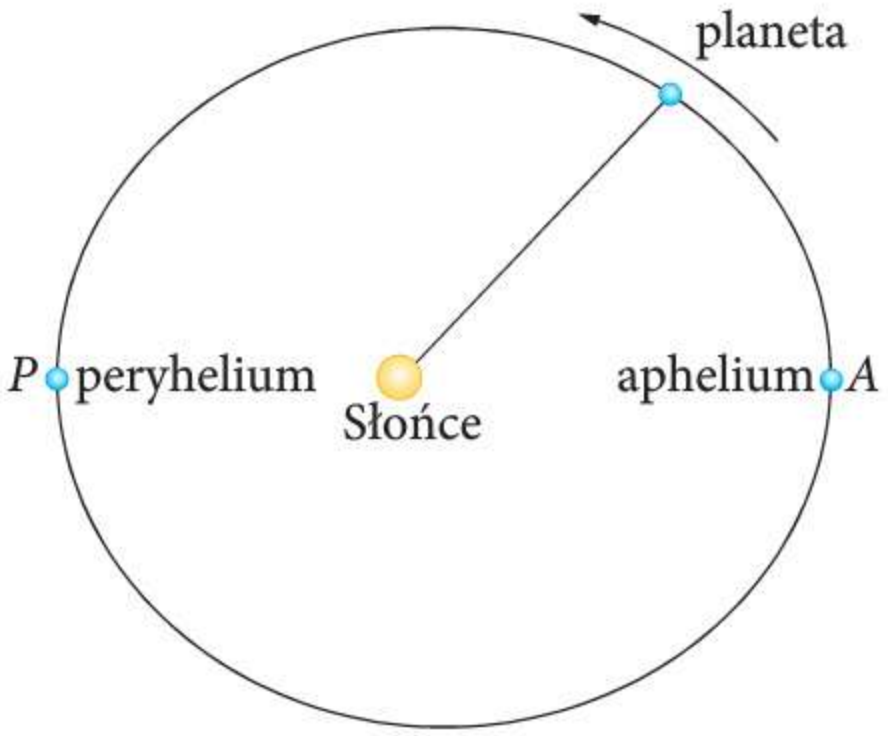
Mówi o tym **pierwsze prawo Keplera**:

> Orbita każdej planety jest elipsą. Słońce znajduje się w jednym z jej ognisk, wspólnym dla orbit wszystkich planet.

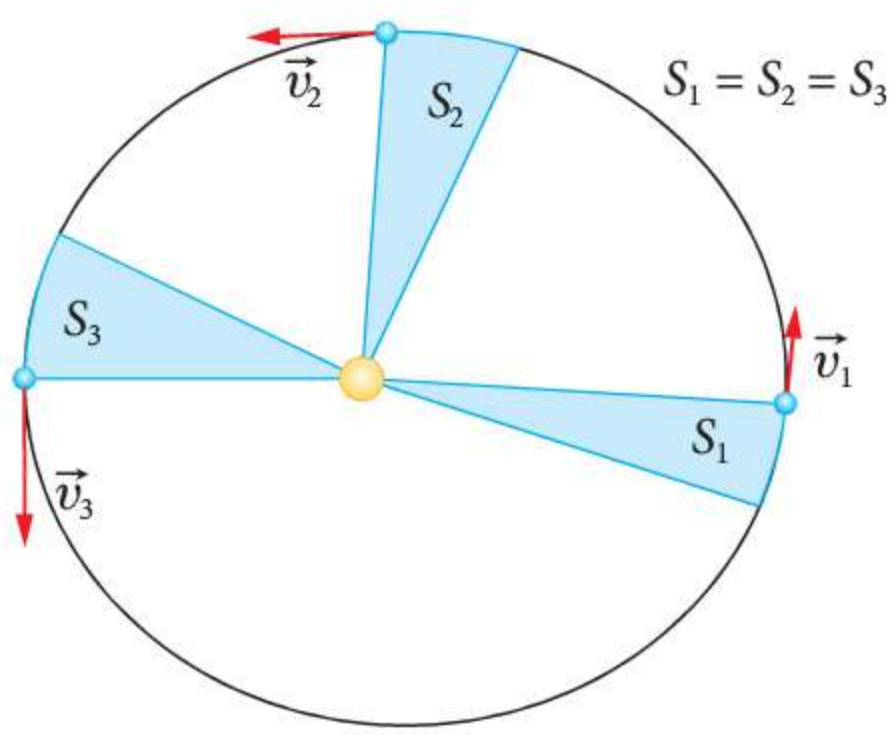
Podczas ruchu po eliptycznym torze (rys. 9.5 i 9.6) zmienia się odległość planety od Słońca i jej szybkość. Gdy planeta znajduje się najdalej od Słońca (w aphelium), jej szybkość jest najmniejsza. Natomiast najbliżej Słońca (w peryhelium) planeta porusza się najszybciej.

Tę właściwość ruchu planet opisuje **drugie prawo Keplera**:

> Promień wodzący planety (czyli odcinek łączący planetę ze Słońcem) zakreśla w jednakowych odstępach czasu figury o takich samych polach powierzchni (rys. 9.6).



Rys. 9.5 Eliptyczny tor planety



Rys. 9.6 Prędkość planety w różnych punktach toru

Trzecie prawo Keplera zostało opublikowane w 1619 roku. Kepler, szukając związku między okresami obiegu planet i ich odległościami od Słońca, odkrył, że okresy obiegu planet dalszych od Słońca są większe, przy czym:

Iloraz kwadratu okresu obiegu planety i trzeciej potęgi średniej odległości od Słońca jest jednakowy dla wszystkich planet Układu Słonecznego.

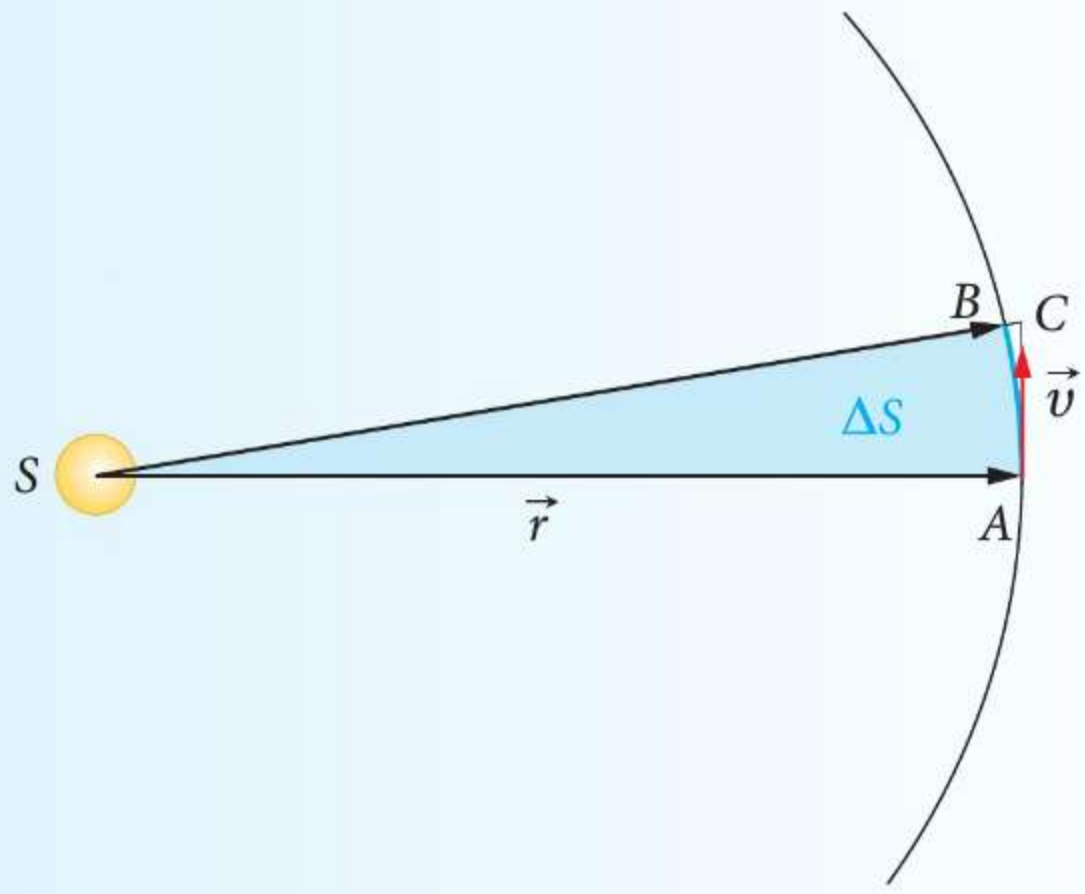
$$\frac{T^2}{r^3} = \text{const}$$

Trzecie prawo Keplera można stosować nie tylko do planet Układu Słonecznego, lecz także do każdego układu satelitów krążących wokół tego samego ciała (np. księżyców tej samej planety).

Przykład 9.1

Drugie prawo Keplera a zasada zachowania momentu pędu

Obliczymy pole figury SAB zakreślonej przez promień wodzący planety w bardzo krótkim czasie Δt (rys. 9.7). Planeta w początkowej chwili rozważań znajduje się w aphelium i w czasie Δt zakreśla tor AB o długości $\Delta s = v \cdot \Delta t$.



Rys. 9.7

Pole ΔS tej figury jest w przybliżeniu równe polu trójkąta prostokątnego SAC:

$$\Delta S = \frac{1}{2} r \cdot v \cdot \Delta t$$

Kierunek siły grawitacji w każdym punkcie toru planety pokrywa się z kierunkiem jej promienia wodzącego, więc moment siły grawitacji, którą Słońce działa na planetę, jest równy zeru. To znaczy, że moment pędu $\vec{L}$ planety obiegającej Słońce nie ulega zmianie podczas jej ruchu. W rozważanym przypadku wartość momentu pędu:

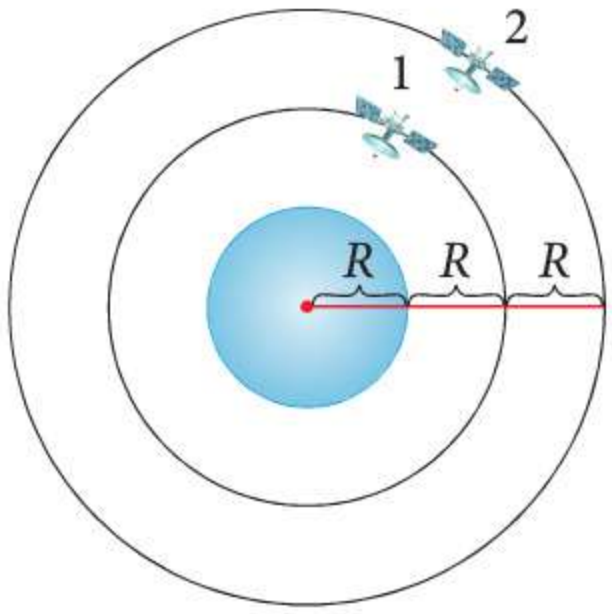
$$L = mrv \Rightarrow rv = \frac{L}{m}$$

Po uwzględnieniu powyższego związku otrzymujemy równanie: $\Delta S = \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{m} \cdot \Delta t$, z którego wynika, że skoro moment pędu planety się nie zmienia ($\vec{L} = \text{const}$), to pola powierzchni figur zakreślanych przez jej promień wodzący w jednakowych odstępach czasu są jednakowe ($\Delta S = \text{const}$).

Drugie prawo Keplera jest konsekwencją zasady zachowania momentu pędu planet obiegających Słońce.

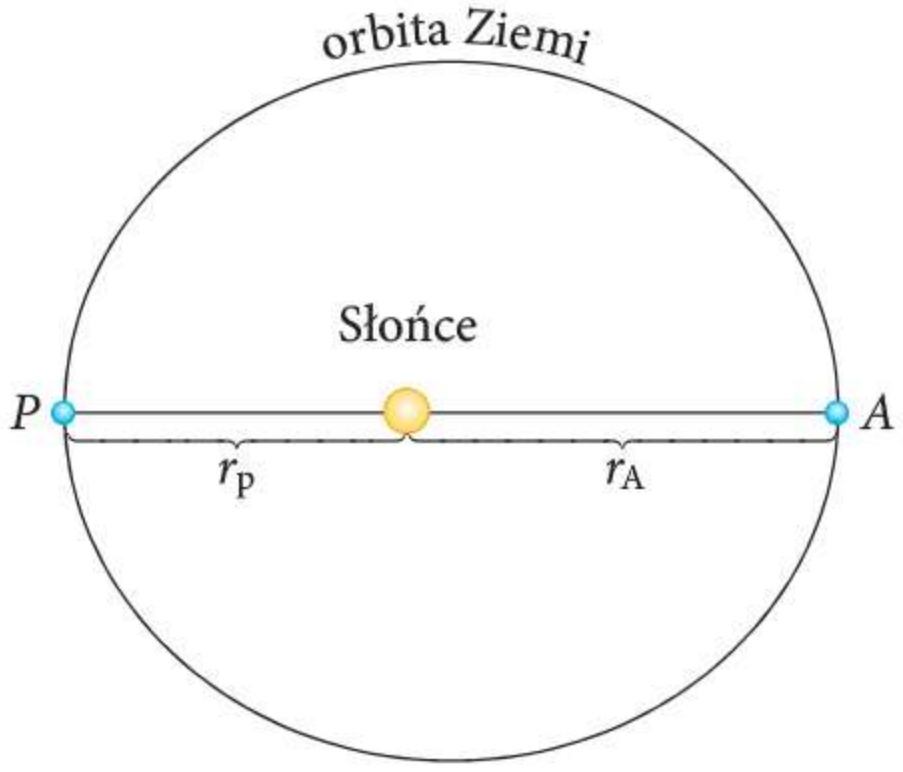
ZADANIA

1. Dwa satelity obiegają planetę po orbitach w kształcie okręgów (rys. 9.8). Oblicz stosunek okresów ruchu obiegowego tych satelitów (T_2/T_1).



Rys. 9.8

2. Ziemia obiega Słońce po elipsie (rys. 9.9). Odległości od Słońca punktów P (peryhelium) i A (aphelium), w których Ziemia znajduje się najbliżej Słońca i najdalej od niego, to: $r_P = 147{,}1$ mln km; $r_A = 152{,}1$ mln km.



Rys. 9.9

a) Oblicz iloraz wartości prędkości Ziemi w peryhelium i aphelium (v_P/v_A).
b) Nazwij ruchy, którymi Ziemia porusza się od A do P oraz od P do A.

3. Oblicz i wyraź w km/s średnią szybkość ruchu obiegowego Ziemi. Przyjmij, że:
a) eliptyczna orbita Ziemi ma długość $l = 936$ mln km, a okres obiegu $T = 365$ d 6 h 9 min 10 s.
b) orbita Ziemi jest okręgiem o promieniu $R = 150$ mln km, a okres obiegu $T = 365$ d.



10. Prawo powszechnej grawitacji

- Hipoteza Newtona o jedności świata
- Wnioski z trzeciego prawa Keplera
- Matematyczna postać prawa grawitacji
- Stała grawitacji

Przypomnij sobie wiadomości o oddziaływaniach grawitacyjnych i o sile ciężkości.

Mikołaj Kopernik i Johannes Kepler opisywali ruchy ciał niebieskich, ale nie analizowali przyczyn tych ruchów. Z dwóch istotnych pytań:

- Jak poruszają się planety?
- Dlaczego planety poruszają się po krzywoliniowych torach?

odpowiadali tylko na pierwsze. Sądzili **błędnie** – zgodnie z panującym wówczas powszechnie przekonaniem – że inne prawa przyrody rządzą zjawiskami fizycznymi na Ziemi, a inne – ruchem planet i gwiazd. Dopiero geniuszowi Isaaca Newtona zawdzięczamy niezmiernie ważną **hipotezę o jedności świata**, w którym obowiązują jednakowe prawa przyrody. Według niej takie same oddziaływania są odpowiedzialne za zachowanie ciał nie tylko na Ziemi, lecz także we Wszechświecie. Wobec tego prawa fizyki sformułowane dla otaczających nas przedmiotów można stosować również do planet i gwiazd, obiektów, których nie możemy bezpośrednio badać w doświadczeniach.

Na podstawie trzeciego prawa Keplera: $\frac{T^2}{r^3} = \text{const}$ Newton wywnioskował, że siła utrzymująca planety na orbitach powinna być odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości planety od Słońca. Jakie rozumowanie prowadzi do takiego wniosku?
Warunkiem ruchu planety o masie m z prędkością $\vec{v}$ po orbicie kołowej o promieniu r jest działanie na tę planetę siły dośrodkowej o wartości:

$$F = \frac{mv^2}{r}$$

gdzie $v = \frac{2\pi r}{T}$, zatem:

$$F = \frac{4\pi^2 mr}{T^2}$$

Aby spełnione było trzecie prawo Keplera ($T^2 \sim r^3$), wartość siły działającej na planetę musi być proporcjonalna do $\frac{1}{r^2}$.

$$F \sim \frac{1}{r^2} \Rightarrow F = C \cdot \frac{1}{r^2}$$ (gdzie C jest współczynnikiem proporcjonalności)

Wobec tego:

$$C \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{4\pi^2 mr}{T^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2 m}{C} = \text{const}$$

Newton przypuszczał, że wpływ siły ciężkości, powodującej spadanie ciał na Ziemię, rozciąga się daleko w przestrzeni. A zatem siłą dośrodkową działającą na Księżyc obiegający Ziemię tak, jak planety obiegają Słońce, jest po prostu siła ciężkości o wartości odwrotnie proporcjonalnej do kwadratu odległości od środka Ziemi. Obliczenia potwierdziły to przypuszczenie.

Newton dokonał uogólnienia i stwierdził, że wszystkie ciała przyciągają się wzajemnie, a siły działające między nimi nazwał **siłami powszechnego ciążenia** lub **siłami grawitacji**. Od czasów Newtona wiemy, że siła o tej samej naturze powoduje obieg planet wokół Słońca, obieg Księżyca wokół Ziemi i spadanie jabłka z drzewa.

Jeśli znana na Ziemi siła ciężkości, działająca na dowolne ciało, ma taką samą naturę jak siła powszechnej grawitacji, to wartość siły grawitacji musi być wprost proporcjonalna do masy ciała, na które działa; wiadomo bowiem, że wartość siły, którą Ziemia przyciąga każde ciało, jest wprost proporcjonalna do jego masy m (współczynnik proporcjonalności wynosi g). Skoro jednak oddziaływanie jest zawsze wzajemne, to wartość siły, którą ciało o masie m działa na Ziemię, musi być proporcjonalna do masy Ziemi M. Ostatecznie więc wartość siły grawitacji, którą działają na siebie wzajemnie dwa ciała o masach m_1 i m_2, to:

$$F \sim \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

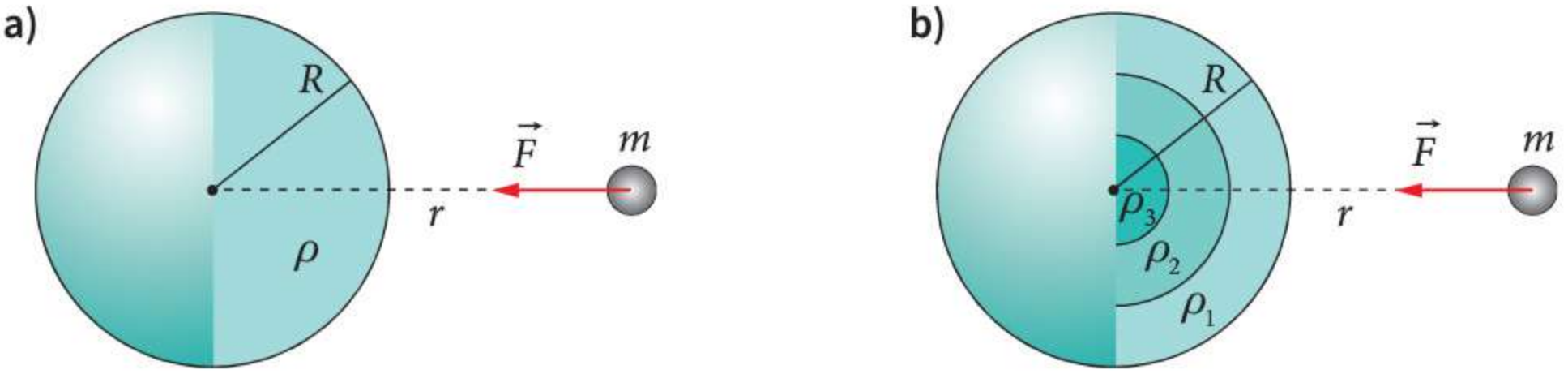
Po wstawieniu współczynnika proporcjonalności G:

$$F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad (10.1)$$

Wzór (10.1) stosuje się dla:

- **punktów materialnych** (za punkty materialne można uznać dowolne dwa ciała, gdy ich wzajemna odległość znacznie przekracza rozmiary każdego z tych ciał);
- **kul o sferycznie symetrycznym rozkładzie masy**, czyli kul jednorodnych (rys. 10.1a) lub kul, w których warstwy o różnych gęstościach są rozmieszczone symetrycznie (rys. 10.1b).

Na ciało o masie m znajdujące się w pobliżu (lub na powierzchni) kuli o sferycznie symetrycznym rozkładzie masy działa siła grawitacji $\vec{F}$ o wartości takiej, jakby cała masa kuli była skupiona w jej środku.

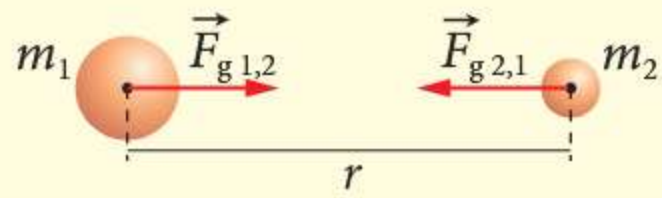


Rys. 10.1 Kule o sferycznie symetrycznym rozkładzie masy: jednorodna (a), składająca się z warstw o różnych gęstościach (b)

Treść **prawa grawitacji** wypowiadamy następująco:

Każde dwa ciała przyciągają się wzajemnie siłami grawitacji.
Wartość siły grawitacji, którą przyciągają się dwa punkty materialne lub dwie kule o sferycznie symetrycznym rozkładzie mas, jest wprost proporcjonalna do iloczynu ich mas i odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości między ich środkami.

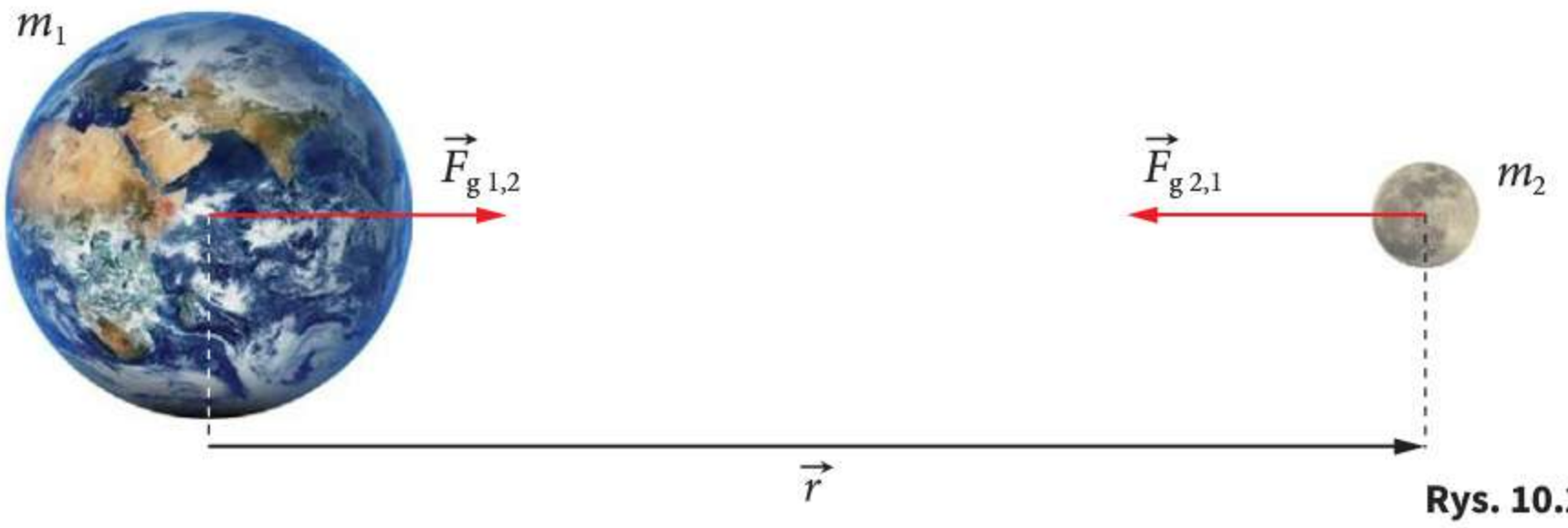
$$F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$



WIEDZIEĆ WIĘCEJ

Wzór na wektor siły grawitacji

Aby napisać wzór na wektor siły grawitacji, należy obrać wektor $\vec{r}$ tak jak na rysunku 10.2 i wartość siły, wyrażoną wzorem (10.1), pomnożyć przez wektor jednostkowy $\frac{\vec{r}}{r}$.



Rys. 10.2

$$\vec{F}_{g1,2} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \qquad \vec{F}_{g2,1} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = -\vec{F}_{g1,2}$$

Zapis taki zawiera informację, że wektor siły grawitacji leży na prostej przechodzącej przez oddziałujące ze sobą dwa punkty materialne, oraz pokazuje zwrot tego wektora.

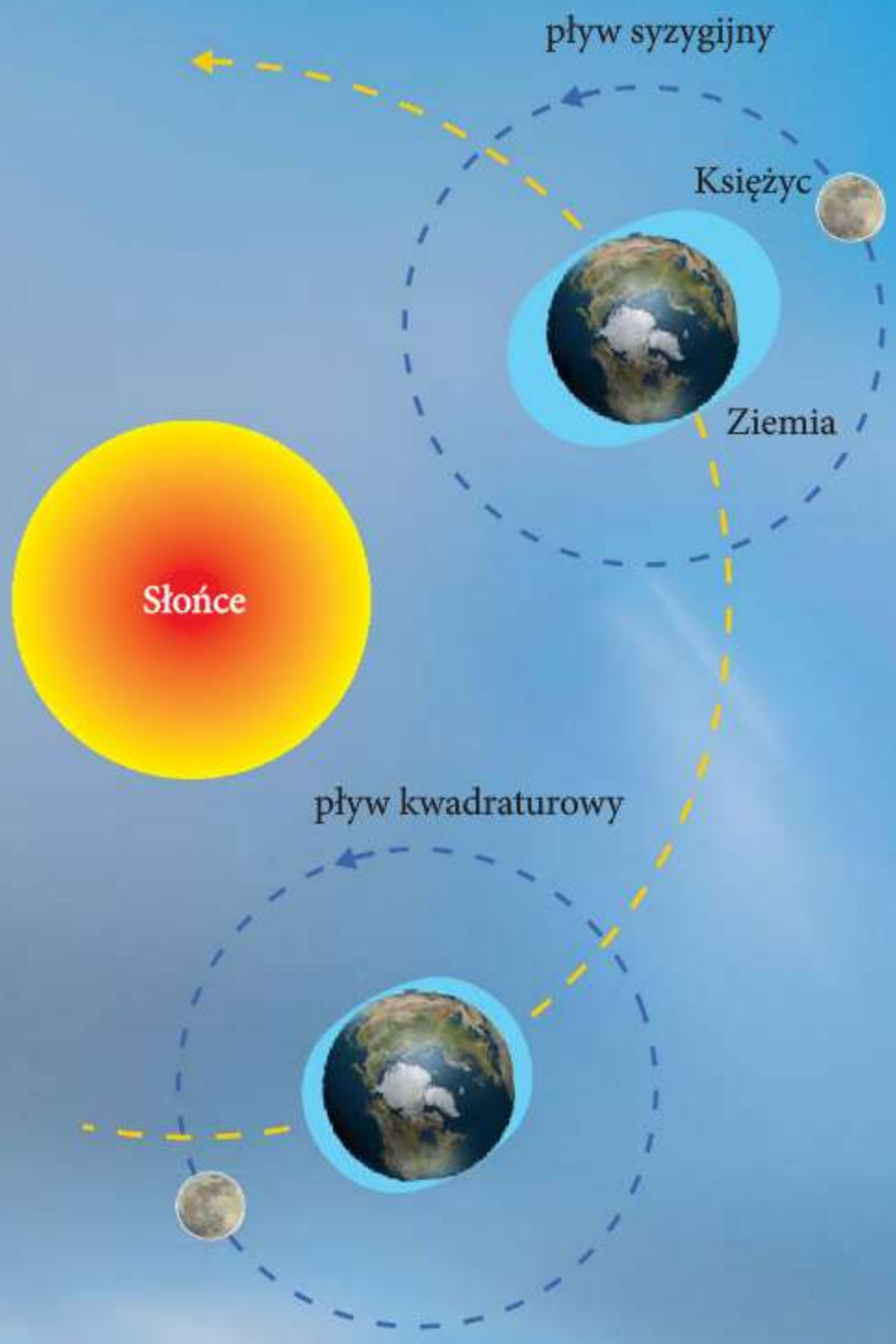
Współczynnik proporcjonalności G nosi nazwę **stałej grawitacji**. Jak wynika z pomiarów, przybliżona wartość liczbowa stałej grawitacji w SI to:

$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2}$$

Oznacza to, że dwa punkty materialne o masie 1 kg każdy, znajdujące się w odległości równej 1 m, przyciągają się wzajemnie siłami grawitacji o wartości $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N. To niewyobrażalnie mała liczba! Siła grawitacji jest więc trudna do wykrycia w przypadku ciał o niewielkich masach. Jeśli jednak masa przynajmniej jednego z przyciągających się ciał jest wystarczająco duża, to skutki działania siły grawitacji są łatwo obserwowalne. Codziennie doświadczamy skutków działania sił grawitacji pochodzących od naszej planety, zżyliśmy się z nimi i często nie zdajemy sobie sprawy, jak są one ważne dla naszej egzystencji.

Przypływy i odpływy

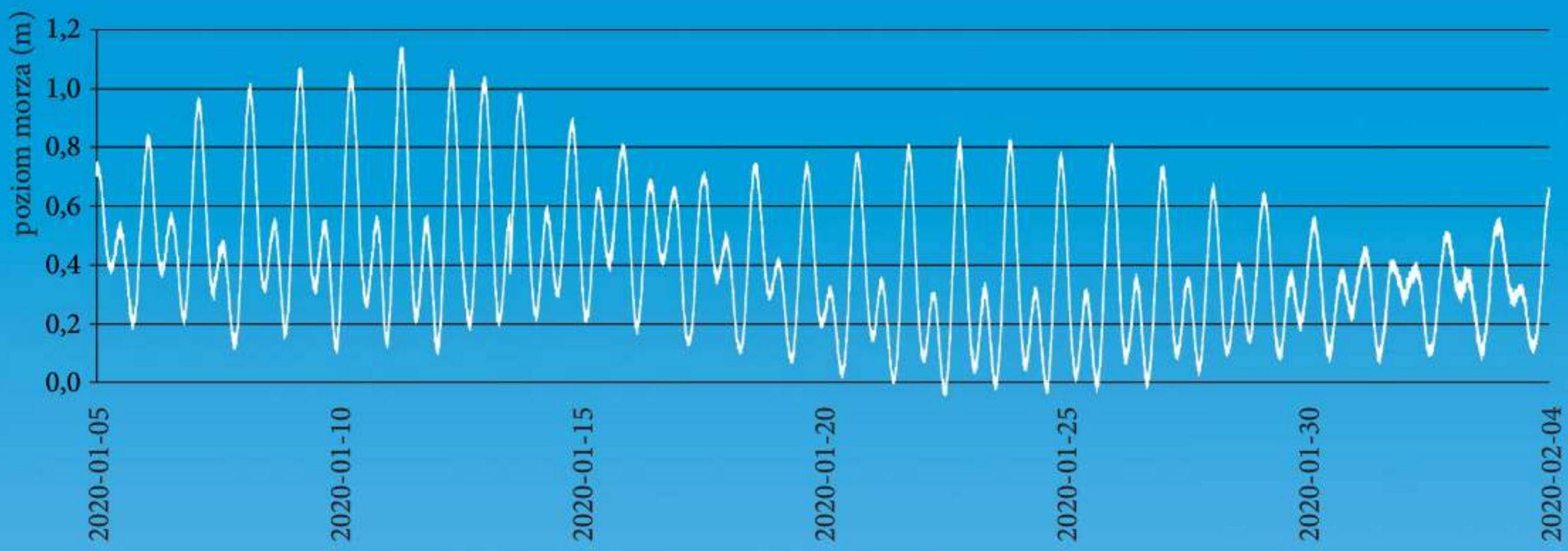
Pływy morskie od zarania dziejów wywierały wpływ na życie ludzi mieszkających w pobliżu mórz i oceanów, a także na pracę rybaków i marynarzy. Pływy morskie są stosunkowo łatwo dostrzegalne, jednak precyzyjne pomiary, m.in. z użyciem technologii GPS, wykazały, że również skorupa Ziemi ulega deformacjom pływowym.



Pływy powstają na skutek oddziaływania grawitacyjnego, którego źródłem są Księżyc i Słońce, przy czym oddziaływanie z Księżycem jest mniej więcej dwukrotnie „silniejsze" od oddziaływania ze Słońcem. Każde z tych ciał wytwarza dwie fale pływowe – po „swojej" oraz po przeciwnej stronie Ziemi. Podczas nowiu i pełni, gdy Ziemia, Księżyc i Słońce znajdują się prawie na jednej linii, pływy słoneczne sumują się z pływami księżycowymi – mamy wtedy do czynienia z najsilniejszymi pływami, tzw. pływami syzygijnymi. Z kolei w czasie pierwszej i ostatniej kwadry pływy słoneczne i księżycowe działają w przeciwne strony. Te słabsze pływy nazywane są kwadraturowymi.

Wysokość pływów zależy też od innych czynników, takich jak różna wysokość Słońca nad horyzontem zimą i latem (wynikająca z nachylenia osi obrotu Ziemi do płaszczyzny jej orbity), zmienność wysokości Księżyca nad horyzontem, eliptyczny kształt orbit Księżyca i Ziemi, siła Coriolisa i warunki lokalne (np. ukształtowanie dna morskiego). Prognozy wysokości pływów dla niektórych portów uwzględniają nawet setki komponentów o różnych okresowościach.

Przykładowy wykres wysokości pływów na Hawajach



Energia pływów

Według szacunków pływy działają na Ziemię z mocą około 3,75 TW, co jest porównywalne z globalną produkcją energii elektrycznej przez ludzkość. Źródłem energii pływów są głównie energia ruchu wirowego Ziemi oraz energia ruchu orbitalnego Księżyca. Zmniejszanie się tych energii przy równoczesnym zachowaniu całkowitego momentu pędu układu powoduje spowolnienie ruchu wirowego Ziemi w tempie ok. 2 ms/100 lat (co jest jednym z powodów wprowadzania sekund przestępnych – taką sekundę wprowadzono np. 31 grudnia 2016 roku) oraz powolne oddalanie się Księżyca od Ziemi – w tempie ok. 4 cm/rok.

Przykład 10.1

Siła grawitacji na planecie o promieniu R i gęstości ρ

Jak opisać wartość siły grawitacji, którą planeta działa na umieszczone na niej ciało, w zależności od jej promienia i średniej gęstości?

Na planecie o średniej gęstości ρ i promieniu R umieszczono ciało o masie m. Obliczymy wartość siły grawitacji działającej na to ciało.

$$F = G\frac{Mm}{R^2}$$

Masa planety:

$$M = \rho V \qquad \text{gdzie} \qquad V = \frac{4}{3}\pi R^3 \text{ – objętość planety}$$

$$F = G\frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 m}{R^2} = \frac{4}{3}\pi G m \rho \cdot R$$

$$F \sim \rho \cdot R$$

Wartość siły grawitacji działającej na planecie na ciało o masie m jest wprost proporcjonalna do iloczynu gęstości planety i jej promienia.

WIEDZIEĆ WIĘCEJ

Masa grawitacyjna. Równość masy grawitacyjnej i bezwładnej

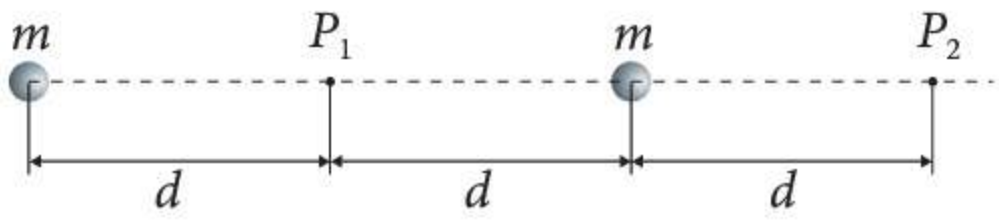
Dotychczas, gdy mówiliśmy o masie ciała, nie rozróżnialiśmy wyraźnie dwóch rodzajów mas. Jednakże bardzo uważny czytelnik mógł spostrzec, że w podręczniku fizyki do klasy pierwszej były prezentowane dwa różne podejścia do pojęcia masy.

- Pierwsze – gdy mówiliśmy o masie ciała w związku z siłą przyciągania tego ciała przez Ziemię. Porównywaliśmy masy ciał, porównując wartości sił grawitacji (wprost proporcjonalnych do mas ciał) działających na te ciała. Ten rodzaj masy to **masa grawitacyjna**. Masa grawitacyjna ciała decyduje o tym, jak silnie to ciało jest grawitacyjnie przyciągane przez inne ciało. Gdyby te same ciała przenieść na Księżyc, byłyby one tam przyciągane innymi siłami grawitacji niż na Ziemi, ale siły grawitacji byłyby tam także wprost proporcjonalne do mas grawitacyjnych tych ciał. W prawie powszechnego ciążenia występują więc masy grawitacyjne.
- Drugie – podczas omawiania zasad dynamiki Newtona. Wprowadziliśmy wówczas **masę bezwładną** związaną z własnością ciał zwaną bezwładnością. Ciała mają różne bezwładności, jeśli pod działaniem sił o takich samych wartościach (natura tych sił nie jest wcale istotna!) uzyskują różne co do wartości przyspieszenia. To ciało, które uzyskuje mniejsze przyspieszenie, ma większą bezwładność, a więc także większą masę bezwładną. Masy bezwładne ciał występują w prawach dynamiki i w zasadzie zachowania pędu.

Masę grawitacyjną i masę bezwładną fizycy uznają za jednakowe. Nie będziemy więc przy symbolu m pisać wskaźników i nazwy „masa” będziemy używać dla obu tych wielkości. Równoważność masy grawitacyjnej i bezwładnej stanowiła ważny krok na drodze do powstania ogólnej teorii względności i ma podstawowe znaczenie z punktu widzenia fizyki współczesnej.

ZADANIA

1. Odpowiedz na pytanie: *Jakim ruchem z punktu widzenia obserwatora w układzie laboratoryjnym poruszają się dwa (początkowo spoczywające) ciała, na które działają* ***tylko*** *siły wzajemnego oddziaływania grawitacyjnego?* Uzasadnij odpowiedź.
2. Odszukaj informacje o doświadczeniach, w których wyznaczono wartość liczbową stałej grawitacji. Sporządź notatkę na ten temat.
3. Skorzystaj z prawa grawitacji i bez wykonywania obliczeń odpowiedz na pytanie: *Ile razy wartość siły grawitacji działającej na ciało znajdujące się na wysokości* $h = 2R$ *nad powierzchnią Ziemi jest mniejsza od wartości siły grawitacji działającej na to ciało na powierzchni Ziemi?*
4. Oblicz promień, który musiałaby mieć ołowiana kula, aby na ciało o masie $m = 1\ \mathrm{kg}$ działała na jej powierzchni siła o wartości $F = 10\ \mathrm{N}$. Gęstość ołowiu $\rho = 11{,}3 \cdot 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$.
5. Kulki o masach $m = 1\ \mathrm{kg}$ umieszczono w odległości $2d = 1\ \mathrm{m}$ (rys. 10.3). Oblicz wartość wypadkowej siły grawitacji działającej na ciało o masie $m_0 = 1\ \mathrm{g}$, umieszczone kolejno w punktach P_1 i P_2. Narysuj wektory sił działających na to ciało z zachowaniem odpowiednich proporcji między ich wartościami.



Rys. 10.3

6. Znajdź położenie punktu, w którym należałoby umieścić ciało, aby siły przyciągania pochodzące od Ziemi i Księżyca wzajemnie się równoważyły. Przyjmij, że odległość środka Księżyca od środka Ziemi jest równa $3{,}84 \cdot 10^8\ \mathrm{m}$, a masa Księżyca stanowi $1/81$ masy Ziemi.
7. Współczesny Newtonowi poeta Alexander Pope wyraził podziw dla niezwykłego umysłu uczonego słowami:

> Natura i prawa natury skryte były w ciemności,
> Bóg rzekł: „Niech będzie Newton” i wszystko stało się światłem.

Wyjaśnij sens podanego wyżej tłumaczenia epitafium, umieszczonego na grobie Newtona w opactwie westminsterskim.



11. Pierwsza prędkość kosmiczna

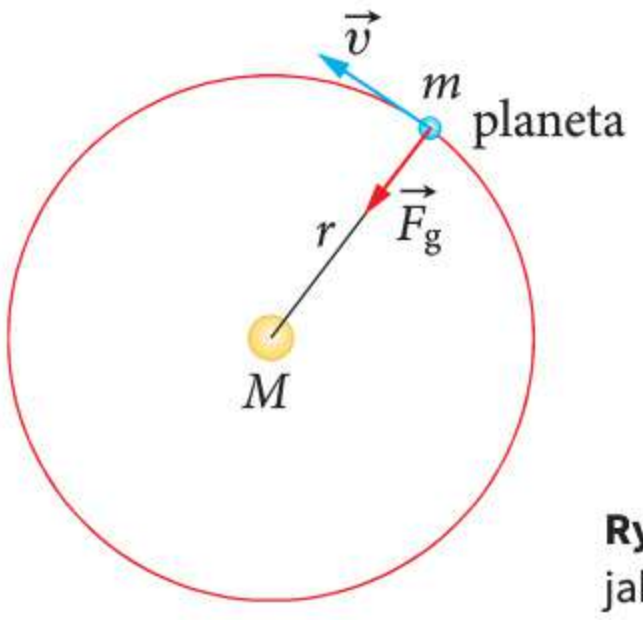
- Siła grawitacji jako siła dośrodkowa
- Prędkość satelity w ruchu po orbicie kołowej
- Pierwsza prędkość kosmiczna dla Ziemi
- O satelitach geostacjonarnych

Przypomnij sobie wiadomości o ruchu po okręgu.

Większość ruchów spotykanych w przyrodzie to ruchy krzywoliniowe, których szczególnym przypadkiem jest ruch po okręgu. Jak wiesz, po torze bardzo zbliżonym kształtem do okręgu porusza się Ziemia w swoim ruchu wokół Słońca, a także Księżyc i sztuczne satelity obiegające Ziemię.

Do utrzymania ich na orbicie niezbędne jest działanie siły dośrodkowej o wartości $F_r = \frac{mv^2}{r}$, której rolę odgrywa siła grawitacji (rys. 11.1). Oznacza to, że siła grawitacji wystarcza **tylko do zakrzywiania toru** ciała poruszającego się po okręgu.

Obliczymy stałą wartość prędkości v, z którą satelita obiega ciało centralne o masie M w odległości r od jego środka.



Rys. 11.1 Siła grawitacji jako siła dośrodkowa

$$F_g = F_r$$

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

$$v^2 r = GM$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \qquad (11.1)$$

Dla satelity Ziemi poruszającego się po okręgu tuż nad jej powierzchnią promień okręgu r jest w przybliżeniu równy promieniowi Ziemi (R_Z). W takim przypadku wartość prędkości, którą trzeba nadać satelicie w kierunku poziomym, wyraża się wzorem:

$$v_I = \sqrt{\frac{GM_Z}{R_Z}} \qquad (11.2)$$

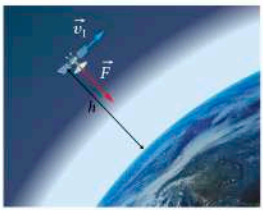
Po podstawieniu wartości liczbowych: $GM_Z = 3{,}98 \cdot 10^{14}\ \mathrm{m^3/s^2}$ oraz $R_Z = 6{,}37 \cdot 10^6\ \mathrm{m}$ otrzymujemy:

$$v_I \approx 7{,}9 \cdot 10^3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 7{,}9\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

Jest to wartość tzw. **pierwszej prędkości kosmicznej** dla Ziemi.

Pierwsza prędkość kosmiczna (dla Ziemi) to prędkość o kierunku poziomym, którą trzeba nadać ciału, aby okrążało Ziemię tuż nad jej powierzchnią.

Ze względu na obecność atmosfery satelita musi krążyć nad Ziemią na wysokości h (rys. 11.2) równej co najmniej 160 km, aby nie działały na niego siły oporu powietrza.



Rys. 11.2 Satelita obiegający Ziemię ponad atmosferą

W celu obliczenia jego szybkości musimy do wzoru (11.2) w miejsce R_Z wstawić $r = R_Z + h$.

Przykład 11.1

Siła grawitacji na wysokości h nad Ziemią

Obliczymy wartości sił grawitacji działających na ciało o masie m na Ziemi i na wysokości $h = 160$ km nad Ziemią oraz względną różnicę b między tymi wartościami. Promień Ziemi $R_Z = 6{,}37 \cdot 10^6$ m.

Wartość siły grawitacji na wysokości h:

$$F_h = \frac{GM_Z m}{(R_Z + h)^2}$$

Wartość siły grawitacji na powierzchni Ziemi:

$$F_p = \frac{GM_Z m}{R_Z^2}$$

$$b = \frac{F_p - F_h}{F_p} = 1 - \frac{F_h}{F_p} = 1 - \left(\frac{R_Z}{R_Z + h}\right)^2$$

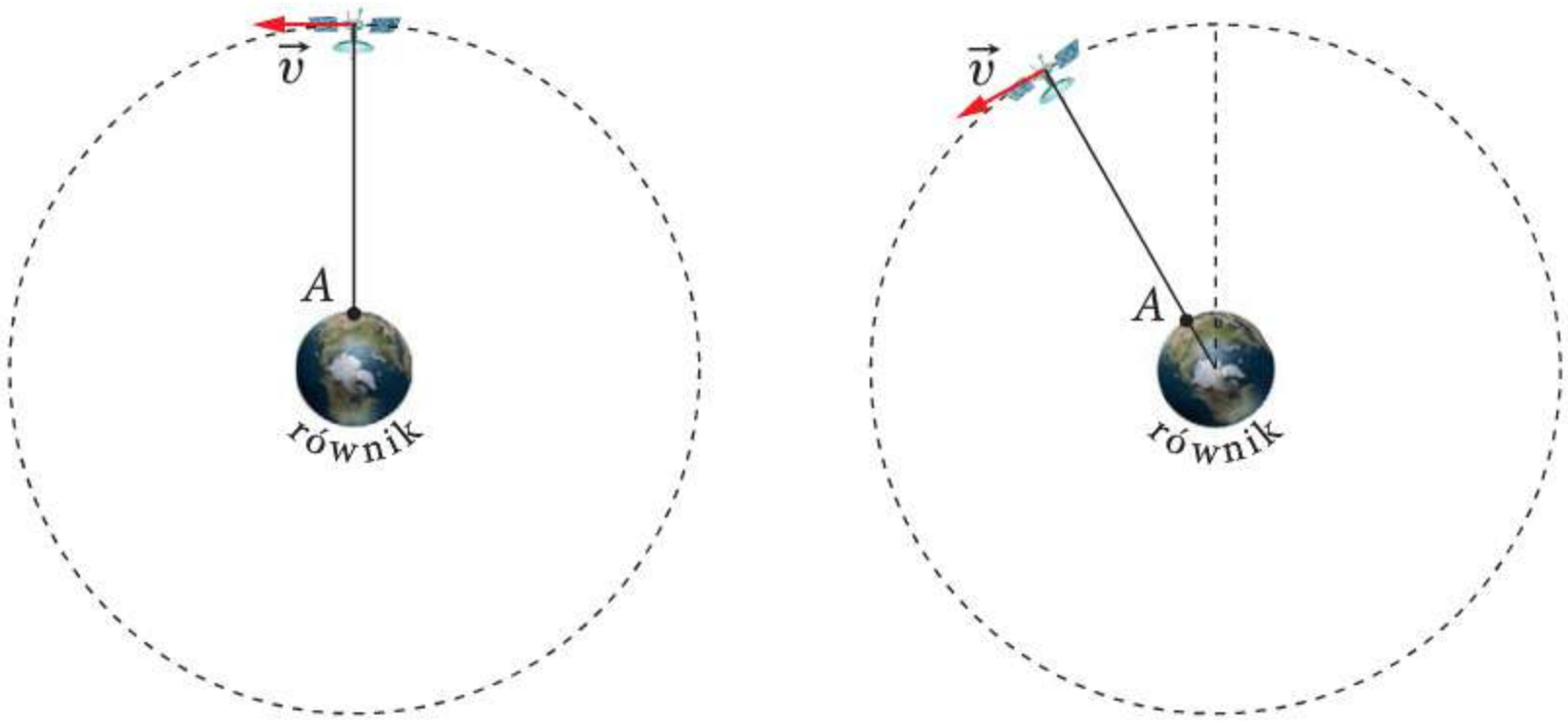
$$b = 1 - \left(\frac{6{,}37 \cdot 10^6}{6{,}37 \cdot 10^6 + 0{,}16 \cdot 10^6}\right)^2 = 1 - \left(\frac{6{,}37}{6{,}53}\right)^2 \approx 0{,}048 \qquad b \approx 4{,}8\%$$

Oblicz samodzielnie, na jakiej maksymalnej wysokości nad Ziemią względna różnica między wartościami sił grawitacji F_p i F_h nie będzie przekraczała 1%.

Z powyższego przykładu wynika, że wartość prędkości satelity obiegającego Ziemię tuż nad warstwą atmosfery (obliczona z równania $\frac{mv^2}{R_Z + h} = \frac{GM_Z m}{(R_Z + h)^2}$) nieznacznie różni się od wartości pierwszej prędkości kosmicznej.

O satelitach geostacjonarnych

W telekomunikacji, meteorologii czy telefonii satelitarnej korzysta się z satelitów geostacjonarnych. **Satelita geostacjonarny** krąży z zachodu na wschód po orbicie leżącej w płaszczyźnie równika tak, że okres jego obiegu jest równy okresowi ruchu obrotowego Ziemi, czyli jednej dobie. Wobec tego satelita geostacjonarny „wisi" stale nad tym samym punktem na równiku (rys. 11.3).



Rys. 11.3 Położenie satelity geostacjonarnego w dwóch różnych chwilach

Dzięki temu anteny telewizji satelitarnej odbierające sygnały ze specjalnego satelity geostacjonarnego mogą być ustawione na stałe w określonym kierunku (w Polsce zwraca się je na południe, odchylając lekko w górę).

Promień orbity geostacjonarnej możemy obliczyć, korzystając z wyprowadzonego wcześniej wzoru, przedstawiającego szybkość satelity na orbicie o promieniu r:

$$v = \sqrt{\frac{GM_Z}{r}} \tag{11.3}$$

oraz związku między szybkością ciała poruszającego się po okręgu o promieniu r a okresem tego ruchu:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \tag{11.4}$$

Porównujemy prawe strony wzorów (11.3) i (11.4)

$$\sqrt{\frac{GM_Z}{r}} = \frac{2\pi r}{T}$$

Otrzymane równanie przekształcamy do postaci:

$$r^3 = \frac{GM_Z T^2}{4\pi^2}$$

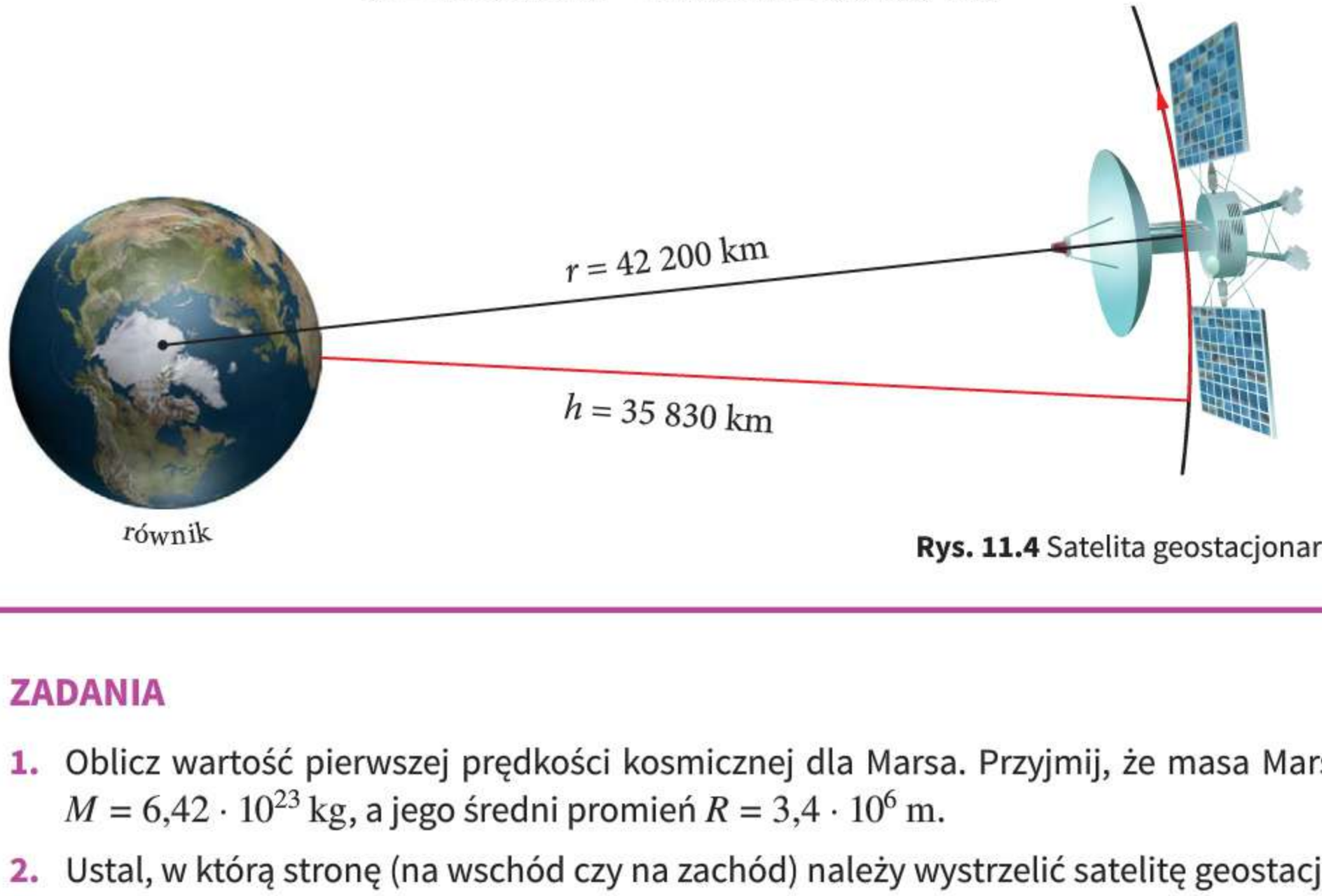
skąd:

$$r = \sqrt[3]{\frac{GM_Z T^2}{4\pi^2}}$$

Po podstawieniu wartości liczbowych: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$, $M_Z = 6 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$, $T = 23\ \mathrm{h}\ 56\ \mathrm{min} = 86\,160\ \mathrm{s}$ otrzymujemy $r \approx 42\,200\ \mathrm{km}$.

Satelita geostacjonarny obiega Ziemię po orbicie o promieniu równym ok. 42 200 km (rys. 11.4). „Wisi" on nad wybranym punktem na równiku na wysokości $h = r - R_Z$. Po podstawieniu $R_Z = 6{,}37 \cdot 10^6$ m otrzymujemy:

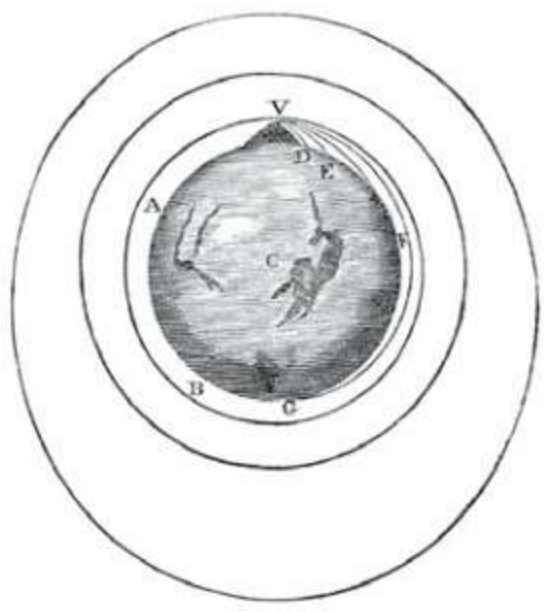
$$h = 42\,200 \text{ km} - 6370 \text{ km} = 35\,830 \text{ km}$$



Rys. 11.4 Satelita geostacjonarny

ZADANIA

1. Oblicz wartość pierwszej prędkości kosmicznej dla Marsa. Przyjmij, że masa Marsa $M = 6{,}42 \cdot 10^{23}$ kg, a jego średni promień $R = 3{,}4 \cdot 10^6$ m.
2. Ustal, w którą stronę (na wschód czy na zachód) należy wystrzelić satelitę geostacjonarnego z miejsca położonego na równiku, aby użyć do tego celu mniejszej ilości paliwa. Uzasadnij odpowiedź.
3. Newton rozważał problem ruchu wokół Ziemi ciał wystrzeliwanych poziomo z działa umieszczonego na wierzchołku hipotetycznej góry (zwanej Górą Newtona) o wysokości 1233 km. Tory ich ruchu przedstawia szkic (rys. 11.5) znajdujący się w *Matematycznych zasadach filozofii przyrody*.
   Oblicz szybkość v, którą trzeba byłoby nadać pociskowi wystrzelonemu poziomo z wierzchołka góry o wysokości 1233 km, aby obiegał Ziemię po orbicie kołowej. Przyjmij, że $GM_Z = 4 \cdot 10^{14}$ N $\cdot$ m^2/kg, a $R_Z = 6{,}37 \cdot 10^6$ m.



Rys. 11.5

4. Satelita krąży wokół planety po orbicie kołowej o znanym promieniu r. Okres obiegu satelity wynosi T. Wyprowadź wzór na masę planety.
5. Oszacuj masę Słońca. Przyjmij, że Ziemia obiega Słońce po orbicie kołowej o promieniu $r = 150$ mln km w czasie $T = 365$ dób.
6. Oblicz promień orbity Księżyca przy założeniu, że orbita Księżyca jest okręgiem, którego środkiem jest środek masy układu Ziemia–Księżyc. Przyjmij, że masa Ziemi $M_Z = 6 \cdot 10^{24}$ kg, masa Księżyca $M_K = 7{,}3 \cdot 10^{22}$ kg, a odległość środka Ziemi od środka Księżyca $d = 3{,}84 \cdot 10^5$ km.

WIEDZIEĆ WIĘCEJ



Global Positioning System (GPS)

GPS jest systemem nawigacji satelitarnej wykorzystującym komunikację radiową ze sztucznymi satelitami Ziemi w celu ustalenia dokładnego położenia oraz prędkości odbiornika.

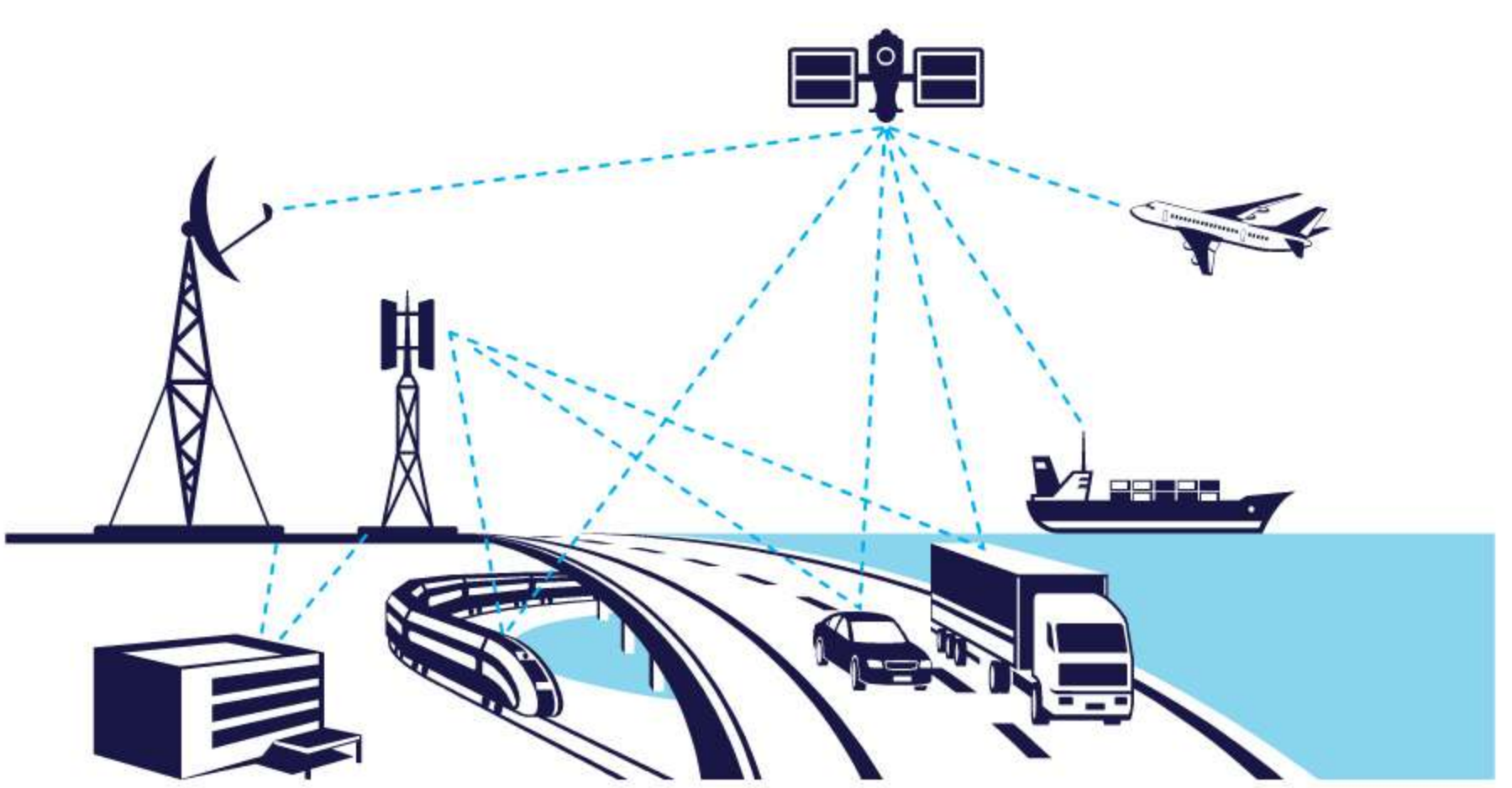
System GPS jest obecnie najczęściej stosowanym systemem nawigacyjnym. Został stworzony przez amerykański Departament Obrony w celach militarnych, a do użytku cywilnego bezpłatnie udostępniono go w latach 80. XX wieku.

Jak działa GPS?

GPS działa w każdych warunkach pogodowych, w dowolnym miejscu na świecie, 24 godziny na dobę. Opiera się na danych z satelitów, które obiegają Ziemię dwa razy na dobę po ustalonej orbicie na wysokości ok. 20 000 km nad Ziemią. Po sześciu różnych orbitach poruszają się po cztery satelity, co w sumie daje zawsze 24 działające satelity.

Na system GPS składają się trzy segmenty:

1. segment kosmiczny, który stanowią satelity orbitujące wokół Ziemi na średniej orbicie okołoziemskiej;
2. segment naziemny, czyli naziemne stacje kontrolne i monitorujące;
3. segment użytkownika – odbiorniki sygnałów.



Odbiornik GPS wyznacza odległość do każdego z widzianych satelitów na podstawie pomiaru czasu, w którym fala radiowa rozchodząca się z szybkością światła przebyła odległość satelita–odbiornik. Dzięki jednoczesnym pomiarom odległości z kilku kolejnych satelitów odbiornik może ustalić pozycję użytkownika i ją zanalizować. Aby obliczyć szerokość i długość geograficzną, odbiornik potrzebuje połączenia z dwoma satelitami. Połączenie z czterema lub więcej satelitami pozwala określić tzw. pozycję trójwymiarową (szerokość, długość i wysokość). Lokalizator GPS czy nawigacja samochodowa komunikują się z satelitami natychmiast po włączeniu urządzenia i powinny osiągać dokładność ok. 10 metrów.



12. Natężenie pola grawitacyjnego

- Pole sił
- Jak badamy pole grawitacyjne?
- Graficzny obraz pola grawitacyjnego
- Od czego zależy natężenie pola grawitacyjnego?
- Natężenie pola a przyspieszenie grawitacyjne
- Zasada superpozycji natężeń pól

Przypomnij sobie wiadomości o oddziaływaniach na odległość.

Aby opisać oddziaływania niewymagające wzajemnego kontaktu ciał, tzw. oddziaływania na odległość, posługujemy się pojęciem **pola sił**. Mówimy, że wokół Ziemi panuje **pole grawitacyjne**, wokół naelektryzowanego ciała – **pole elektrostatyczne**, a wokół magnesu, przewodnika z prądem lub poruszającej się naładowanej cząstki – **pole magnetyczne**.

Oznacza to, że Ziemia, naelektryzowane ciało czy np. magnes nadają przestrzeni specjalne właściwości, polegające na działaniu odpowiedniego rodzaju sił na określone ciała:

- sił grawitacji na ciała posiadające masę,
- sił elektrycznych na ciała naelektryzowane,
- sił magnetycznych na magnesy, poruszające się cząstki naładowane i przewodniki z prądem,

czyli wytwarzają w otaczającej je przestrzeni **pola sił**. Są ich **źródłami**. Ziemia jest źródłem pola grawitacyjnego, więc w przestrzeni otaczającej Ziemię każde ciało masywne będzie przez nią przyciągane. Naelektryzowane ciała są źródłami pól elektrostatycznych, w których inne naelektryzowane ciała będą przyciągane lub odpychane. Magnes, przewodnik z prądem lub poruszająca się naładowana cząstka to źródła pól magnetycznych.

Dla oddziaływań niezależnych od czasu (statycznych) pojęcie pola można byłoby uważać za pomocnicze. Dopiero dla zmiennych pól elektromagnetycznych, o których będzie mowa w podręczniku do klasy trzeciej, staje się oczywiste, że **pola stanowią formę materii niosącą energię i pęd**.

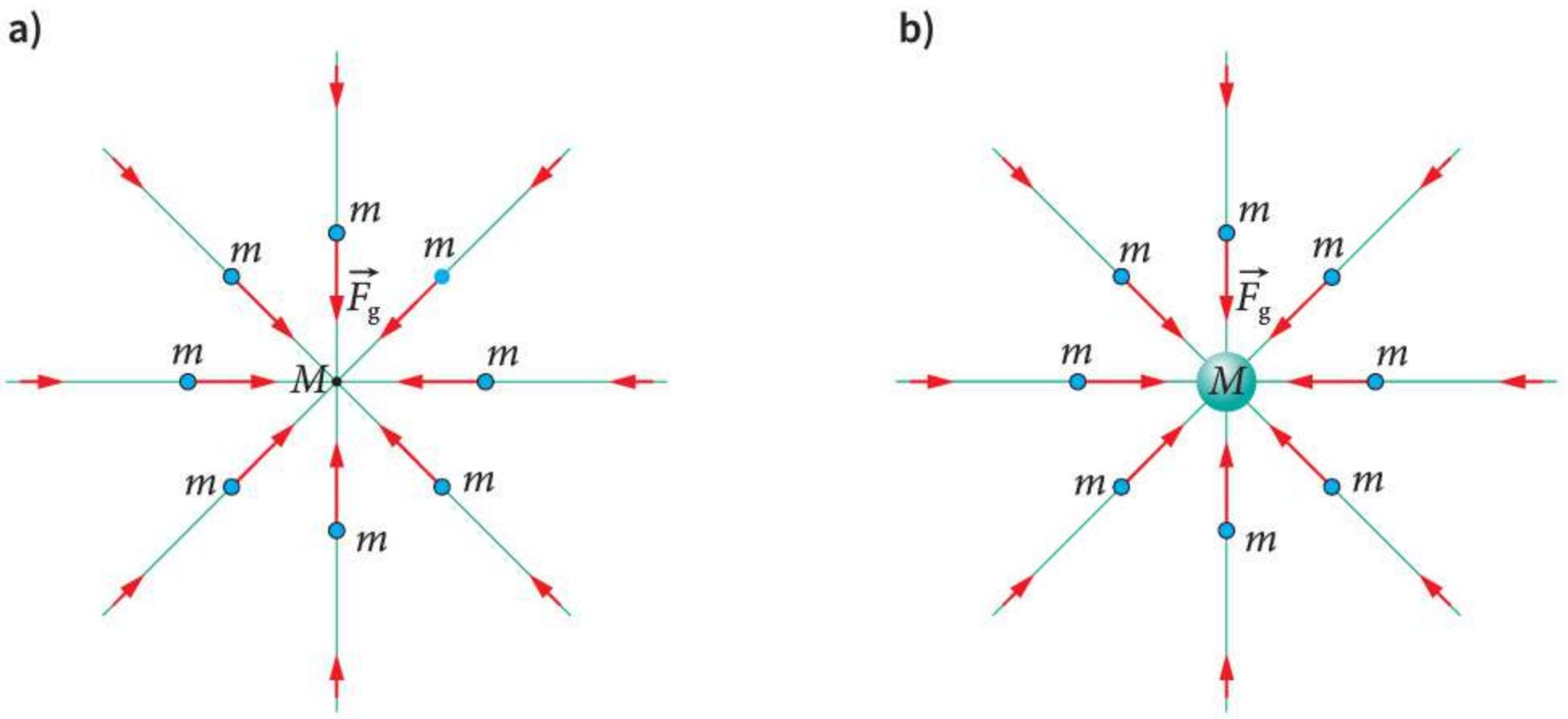
Od tej chwili będziemy konsekwentnie opisywać wszystkie oddziaływania na odległość, stosując pojęcie pola. W tym rozdziale zajmiemy się bliżej polem grawitacyjnym, które jest wytwarzane przez każde ciało masywne.

Łatwo się domyślić, że pola grawitacyjne wytwarzane przez różne źródła nie są jednakowe; wyczuwamy intuicyjnie, że pole grawitacyjne Słońca „jest silniejsze” niż pole

grawitacyjne Ziemi, ponieważ masa Słońca jest znacznie większa od masy Ziemi. Czy jednak pole grawitacyjne Słońca jest w całej przestrzeni jednakowo „silne"? W jaki sposób można porównywać pola grawitacyjne wytworzone przez różne źródła lub pole grawitacyjne wytworzone przez to samo źródło, ale w różnych miejscach przestrzeni? Na te pytania odpowiemy w tym rozdziale.

Istnienie pola grawitacyjnego można wykryć za pomocą innego ciała o masie m, które będzie służyło do badania tego pola jako swoisty „przyrząd pomiarowy". Ciało to nazywamy **ciałem próbnym**, a jego masę – **masą próbną**. Ponieważ będziemy badać pole grawitacyjne w różnych punktach przestrzeni, ciało próbne musi być także „punktowe", tzn. tak małe, abyśmy mogli pominąć jego rozmiary.

W celu graficznego przedstawienia pola grawitacyjnego posługujemy się w fizyce pojęciem **linii pola**. Są to linie pokazujące w każdym punkcie kierunek i zwrot wektora siły grawitacji działającej na ciało próbne umieszczone w tym punkcie.
Pole wytworzone przez ciało punktowe (rys. 12.1a) lub kuliste (rys. 12.1b) jest **polem centralnym**.



Rys. 12.1 Pola centralne: punktu materialnego (a), jednorodnej kuli (b)

Pole wytworzone przez ciało o dowolnym kształcie nie jest centralne, ale wraz ze wzrostem odległości od źródła (o skończonych rozmiarach) wytwarzającego to pole staje się ono coraz bardziej zbliżone do pola centralnego.

Aby zbadać pole grawitacyjne, którego źródłem jest ciało kuliste o masie M, np. Ziemia, musimy w wybranym dowolnie punkcie przestrzeni umieścić ciało próbne i zmierzyć np. siłomierzem wartość siły grawitacji, która w tym miejscu na nie działa. Czy ta siła charakteryzuje pole grawitacyjne w tym punkcie? Inaczej mówiąc, czy stanowi ona istotną cechę tego punktu pola? Proste rozumowanie doprowadza nas do negatywnej odpowiedzi na to pytanie. Gdybyśmy do zbadania pola w tym samym punkcie posłużyli się ciałem próbnym o innej masie, np. dwa razy mniejszej, to – zgodnie z pra-

wem grawitacji – siła działająca na nie byłaby dwa razy mniejsza. Siła grawitacji nie charakteryzuje pola w danym punkcie, ponieważ zależy nie tylko od pola, lecz także od masy ciała próbnego. Gdybyśmy jednak podzielili siłę grawitacji przez masę ciała próbnego, to obliczony iloraz $\frac{\vec{F}_{g1}}{m_1}$ czy też $\frac{\vec{F}_{g2}}{m_2}$ byłby już niezależny od masy ciała próbnego umieszczonego w danym punkcie pola: $\frac{\vec{F}_{g1}}{m_1} = \frac{\vec{F}_{g2}}{m_2}$. Otrzymana wielkość fizyczna, charakteryzująca ilościowo pole grawitacyjne w danym punkcie, nosi nazwę **natężenia pola grawitacyjnego**.

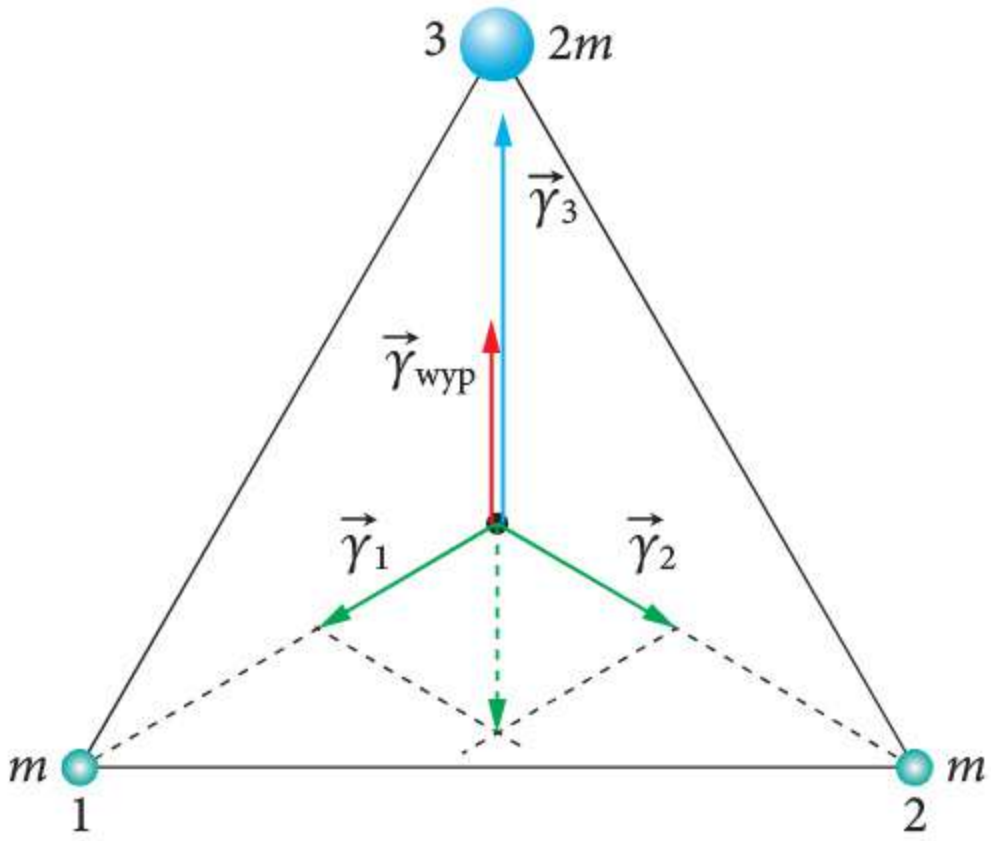
Natężeniem pola grawitacyjnego w danym punkcie nazywamy iloraz siły grawitacji, działającej w tym punkcie na umieszczone tam ciało próbne, i masy tego ciała.

$$\vec{\gamma} = \frac{\vec{F}_g}{m}$$

Natężenie pola grawitacyjnego jest wielkością wektorową. Kierunek i zwrot wektora natężenia pola grawitacyjnego jest taki sam jak kierunek i zwrot siły grawitacji. Wektor $\vec{\gamma}$ jest zwrócony zawsze w stronę źródła pola.
Jednostką natężenia pola grawitacyjnego w SI jest $1\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} = 1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

Jaki jest sens fizyczny $\vec{\gamma}$? Natężenie pola grawitacyjnego w danym punkcie informuje nas, jaka siła grawitacji działa na umieszczone w tym punkcie ciało próbne o jednostkowej masie.

Zauważ, że podana wyżej definicja natężenia pola jest słuszna w każdym polu grawitacyjnym, niezależnie od kształtu ciała będącego jego źródłem.
Jeśli pole pochodzi od kilku ciał punktowych lub kulistych, których rozmieszczenie znamy (rys. 12.2), to stosujemy **zasadę superpozycji** natężeń pól, zgodnie z którą **natężenie pola wypadkowego w danym punkcie jest sumą wektorową natężeń pól pochodzących od każdego z nich**.



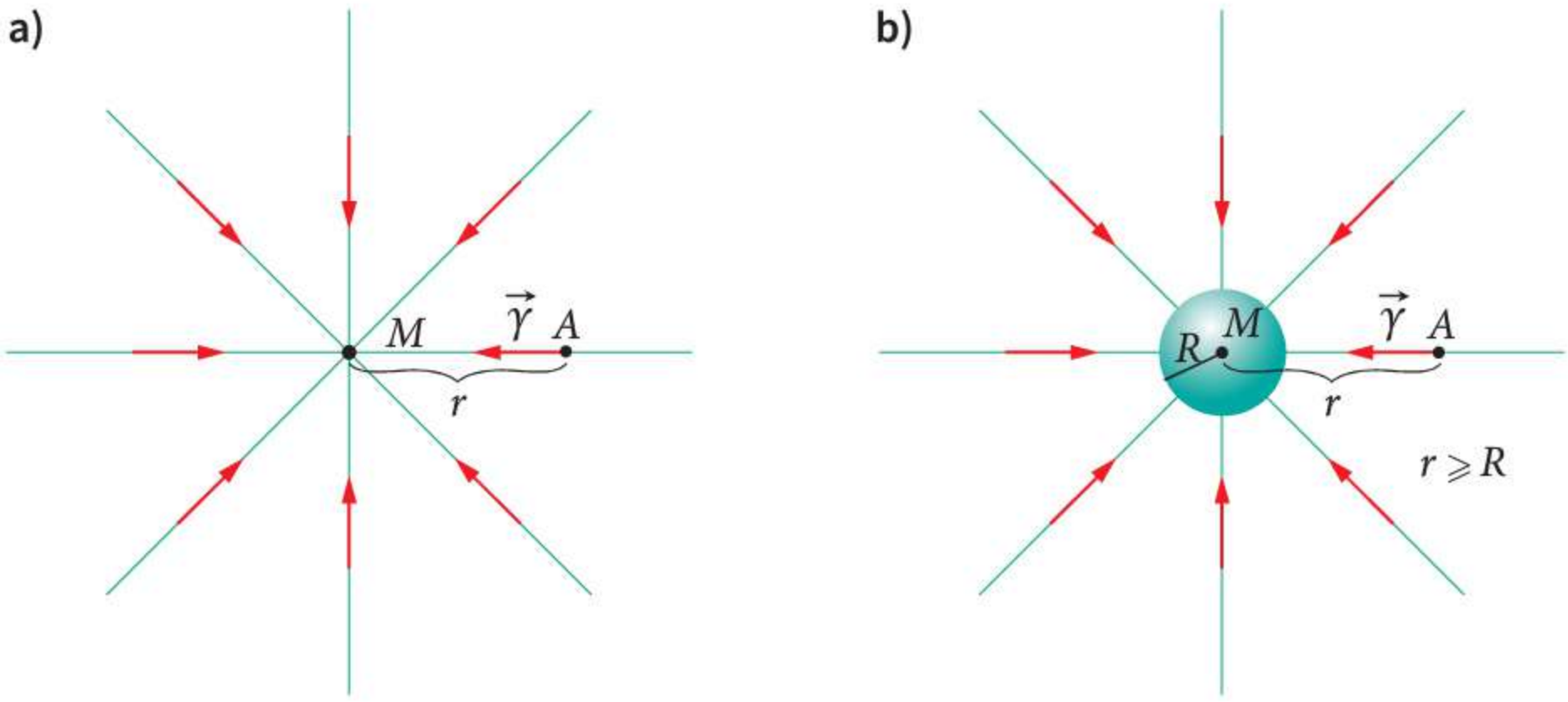
Rys. 12.2 Przykład stosowania zasady superpozycji

Od czego zależy wartość natężenia pola?

Nie można podać uniwersalnego wzoru odpowiadającego na to pytanie – wzoru, za pomocą którego moglibyśmy w każdym przypadku obliczyć wartość natężenia pola grawitacyjnego – ponieważ ta wartość zależy od konfiguracji i mas ciał wytwarzających pole.

Bardzo często pojawia się potrzeba rozważania pól grawitacyjnych na zewnątrz jednorodnych ciał kulistych lub ciał kulistych zbudowanych z substancji o różnych gęstościach, ale rozłożonych symetrycznie względem środka (za takie ciała można w przybliżeniu uważać Słońce, Ziemię i inne planety). Takie pola grawitacyjne muszą być brane pod uwagę w przypadku planowania lotów kosmicznych, ponieważ oddziałują na statki kosmiczne poruszające się w przestrzeni międzyplanetarnej.

Wiadomo, że pole grawitacyjne wytworzone przez punkt materialny o masie M lub przez jednorodną kulę o takiej samej masie (albo przez kulę o symetrycznym rozkładzie masy M względem środka) działa na ciało o masie m umieszczone w punkcie A przedstawionym na rysunkach 12.3a i b siłą o wartości $F_g = G\frac{Mm}{r^2}$.



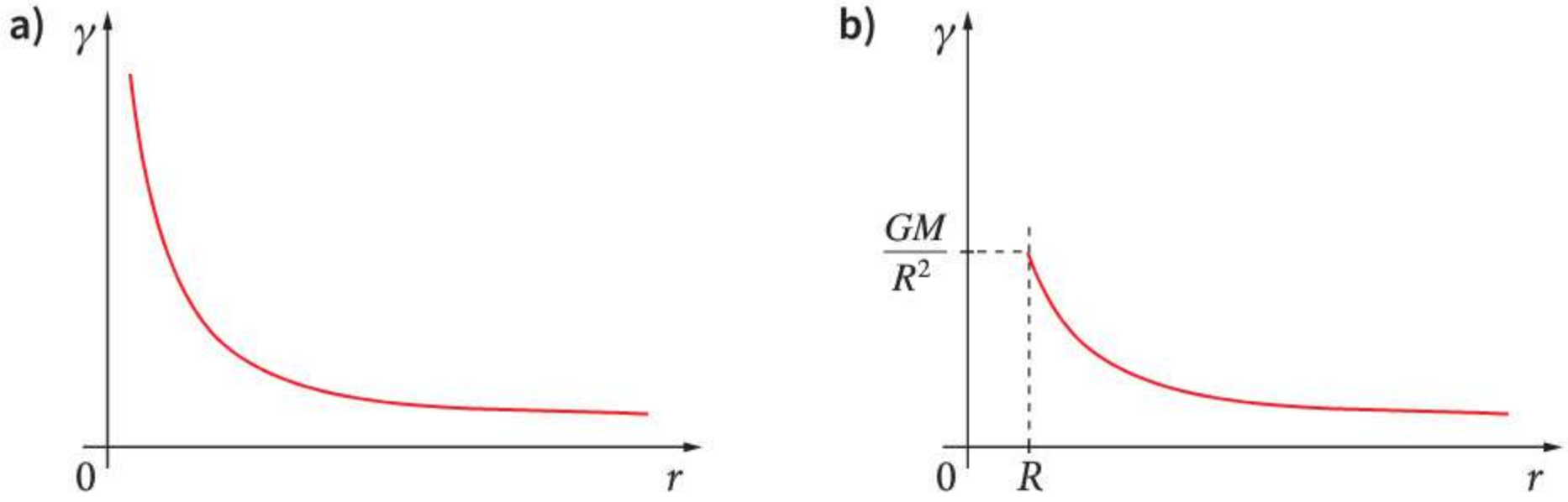
Rys. 12.3 Natężenia obu pól w punkcie A są jednakowe

A zatem wartość natężenia pola grawitacyjnego w odległości r od punktu materialnego lub środka kuli będzie wyrażona wzorem:

$$\gamma = \frac{GM}{r^2} \qquad \text{dla} \qquad r \geqslant R$$

Wzór ten odpowiada na pytanie, od czego i jak zależy wartość natężenia pola grawitacyjnego pochodzącego od źródła punktowego o masie M (rys. 12.4a) lub źródła kulistego (kuli jednorodnej lub kuli o symetrycznym rozkładzie gęstości względem środka) o masie M na zewnątrz kuli (rys. 12.4b). Przy tych założeniach:

Wartość natężenia pola grawitacyjnego jest wprost proporcjonalna do masy źródła pola, a odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości między jego środkiem a danym punktem pola grawitacyjnego.

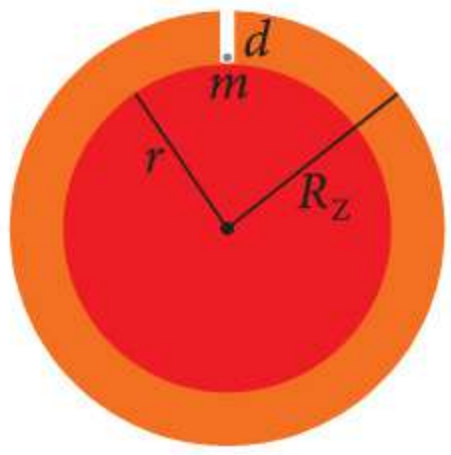


Rys. 12.4 Wykres $\gamma(r)$: dla źródła punktowego (a), na zewnątrz jednorodnej kuli o masie M i promieniu R (b)

WIEDZIEĆ WIĘCEJ

Pole grawitacyjne wewnątrz Ziemi

Wyprowadzimy wzór na wartość siły grawitacji działającej na ciało o masie m umieszczone wewnątrz Ziemi na głębokości $d = R_Z - r$ (rys. 12.5) oraz na wartość natężenia pola grawitacyjnego w tym punkcie.



Rys. 12.5

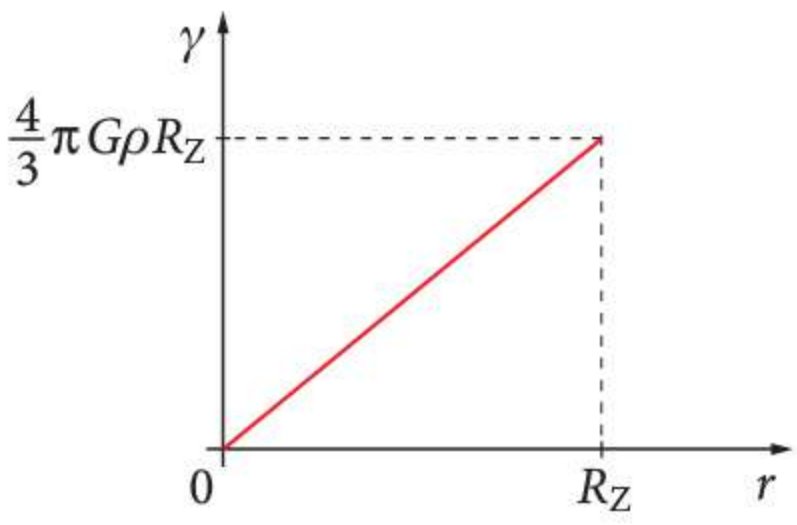
Można wykazać, że wypadkowa siła grawitacji działająca na ciało o masie m w odległości $r < R_Z$ od środka Ziemi pochodzi tylko od kuli o promieniu r (całkowita siła grawitacji pochodząca od sfery kulistej o grubości d jest równa zeru). Wobec tego:

$$F = \frac{GM'm}{r^2}$$

gdzie $M' = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$ (zakładamy dla uproszczenia, że Ziemia jest kulą jednorodną, czyli jej gęstość w każdym punkcie jest równa ρ). Po podstawieniu wyrażenia na M' do wzoru na siłę grawitacji otrzymujemy:

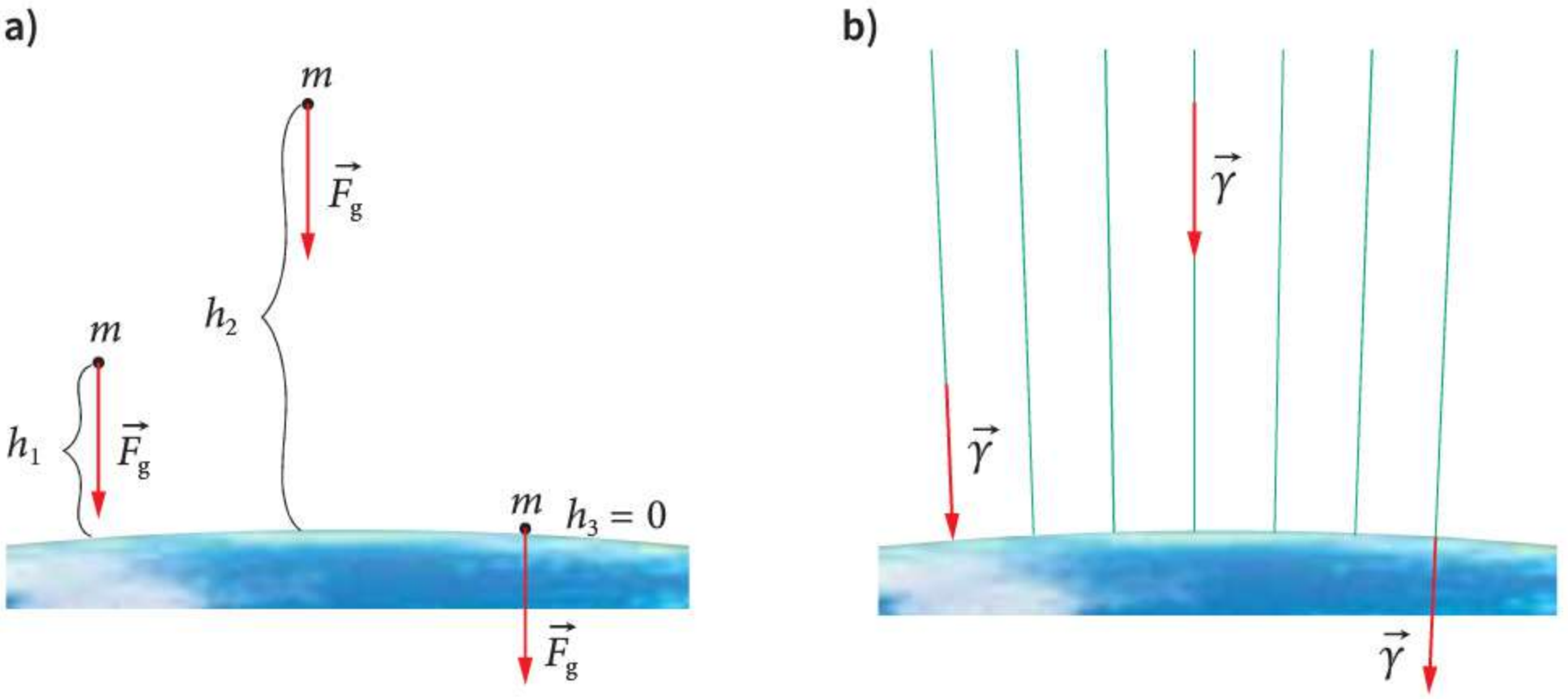
$$F = \frac{4}{3}\pi G m \rho r \qquad \text{a} \qquad \gamma(r) = \frac{4}{3}\pi G \rho r$$

Natężenie pola grawitacyjnego wewnątrz jednorodnej kuli jest zwrócone do jej środka, a jego wartość jest wprost proporcjonalna do odległości od środka kuli (rys. 12.6).



Rys. 12.6

Na koniec zwróćmy jeszcze uwagę na jeden fakt. Przyjmujemy, że w pobliżu powierzchni Ziemi na ciało o masie m działa stała siła ciężkości, tzn. jej wartość, kierunek i zwrot można uważać za jednakowe w każdym punkcie niezbyt odległym od Ziemi. Jeśli $h \ll R$ (R – promień Ziemi), to wartości $\frac{GMm}{R^2}$ i $\frac{GMm}{(R+h)^2}$ niewiele się od siebie różnią (rys. 12.7a).



Rys. 12.7 Siły grawitacji (a) oraz natężenie pola grawitacyjnego (b) w pobliżu Ziemi

Za pomocą pojęcia pola można ten fakt wyrazić inaczej: wektor natężenia pola grawitacyjnego Ziemi w niewielkim obszarze w pobliżu jej powierzchni jest prawie taki sam w każdym punkcie tego obszaru (rys. 12.7b). Pole w takim obszarze jest wobec tego z dobrym przybliżeniem **jednorodne**.

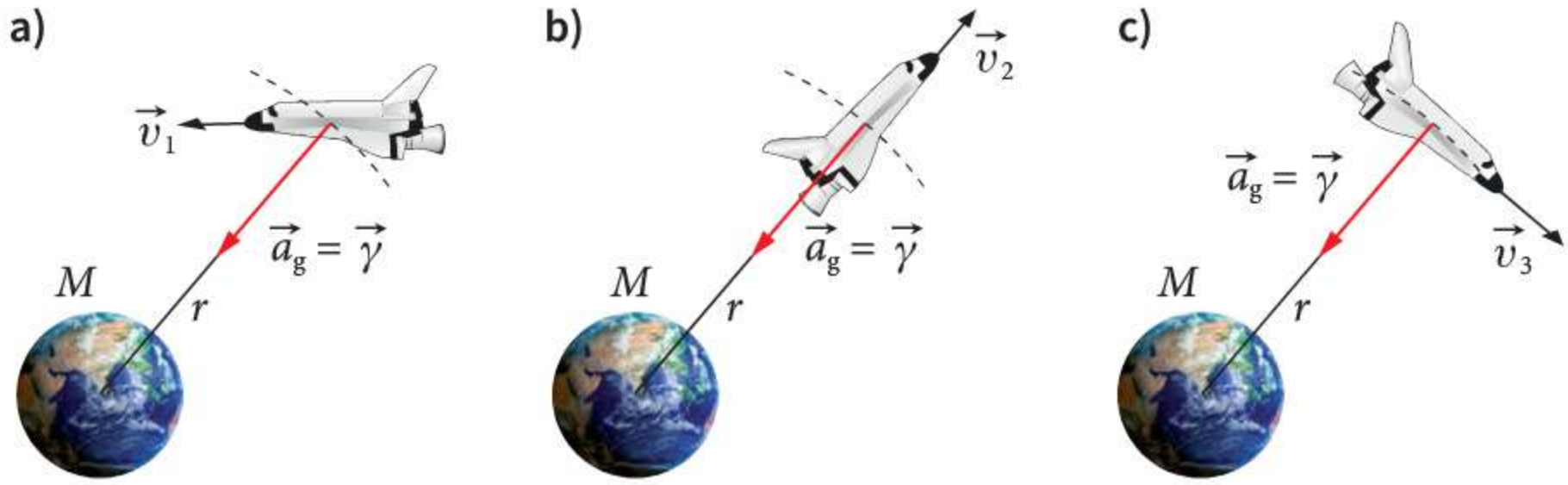
Natężenie pola grawitacyjnego a przyspieszenie grawitacyjne

Jeśli podzielimy siłę grawitacji działającą na ciało umieszczone w polu grawitacyjnym przez jego masę, to – zgodnie z drugą zasadą dynamiki – otrzymamy przyspieszenie grawitacyjne.

$$\vec{a}_g = \frac{\vec{F}_g}{m}$$

Jednak iloraz siły grawitacji działającej w danym punkcie na ciało i jego masy to (zgodnie z definicją podaną wcześniej) natężenie pola grawitacyjnego w tym punkcie. Wobec tego przyspieszenie grawitacyjne uzyskane w danym punkcie pola przez ciało, na które działa tam jedynie siła grawitacji (a więc – jak czasem mówimy – poruszające się swobodnie), jest takie samo jak natężenie pola grawitacyjnego w tym punkcie.

Wszystkie przedstawione wcześniej uwagi na temat natężenia pola grawitacyjnego $\vec{\gamma}$ odnoszą się także do przyspieszenia grawitacyjnego $\vec{a}_g$. W pobliżu Ziemi uważamy je za stałe, a na przykład statek kosmiczny poruszający się bez napędu poza atmosferą ziemską (gdy nie działa już siła oporu powietrza i wyporu) ma w każdym punkcie pola przyspieszenie grawitacyjne równe natężeniu pola grawitacyjnego w tym punkcie, niezależnie od posiadanej prędkości (rys. 12.8).



Rys. 12.8 Przyspieszenie grawitacyjne promu kosmicznego a natężenie pola grawitacyjnego

Należy jednak pamiętać, że wielkości te mają inny sens fizyczny: **natężenie $\vec{\gamma}$ jest cechą punktu pola**, a **przyspieszenie $\vec{a}_g$ jest cechą ruchu** ciała w danym punkcie toru, gdy działa na nie wyłącznie siła grawitacji!

WIEDZIEĆ WIĘCEJ

Ciężar ciała. Przyspieszenie ziemskie na różnych szerokościach geograficznych

Przyspieszenie, z którym spadają ciała w próżni, zwane przyspieszeniem ziemskim i oznaczane symbolem $\vec{g}$, różni się nieco od przyspieszenia grawitacyjnego, którego wartość na powierzchni Ziemi obliczamy ze wzoru $a_g = \frac{GM}{R_Z^2}$. Przyspieszenie ziemskie ma także na ogół inny kierunek niż linie natężenia pola grawitacyjnego Ziemi, a jego wartość zależy od szerokości geograficznej (patrz tabela 12.1).

Tabela 12.1

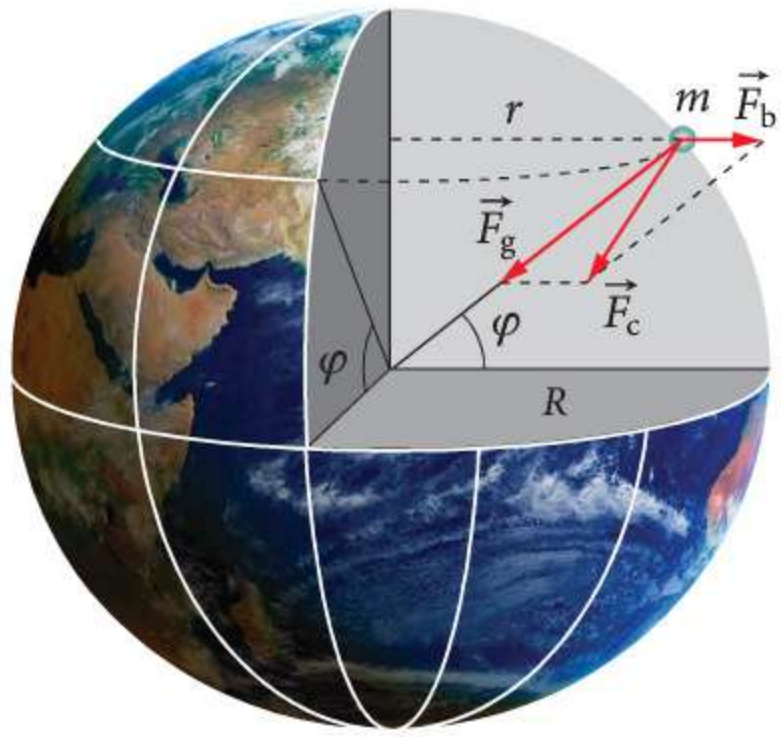
Szerokość geograficzna φ (°)	g (m/s^2)
0	9,7804
30	9,7933
45	9,80665[5]
60	9,8192
90	9,8322

Jak wynika z tabeli, różnica wartości g na biegunie i na równiku wynosi około $0{,}05\ \mathrm{m/s^2}$. Główną przyczyną tego faktu jest ruch obrotowy Ziemi. Mniej ważną, ale istotną przyczyną jest spłaszczenie Ziemi, o którym była mowa na lekcjach geografii.

Weźmy pod uwagę wpływ ruchu obrotowego Ziemi. Z punktu widzenia obserwatora **w układzie nieinercjalnym, związanym z obracającą się Ziemią**, na każde ciało (z wyjątkiem ciał znajdujących się na biegunach) prócz siły grawitacji $\vec{F}_g$ działa siła odśrodkowa bezwładności $\vec{F}_b$, której wartość $F_b = m\omega^2 r$, gdzie m jest masą ciała, ω – wartością prędkości kątowej Ziemi, a r – promieniem okręgu, po którym porusza się ciało wraz z danym punktem Ziemi, czyli promieniem odpowiedniego równoleżnika. W efekcie obserwujemy przyspieszenie ciała nadawane przez siłę wypadkową sił $\vec{F}_g$ i $\vec{F}_b$. Siła wypadkowa $\vec{F}_c$ ma nieco mniejszą wartość niż siła grawitacji $\vec{F}_g$ i – poza równikiem – także

[5] Wartość standardowa.

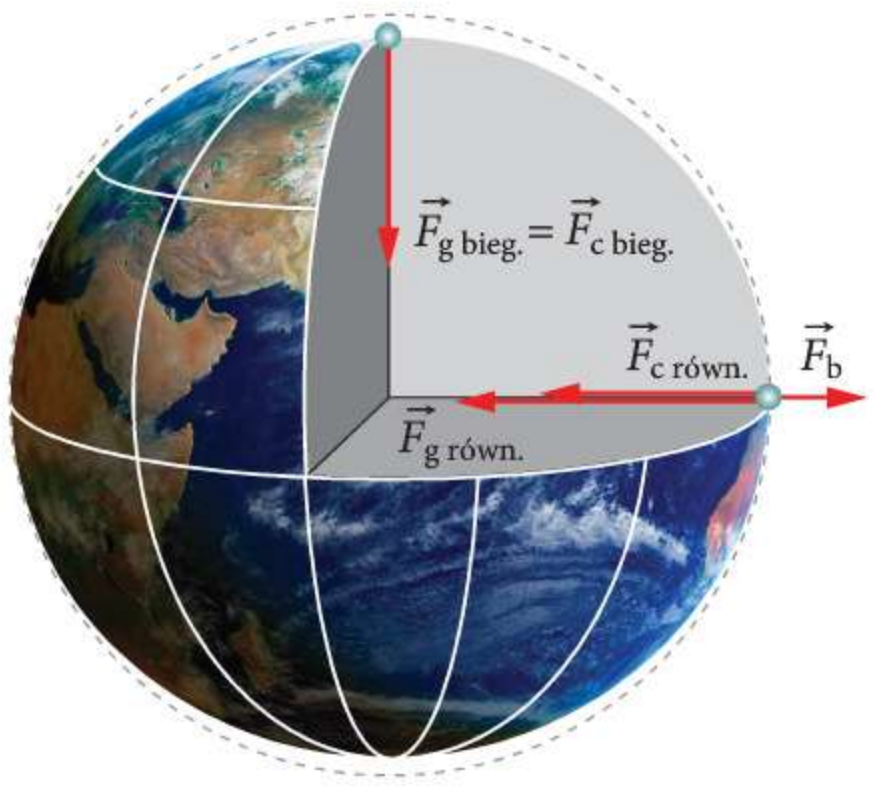
inny kierunek, ponieważ nie jest ona zwrócona do środka Ziemi (rys. 12.9). Tę wypadkową siłę, w odróżnieniu od siły grawitacji, nazywamy **ciężarem** ciała lub **siłą ciężkości**.



Rys. 12.9

Jeśli ciało spoczywa na podłożu lub jest zawieszone, to jego ciężar jest zrównoważony przez siłę sprężystości, jeśli nie – porusza się jednym ze znanych ci już ruchów: spada swobodnie, wykonuje ruch zwany rzutem poziomym lub ukośnym (w zależności od warunków początkowych), ale w każdym punkcie toru ma ono jednakowe przyspieszenie $\vec{g}$, nadawane przez wypadkową siły grawitacji i siły odśrodkowej bezwładności[6]. Kierunek wektora $\vec{g}$ jest **pionem**, a powierzchnia prostopadła do wektora $\vec{g}$ jest **poziomem** (powierzchnia morza). W sposób oczywisty wynika z tego fakt, że Ziemia jest spłaszczona.

Siła odśrodkowa bezwładności nie występuje na biegunach (oś obrotu). Tam więc przyspieszenie ziemskie jest przyspieszeniem grawitacyjnym. Gdy ciało znajduje się na równiku, działająca na nie siła odśrodkowa bezwładności ma największą wartość (największa odległość od osi obrotu). Ponadto jej zwrot jest tam przeciwny do zwrotu siły grawitacji. Ciężar ciała ma więc na równiku najmniejszą wartość (rys. 12.10). Najmniejsze jest tam także przyspieszenie ziemskie.



Rys. 12.10

[6] Pamiętaj o tym, że wszystko, co zostało tutaj powiedziane, byłoby słuszne w próżni. W rzeczywistości na poruszające się ciało działają jeszcze siła oporu powietrza, zależna od szybkości ciała (czyli siła zmienna), oraz siła wyporu. Pomijamy tu także tzw. siłę bezwładności Coriolisa.

$$F_{\text{c równ.}} = F_{\text{g równ.}} - m\omega^2 R_{\text{równ.}}$$

Po podzieleniu obydwu stron tego równania przez masę ciała otrzymujemy związek między wartościami przyspieszeń. Różnica między wartościami przyspieszeń: grawitacyjnego i ziemskiego jest równa wartości przyspieszenia odśrodkowego a_{r}.

$$a_{\text{r}} = \omega^2 R_{\text{równ.}} = \frac{4\pi^2}{T^2} R_{\text{równ.}}$$

Po podstawieniu odpowiednich wartości liczbowych ($T = 23\ \text{h}\ 56\ \text{min} = 86\,160\ \text{s}$ oraz $R_{\text{równ.}} = 6{,}378 \cdot 10^6\ \text{m}$) otrzymujemy:

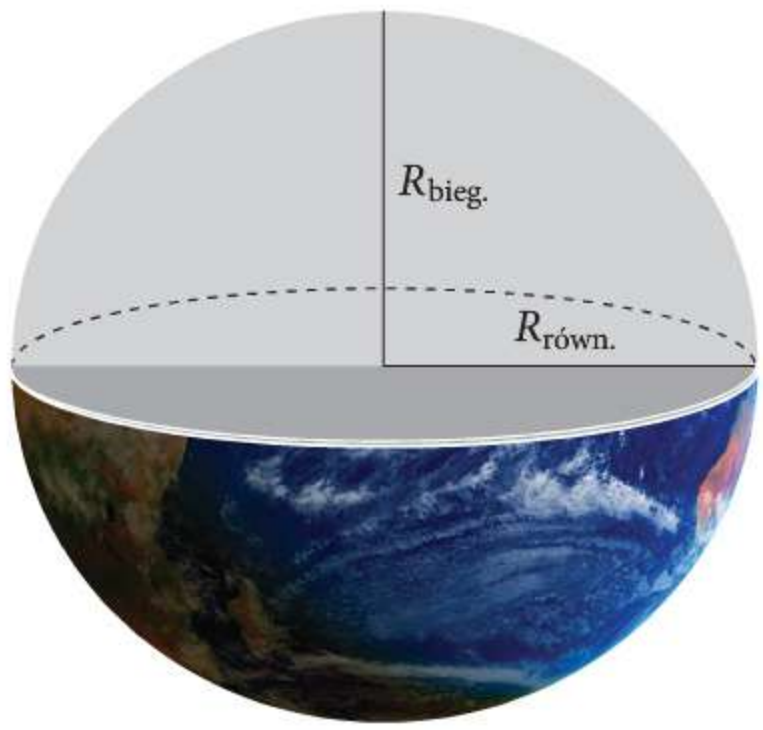
$$a_{\text{r}} \approx 0{,}034\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 3{,}4\ \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$$

Jest to wartość przyspieszenia odśrodkowego, jakie nadawałaby wszystkim ciałom na równiku siła odśrodkowa bezwładności. Wartość a_{r} stanowi bardzo mały ułamek g.
Siła odśrodkowa bezwładności na równiku stanowi niecałe $0{,}5\%$ siły grawitacji (na rysunkach 12.9 i 12.10 nie zachowano proporcji).

Gdyby ruch obrotowy Ziemi był jedyną przyczyną zależności przyspieszenia ziemskiego od szerokości geograficznej, różnica $g_{\text{bieg.}} - g_{\text{równ.}}$ wynosiłaby $3{,}4\ \text{cm/s}^2$. Pozostała część obserwowanej różnicy (około $1{,}6\ \text{cm/s}^2$) jest wynikiem spłaszczenia Ziemi. Różnica ta pozostałaby nawet wówczas, gdyby Ziemia przestała się obracać wokół własnej osi, ale zachowała swój obecny kształt. Ziemię można uważać w przybliżeniu za elipsoidę obrotową[7] o następujących wymiarach (rys. 12.11):

$$R_{\text{bieg.}} \approx 6357\ \text{km} \qquad R_{\text{równ.}} \approx 6378\ \text{km}$$

(Promień kuli o takiej samej objętości wynosi $6371\ \text{km}$).



Rys. 12.11

Podsumowując powyższe rozważania, możemy stwierdzić, że różnica między ciężarem a siłą grawitacji na każdej szerokości geograficznej jest bardzo mała, dlatego w zadaniach często utożsamiamy te siły.

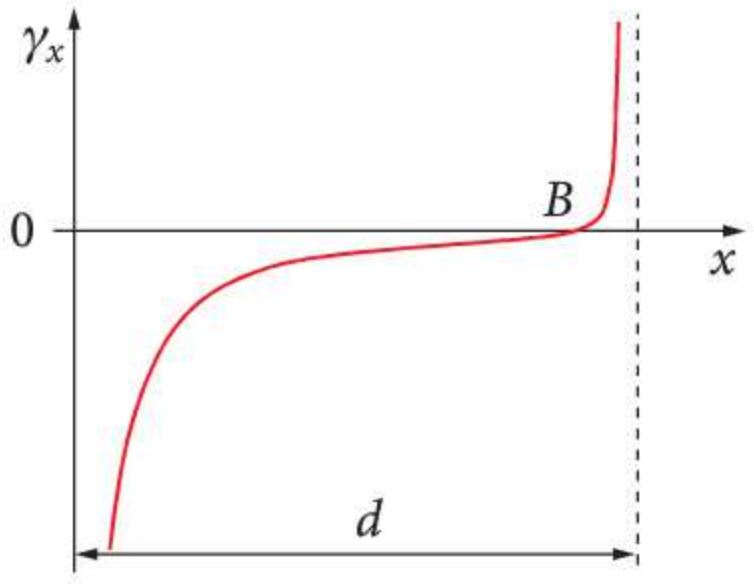
[7] Elipsoida obrotowa jest bryłą powstałą przez obrót elipsy dokoła jednej z jej osi symetrii.

ZADANIA

1. Oblicz wartość przyspieszenia grawitacyjnego na powierzchni planety, której średnia gęstość jest równa średniej gęstości Ziemi, a promień jest dwukrotnie większy od promienia Ziemi.

2. Środki dwóch kul o masach m i $4m$ znajdują się w odległości r. Znajdź położenie punktu, w którym natężenie pola grawitacyjnego wytworzonego przez obie kule jest równe zeru.

3. Wykres na rysunku 12.12 przedstawia zależność współrzędnej γ_x wypadkowego natężenia pola grawitacyjnego, wytworzonego przez Ziemię i Księżyc (potraktowanych jako punkty materialne), od x w obszarze między tymi ciałami niebieskimi.



Rys. 12.12

Przeanalizuj wykres i odpowiedz na pytania:

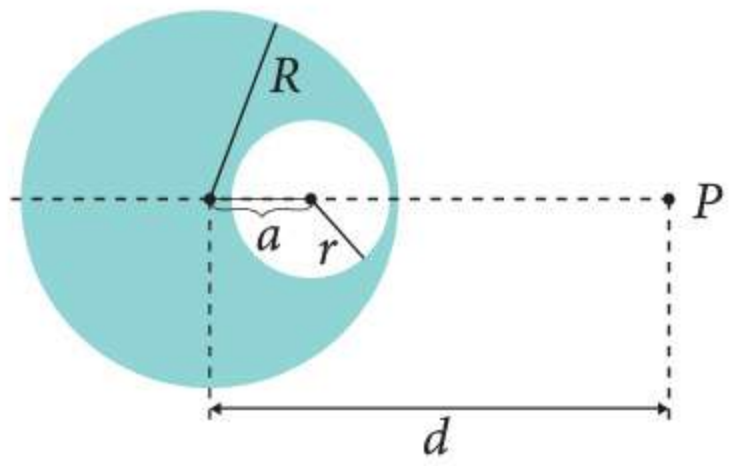
a) W stronę którego ciała zwrócona jest oś x?

b) Środek którego ciała znajduje się w początku osi x?

c) Co oznacza odcinek $x = d$?

d) Zinterpretuj punkt B wykresu i ustal, jaką częścią odległości d jest długość odcinka OB.

***4.** W jednorodnej kuli o promieniu R i gęstości ρ zrobiono sferyczne wydrążenie o promieniu r (rys. 12.13). Odległość środka kuli i środka wydrążenia wynosi a. Oblicz wartość natężenia pola grawitacyjnego w punkcie P, leżącym na zewnątrz kuli, na prostej przechodzącej przez środki kuli i wydrążenia w odległości d od środka kuli.



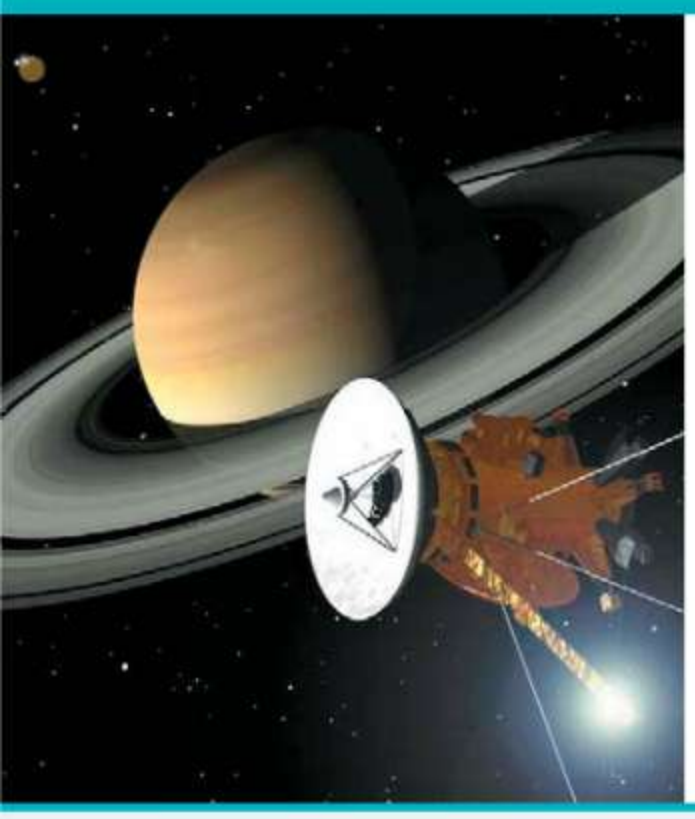
Rys. 12.13

Wskazówka: Skorzystaj z faktu, że natężenie pola $\vec{\gamma}$ wytworzonego przez kulę o promieniu R jest sumą natężeń pól wytworzonych przez kulę o promieniu a i pozostałą część kuli o promieniu R.

Uwaga: Zanim przystąpisz do rozwiązywania zadań 5 i 6, przeczytaj *Wiedzieć więcej* na s. 87–89.

5. Oblicz szybkość kątową, z jaką musiałaby się obracać Ziemia, aby ciała na równiku nic nie ważyły. Ile godzin liczyłaby wówczas doba ziemska? Przyjmij, że $GM_Z = 4 \cdot 10^{14}\ \mathrm{m^3/s^2}$, a promień Ziemi $R_Z = 6{,}37 \cdot 10^6\ \mathrm{m}$. Zadanie rozwiąż w układzie inercjalnym i nieinercjalnym.

6. Źródłem pola grawitacyjnego jest kula o stałej gęstości ρ i promieniu R. Narysuj wykres zależności wartości natężenia pola grawitacyjnego wytworzonego przez tę kulę od odległości r od jej środka dla $0 \leqslant r < \infty$.



13. Praca w polu grawitacyjnym

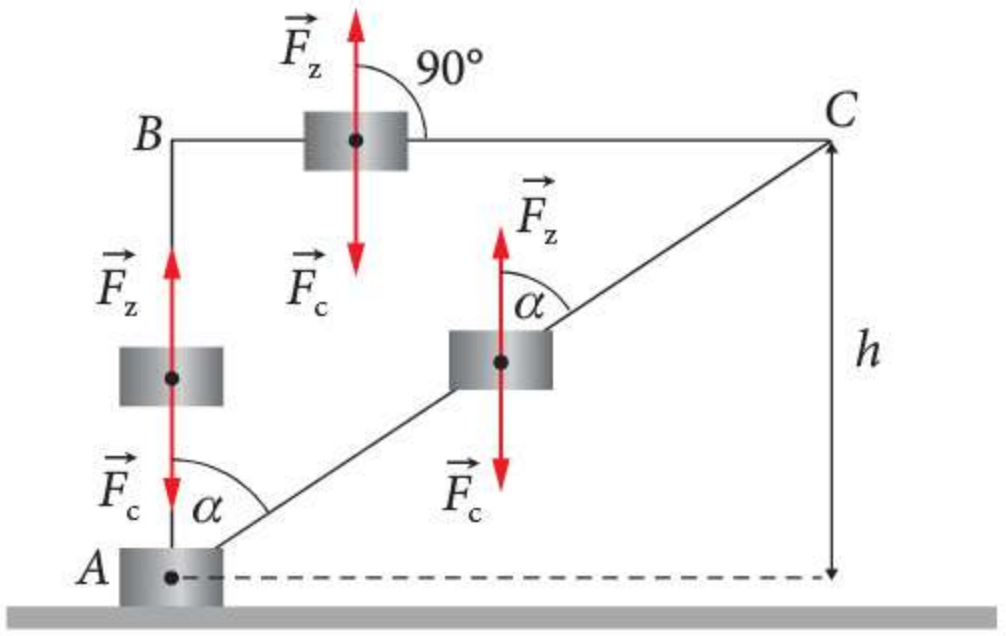
- Praca siły ciężkości w jednorodnym polu grawitacyjnym
- Praca siły ciężkości w centralnym polu grawitacyjnym
- Siła zachowawcza
- Zachowawczość pola grawitacyjnego

Przypomnij sobie wiadomości o iloczynie skalarnym i definicję pracy stałej siły.

Praca wykonywana przez stałą siłę $\vec{F}$ to iloczyn skalarny tej siły i przemieszczenia $\Delta\vec{r}$:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = |\vec{F}||\Delta\vec{r}| \cos\sphericalangle(\vec{F}, \Delta\vec{r}) \tag{13.1}$$

Obliczmy pracę siły zewnętrznej, równoważącej siłę ciężkości przy podnoszeniu ciała na wysokość h ruchem jednostajnym po dwu różnych torach: AC i ABC (rys. 13.1).



Rys. 13.1
Różne tory ciała przemieszczanego od punktu A do punktu C

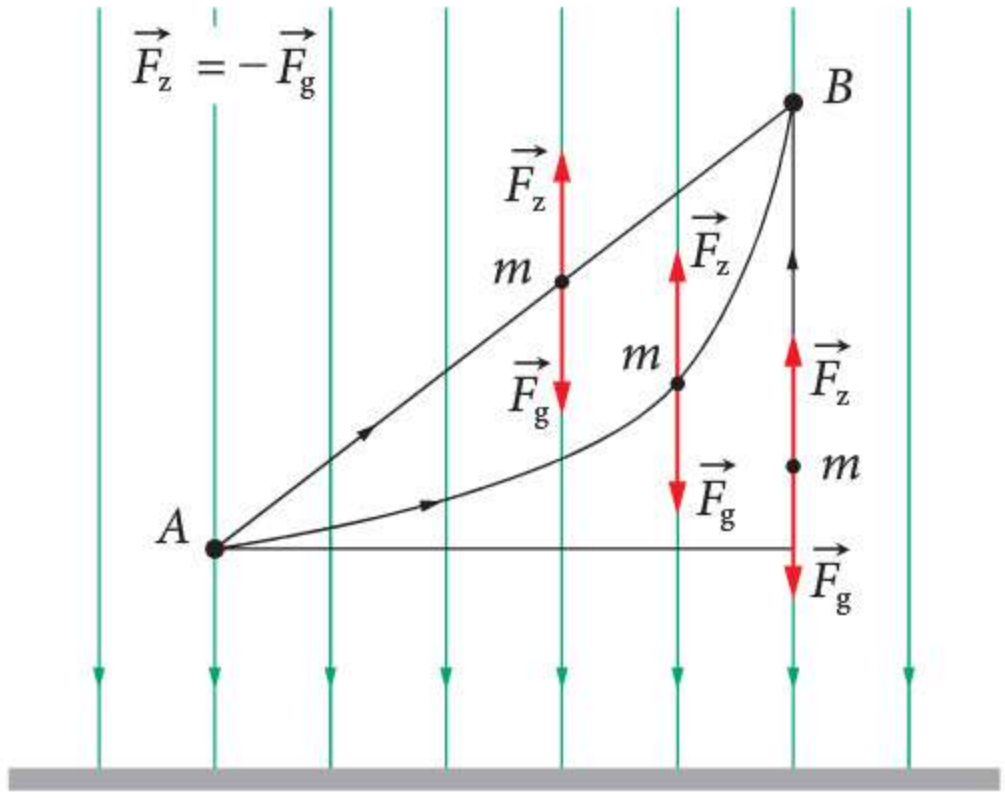
W pobliżu Ziemi wartość siły ciężkości możemy uważać za stałą i równą mg.

$$W_{z,\,A\to C} = F_z \cdot |AC| \cdot \cos\alpha = mg \cdot |AC| \cdot \frac{|AB|}{|AC|} = mgh$$

$$W_{z,\,A\to B\to C} = W_{A\to B} + W_{B\to C} = W_{A\to B} + 0 = F_z \cdot h = mgh$$

Siła ciężkości posiada pewną ważną właściwość. Praca wykonana przez siłę ciężkości (lub przez siłę zewnętrzną, która ją równoważy) nie zależy od drogi, po której przemieszcza się ciało między dwoma położeniami: początkowym A i końcowym B (rys. 13.2). Wynika stąd, że praca wykonana przez siłę ciężkości (a także przez siłę równoważącą siłę ciężkości) przy przemieszczaniu ciała po torze zamkniętym jest zawsze równa zeru. Siłę o takich właściwościach (niezależną od czasu) nazywamy **siłą zachowawczą**.

Obecnie, gdy używamy już pojęcia pola, możemy powiedzieć, że **jednorodne pole grawitacyjne jest polem zachowawczym**, tzn. że praca wykonana nad ciałem przez siły tego pola między dwoma jego punktami nie zależy od przebytej przez ciało drogi i kształtu toru, a jedynie od początkowego i końcowego położenia punktu pola.



Rys. 13.2
Różne tory ciała przemieszczanego od punktu A do punktu B w polu jednorodnym

Wiemy jednak, że **pole grawitacyjne nie zawsze można uważać za jednorodne**. Podczas przemieszczania ciał w przestrzeni otaczającej Ziemię lub inne źródło centralnego pola grawitacyjnego po dowolnym torze nie można przyjąć takiego upraszczającego założenia.
Można jednak wykazać, że także i wówczas praca wykonana przez siłę pola grawitacyjnego oraz przez siłę ją równoważącą nie zależy od drogi i kształtu toru.
A zatem **dowolne pole grawitacyjne niezmieniające się z upływem czasu (statyczne) jest polem zachowawczym**.

Obliczenie pracy wykonanej podczas przemieszczania ciała w polu grawitacyjnym centralnie symetrycznym nie jest tak proste jak w przypadku pola jednorodnego, ponieważ jest to praca wykonana przez siłę, której wartość maleje odwrotnie proporcjonalnie do kwadratu odległości od źródła. Jak wiesz, pracę zmiennej siły obliczamy w fizyce, stosując specjalną metodę matematyczną zwaną całkowaniem. Idea tej metody jest następująca: dzielimy duże przemieszczenie $\Delta\vec{r}$ na bardzo małe części – takie, aby na każdej z nich siłę można było uważać za stałą. Obliczamy prace wykonane na wszystkich małych przemieszczeniach i je sumujemy. Dokładnego rachunku nie możemy tutaj przeprowadzić, więc zapiszemy tylko wynik:

$$W_{z,\,A\to B} = GMm\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) \qquad (13.2)$$

Jest to wzór na **pracę wykonaną przez siłę zewnętrzną** (równoważącą w każdym punkcie siłę pola grawitacyjnego) przy przemieszczaniu ciała o masie m pomiędzy dwoma

punktami A i B pola centralnego. Nie jest przy tym ważne, który punkt znajduje się bliżej, a który – dalej od źródła pola.
Praca ta nie zależy od kształtu toru, tylko od odległości punktu A (r_A) i punktu B (r_B) od środka ciała centralnego. Wiadomo, że jeśli praca nie zależy od drogi i kształtu toru, to praca wykonana przy przemieszczaniu ciała po linii zamkniętej jest równa zeru (i odwrotnie). Wobec tego pole grawitacyjne centralne (jak każde pole grawitacyjne) jest zachowawcze.

Zdajesz sobie chyba sprawę z faktu, że **na ciało zmieniające położenie w polu grawitacyjnym nie musi działać żadna siła zewnętrzna!** Wtedy oczywiście praca tej siły jest równa zeru. Natomiast siła pola grawitacyjnego zawsze wykonuje pracę (jeśli nie jest prostopadła do przemieszczenia). Praca siły pola grawitacyjnego różni się od pracy, jaką wykonałaby równoważąca ją siła zewnętrzna (gdyby działała), tylko znakiem, ponieważ $\vec{F}_g = -\vec{F}_z$.

$$W_{\text{siły pola, A}\to\text{B}} = -GMm\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) = GMm\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right) \qquad (13.3)$$

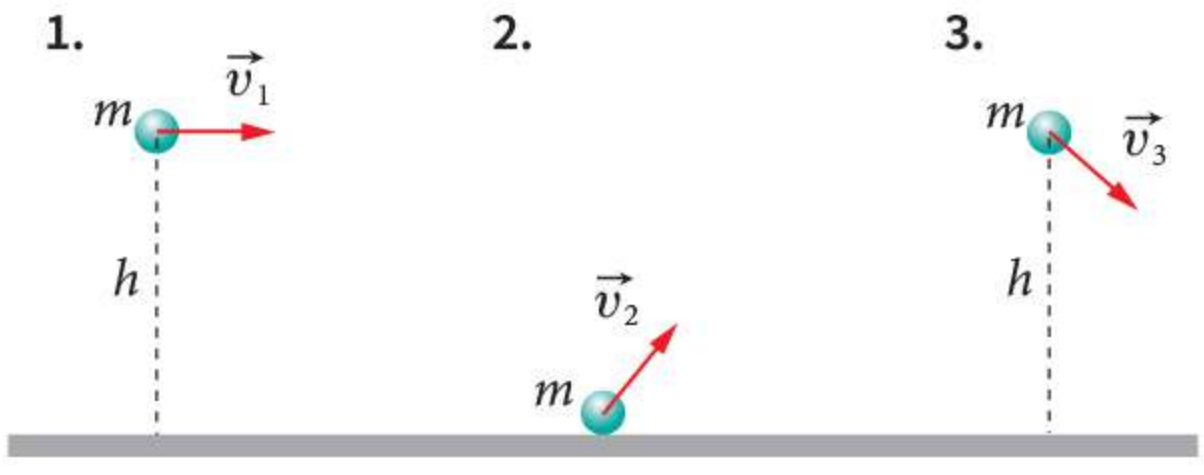
ZADANIA

1. a) Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P (prawda) lub F (fałsz).

1.	Jeśli siła zewnętrzna równoważąca siłę centralnego pola grawitacyjnego wykonuje nad przemieszczanym ciałem pracę dodatnią, to ciało oddala się od źródła pola.	**P**	**F**
2.	Jeśli ciało oddala się od źródła centralnego pola grawitacyjnego, to siła pola wykonuje nad nim pracę ujemną.	**P**	**F**

b) Odpowiedz na poniższe pytania i uzasadnij odpowiedzi.
- Czy stwierdzenie odwrotne do stwierdzenia 1 jest zawsze prawdziwe?
- Czy stwierdzenie odwrotne do stwierdzenia 2 jest zawsze prawdziwe?

2. Trzy ciała o masie m każde rzucono tak jak na rysunku 13.3. W każdym przypadku oblicz pracę wykonaną nad ciałem podczas jego ruchu przez siłę jednorodnego pola grawitacyjnego Ziemi.



Rys. 13.3



14. Energia potencjalna ciała w polu grawitacyjnym

- Zmiana energii potencjalnej grawitacji przy przemieszczaniu ciała między dwoma punktami pola grawitacyjnego
- Energia potencjalna ciała w danym punkcie pola
- Od czego zależy energia potencjalna ciała w centralnym polu grawitacyjnym?

Przypomnij sobie wiadomości o energii potencjalnej układu ciał i jej zmianie.

Energia potencjalna układu ciał oddziałujących z sobą siłami zachowawczymi zmienia się zawsze wtedy, gdy zmienia się wzajemne położenie tych ciał.
Możemy już posłużyć się pojęciem pola, więc zamiast mówić o energii potencjalnej układu ciał oddziałujących z sobą siłami grawitacji, będziemy mówić o energii potencjalnej ciała w polu grawitacyjnym. Stwierdzenie: „energia potencjalna satelity w polu grawitacyjnym Ziemi" oznaczać będzie to samo co „energia potencjalna układu ciał Ziemia–satelita, które z sobą oddziałują siłami grawitacji".

O ile zmieni się energia potencjalna ciała przy zmianie jego położenia w polu grawitacyjnym?

Za miarę zmiany tej energii przyjmujemy pracę siły zewnętrznej równoważącej w każdym punkcie pola siłę grawitacji.

Dla centralnego pola grawitacyjnego praca ta jest wyrażona wzorem:

$$W_{z,\,A\to B} = GMm\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

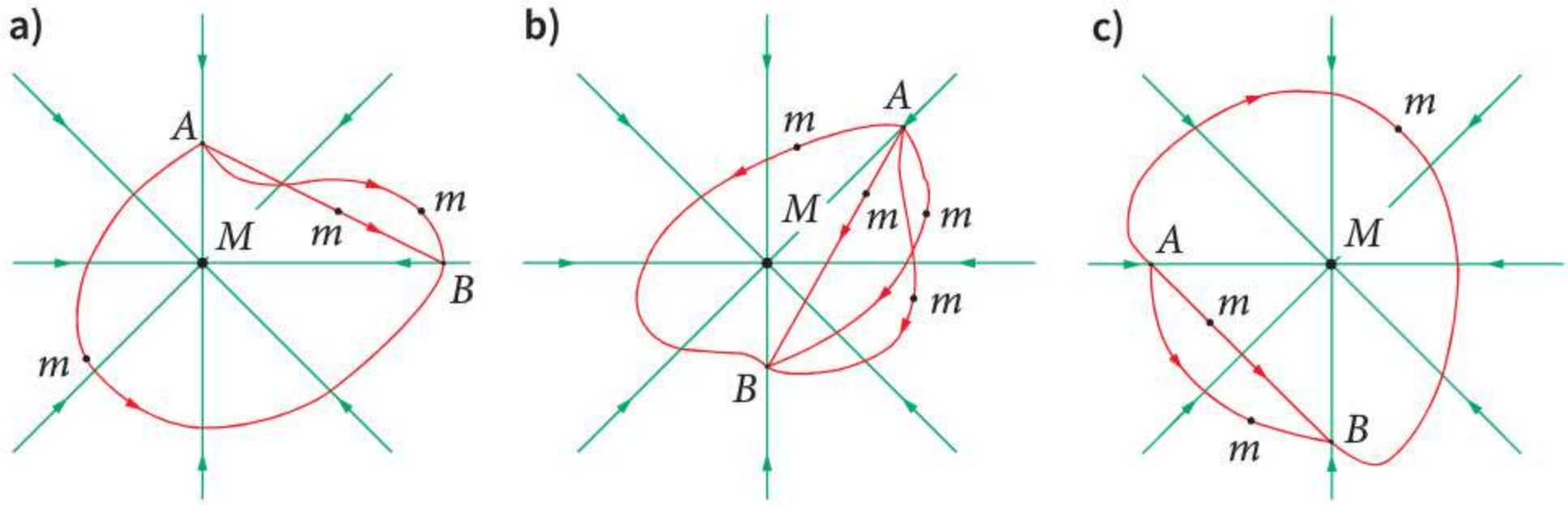
więc:

$$\Delta E_p = GMm\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) \qquad (14.1)$$

Miarą zmiany energii potencjalnej jest praca siły zewnętrznej $\vec{F}_z = -\vec{F}_g$, ale nie oznacza to, że praca ta musi być wykonywana, gdy położenie ciała w polu grawitacyjnym ulega zmianie. Zmiana położenia może występować z innego powodu. Przykładem takiej sytuacji jest ruch ciała rzuconego z pewną prędkością początkową.
Zmiana położenia ciała nie zawsze wiąże się więc z wykonywaniem pracy przez siłę zewnętrzną; natomiast **ze zmianą odległości ciała od źródła pola zawsze jest związana zmiana jego energii potencjalnej** – zgodnie ze wzorem (14.1). Dlatego też wolimy mówić, że **zmiana energii potencjalnej grawitacyjnej jest równa pracy siły pola grawitacyjnego ze znakiem minus** (13.3).

Ze wzoru (14.1) wynika, że:

- Jeśli ciało oddaliło się od źródła pola grawitacyjnego (rys. 14.1a), to zmiana jego energii potencjalnej jest dodatnia, czyli energia potencjalna ciała wzrosła ($r_A < r_B$, $\frac{1}{r_A} > \frac{1}{r_B}$).
- Jeśli ciało zbliżyło się do źródła pola grawitacyjnego (rys. 14.1b), to zmiana jego energii potencjalnej jest ujemna, czyli energia potencjalna ciała zmalała ($r_A > r_B$, $\frac{1}{r_A} < \frac{1}{r_B}$).
- Jeśli po zmianie położenia ciało pozostaje w takiej samej odległości od źródła pola (rys. 14.1c), to zmiana jego energii potencjalnej jest równa zeru, czyli energia potencjalna ciała nie uległa zmianie ($r_A = r_B$, $\frac{1}{r_A} = \frac{1}{r_B}$).



Rys. 14.1 Różne tory[8] ciała przemieszczanego od punktu A do punktu B w polu centralnym: $r_B > r_A \Rightarrow \Delta E_p > 0$ (a), $r_B < r_A \Rightarrow \Delta E_p < 0$ (b), $r_B = r_A \Rightarrow \Delta E_p = 0$ (c)

Podsumowując powyższe rozważania, możemy stwierdzić, że **w każdym polu zachowawczym zmiana energii potencjalnej ciała przy zmianie jego położenia jest jednoznacznie określona**.

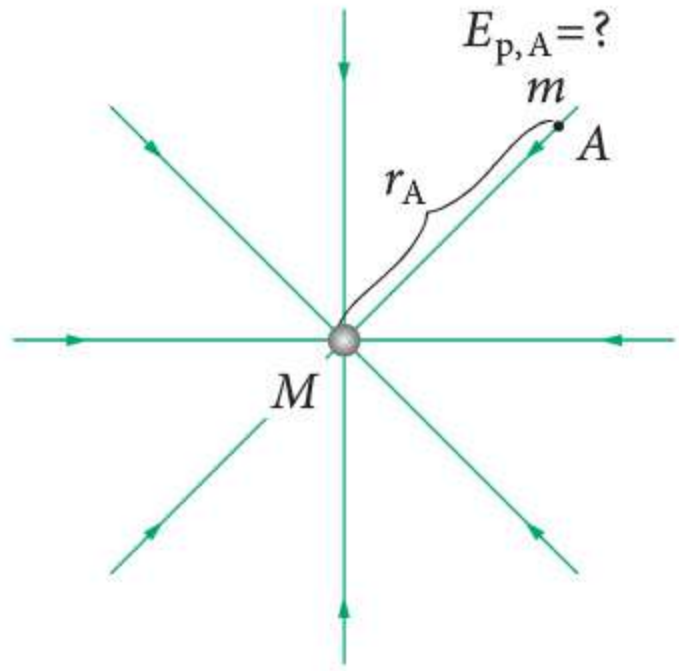
Natomiast w polu niezachowawczym (np. wtedy, gdy działają siły tarcia) praca wykonana przy przemieszczaniu ciała między dwoma danymi punktami zależy od drogi i kształtu toru. Wobec tego określenie zmiany energii potencjalnej, tak jak w przypadku pola zachowawczego, nie jest możliwe, ponieważ byłoby niejednoznaczne. Z tego powodu w niezachowawczych polach sił nie używamy pojęcia energii potencjalnej.

Energia potencjalna ciała w danym punkcie pola

Dotychczas mówiliśmy o zmianie energii potencjalnej ciała w centralnym polu grawitacyjnym. Zauważ jednak, że nie potrafimy jeszcze obliczyć samej energii potencjalnej E_p ciała w danym punkcie pola grawitacyjnego. Zwracaliśmy już uwagę (rozdział 17 podręcznika do klasy pierwszej), że w celu obliczenia energii potencjalnej układu Ziemia i ciało wzniesione na niewielką wysokość h należy się umówić, w którym położeniu

[8] Tor, po którym ciało przemieszcza się od punktu A do punktu B, może być dowolny, ponieważ praca wykonana przez siłę pola grawitacyjnego $\vec{F}_g$, a więc także przez siłę zewnętrzną $\vec{F}_z = -\vec{F}_g$, nie zależy od drogi ani od kształtu toru, a tylko od początkowego i końcowego położenia.

energię potencjalną tego układu będziemy uważać za równą zeru. Podobną umowę musimy wprowadzić w centralnym polu grawitacyjnym. Wybór położenia, w którym $E_p = 0$, jest dowolny. **Przyjęto umowę, że energia potencjalna grawitacyjna ciała jest równa zeru tam, gdzie nie działa już na nie siła grawitacji, a więc w nieskończoności.** Po akceptacji tej umowy możemy wyprowadzić wzór na energię potencjalną ciała (punktowego) o masie m w dowolnym punkcie pola grawitacyjnego, np. w punkcie A odległym o r_A od źródła centralnego pola grawitacyjnego (rys. 14.2).



Rys. 14.2 Ilustracja definicji energii potencjalnej ciała w centralnym polu grawitacyjnym

W tym celu skorzystamy ze wzoru (14.1) i zapiszemy przyrost energii potencjalnej w przypadku, w którym odsuwamy ciało z punktu A do nieskończoności, gdzie energia potencjalna jest równa zeru.

$$\Delta E_p = E_{p,\,B\to\infty} - E_{p,\,A} = 0 - E_{p,\,A} = \left[GMm\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)\right]_{r_B\to\infty}$$

Gdy $r_B \to \infty$, to $\frac{1}{r_B} \to 0$, zatem:

$$E_{p,\,A} = -\frac{GMm}{r_A}$$

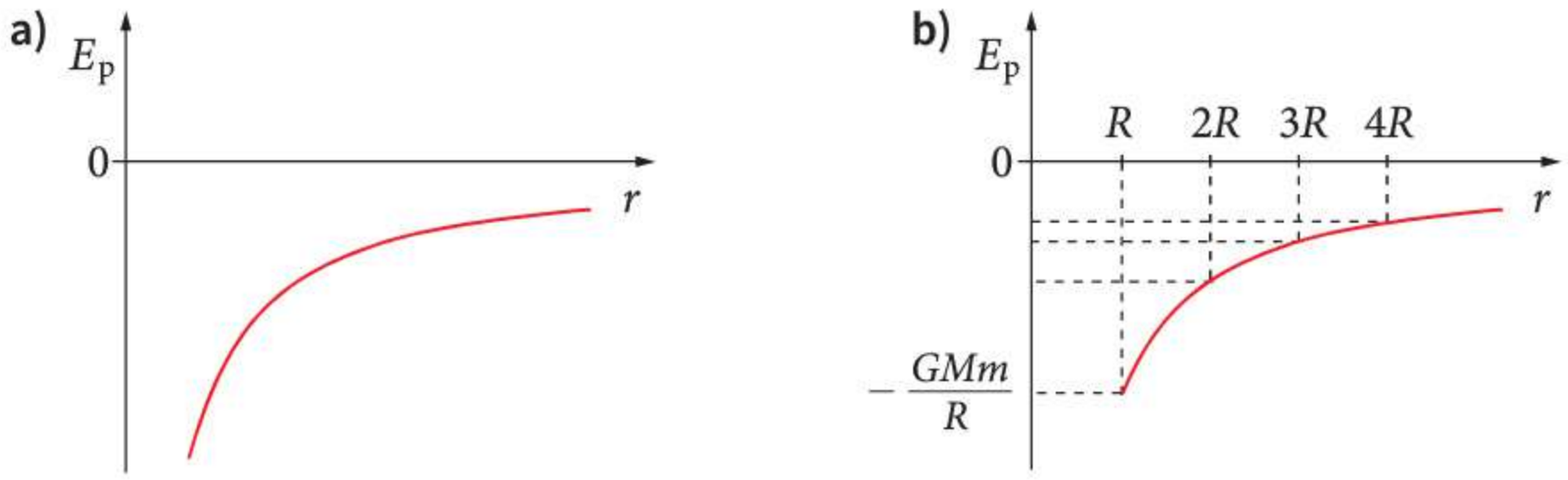
Punkt A jest dowolnie wybranym punktem pola, zatem w punkcie pola odległym o r od źródła **energia potencjalna ciała**:

$$E_p = -\frac{GMm}{r} \qquad (14.2)$$

Energia potencjalna ciała w polu grawitacyjnym jest ujemna – wszystkie wielkości występujące po prawej stronie wzoru (14.2) są dodatnie, a przed ilorazem jest znak minus. Fakt ten jest zrozumiały: skoro energia potencjalna grawitacyjna ciała przy oddalaniu od źródła pola wzrasta, a – zgodnie z umową – jej największa wartość (w nieskończoności) wynosi zero, to w każdej innej, skończonej odległości od źródła musi ona być mniejsza od zera.

Zauważ, że wzór (14.2) odpowiada na pytanie: *Od czego zależy energia potencjalna ciała o masie m w polu grawitacyjnym ciała centralnego o masie M ?*

Na stronie obok przedstawiono wykresy zależności energii potencjalnej E_p w polu grawitacyjnym centralnym od odległości r od źródła: na rysunku 14.3a dla pola wytworzonego przez punkt materialny, a na rysunku 14.3b dla pola, którego źródłem jest ciało kuliste (jednorodna kula lub kula o sferycznie symetrycznym rozkładzie gęstości) o promieniu R. Wyprowadzony wzór stosuje się tylko na zewnątrz kuli.



Rys. 14.3 Wykres $E_p(r)$ dla ciała w polu grawitacyjnym: źródła punktowego (a), jednorodnej kuli (b)

Uwaga: W polu grawitacyjnym wytworzonym przez ciało o dowolnie rozmieszczonej masie zmianę energii potencjalnej określamy tak samo jak w polu centralnym, czyli jako pracę siły zewnętrznej, równoważącej w każdym punkcie siłę pola, lub jako pracę siły pola ze znakiem minus. Analogicznie należałoby też postępować, aby wyprowadzić wzór na energię potencjalną. Otrzymany wzór byłby oczywiście inny, jak np. w przypadku jednorodnego pola grawitacyjnego.

ZADANIA

1. Odpowiedz na pytania i uzasadnij odpowiedzi.
   a) Co można powiedzieć o energii potencjalnej ciała, gdy to ciało:
      - oddala się od źródła pola,
      - zbliża się do źródła pola,
      - przemieszcza się tak, że w efekcie jego odległość od źródła pola nie ulega zmianie?
   b) Czy odpowiedzi na wszystkie pytania w części a zadania ulegną zmianie, gdy przyjmiemy inny poziom zerowy (czyli poziom zerowej wartości grawitacyjnej energii potencjalnej)?

2. Odpowiedz na pytania i wykonaj polecenie.
   a) Co dzieje się z całkowitą energią mechaniczną ciała, którego położenie w polu grawitacyjnym ulega zmianie, gdy:
      - siła zewnętrzna podczas przemieszczania ciała wykonuje pracę dodatnią,
      - siła zewnętrzna podczas przemieszczania ciała wykonuje pracę ujemną,
      - siła zewnętrzna działa na ciało, ale nie wykonuje pracy,
      - siła zewnętrzna nie działa na ciało?
   b) Podaj po jednym przykładzie dotyczącym każdego z tych przypadków.

3. Na ciało działa w polu grawitacyjnym siła zewnętrzna zwrócona zgodnie z siłą grawitacji. Ta siła wykonuje pracę dodatnią. Jak zmieni się:
   a) całkowita energia mechaniczna tego ciała,
   b) energia potencjalna tego ciała,
   c) energia kinetyczna tego ciała?

   Uzasadnij odpowiedzi.



*15. Potencjał pola grawitacyjnego

- Definicja i sens fizyczny potencjału pola grawitacyjnego
- Od czego zależy potencjał pola grawitacyjnego?
- Potencjał pola a natężenie pola

Przypomnij sobie wiadomości o natężeniu pola grawitacyjnego.

Czy energia potencjalna charakteryzuje pole grawitacyjne? Ze wzoru (14.2) wynika, że energie potencjalne ciał o różnych masach są w danym punkcie pola grawitacyjnego różne, więc energia potencjalna nie jest cechą pola.
Rozumowanie podobne do przeprowadzonego w rozdziale poświęconym natężeniu pola grawitacyjnego prowadzi do wniosku, że cechą pola w danym jego punkcie jest iloraz $\frac{E_p}{m}$, który nazywamy potencjałem pola grawitacyjnego i oznaczamy literą V.

Potencjałem pola grawitacyjnego w danym punkcie nazywamy iloraz energii potencjalnej, jaką ma w tym punkcie umieszczone tam ciało próbne, i masy tego ciała.

$$V = \frac{E_p}{m}$$

Z definicji wynika, że potencjał pola grawitacyjnego jest skalarem, a jego jednostką w SI jest $1\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}} = 1\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$. Potencjał pola grawitacyjnego w danym punkcie informuje nas, jaką energię potencjalną miałoby umieszczone w tym punkcie ciało próbne o masie 1 kg.

Różnicę potencjałów między dwoma punktami dowolnego pola grawitacyjnego można obliczyć ze wzoru:

$$V_B - V_A = \frac{E_{p,\,B} - E_{p,\,A}}{m} = \frac{\Delta E_p}{m} \quad \Rightarrow \quad \Delta E_p = m \cdot (V_B - V_A)$$

Jak wiadomo, przyrost energii potencjalnej ciała związany ze zmianą położenia z A na B jest z definicji równy pracy, którą wykonałaby siła zewnętrzna równoważąca siłę pola, lub pracy, którą wykonuje siła pola, wziętej ze znakiem minus, zatem:

$$W_{z,\,A\to B} = m(V_B - V_A)$$

lub:

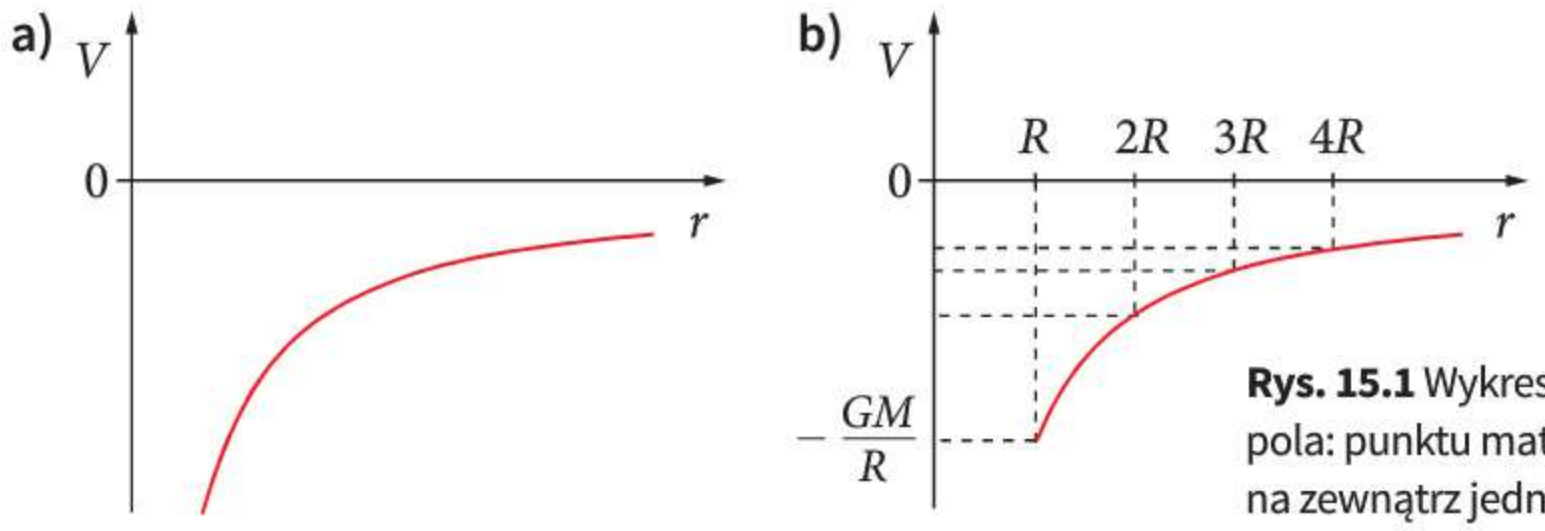
$$W_{\text{siły pola},\,A\to B} = -m(V_B - V_A) = m(V_A - V_B)$$

Powyższe wzory są **słuszne w dowolnym polu grawitacyjnym**.

Znajomość potencjału w każdym punkcie pola (inaczej mówiąc – znajomość rozkładu potencjału danego pola) pozwala w prosty sposób obliczyć pracę siły pola przy zmianie położenia ciała. Rozkład potencjału zależy od rodzaju pola grawitacyjnego.
Dla centralnego pola grawitacyjnego:

$$V = \frac{E_p}{m} = \frac{\frac{-GMm}{r}}{m} = -\frac{GM}{r} \qquad (15.1)$$

Wzór (15.1) odpowiada na pytanie: *Od czego i jak zależy potencjał centralnego pola grawitacyjnego?*
Gdy wzrasta r, to iloraz $\frac{GM}{r}$ maleje, ale $-\frac{GM}{r}$ rośnie! Zależność $V(r)$ dla pola centralnego obrazują wykresy na rysunku 15.1. Oczywiście, przebiegają one podobnie jak wykresy $E_p(r)$, przedstawione na rysunku 14.3. Dla kuli o masie M i promieniu R powyższy wzór stosuje się tylko na zewnątrz i na powierzchni kuli (rys. 15.1b).

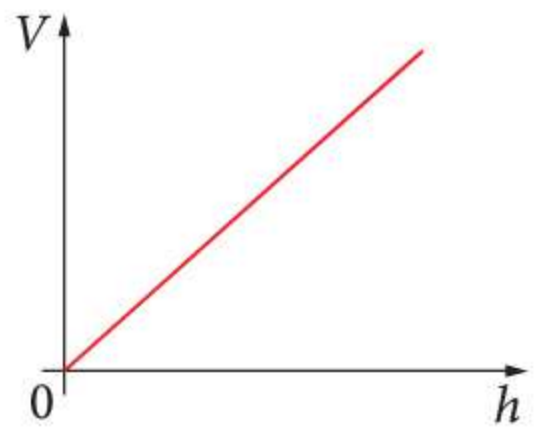


Rys. 15.1 Wykres $V(r)$ dla centralnego pola: punktu materialnego (a) na zewnątrz jednorodnej kuli (b)

W polu jednorodnym w pobliżu powierzchni Ziemi ciało o masie m znajdujące się na wysokości h nad „poziomem zerowym" (na którym, zgodnie z umową, energia potencjalna ciała jest równa zeru) ma energię potencjalną $E_p = mgh$. Wobec tego potencjał takiego pola:

$$V(h) = \frac{mgh}{m} = gh$$

jest liniową funkcją wysokości (rys. 15.2).



Rys. 15.2 Wykres $V(h)$ dla jednorodnego pola grawitacyjnego

Gdy pole grawitacyjne powstaje z nałożenia dwóch lub większej liczby pól grawitacyjnych, **to potencjał w każdym punkcie jest algebraiczną sumą potencjałów** tych pól.

Pole grawitacyjne można opisać, podając rozkład wektora natężenia pola lub rozkład potencjału. Używamy takiego opisu, który jest wygodniejszy w danym przypadku. Rozkłady potencjału i natężenia pola są od siebie wzajemnie zależne. Im wartość natężenia

pola $\vec{\gamma}$ w danym obszarze przestrzeni jest większa, tym potencjał (w przeliczeniu na jednostkę odległości mierzonej wzdłuż linii pola) zmienia się bardziej gwałtownie (wykres zależności potencjału od odległości przebiega bardziej stromo). Sprawdź to – porównaj wykresy na rysunkach 12.4 i 15.1.

Przykład 15.1

Natężenie pola jako miara zmiany potencjału przypadającej na jednostkę odległości

Na podstawie wykresu $V(h)$ dla pola jednorodnego (rys. 15.2) łatwo obliczyć wartość natężenia pola grawitacyjnego γ jako iloraz $\frac{\Delta V}{\Delta h}$. W przypadku pola niejednorodnego można podobnie obliczyć przybliżoną wartość γ. Przybliżenie będzie tym lepsze, im mniejsze będą odległości punktów o różnicy potencjałów ΔV, zwłaszcza wtedy, gdy potencjał zmienia się ze wzrostem odległości (mierzonej wzdłuż linii pola) bardzo gwałtownie.
Pokażemy to dla pola centralnego Ziemi.

Obliczymy przybliżoną wartość natężenia pola grawitacyjnego – podzielimy ΔV przez Δr.

Niech $r_A = R_Z$, a $r_B = 1{,}5R_Z$ ($\Delta r = 0{,}5R_Z$).

$$\Delta V = V_B - V_A = -\frac{GM_Z}{1{,}5R_Z} + \frac{GM_Z}{R_Z} = \frac{1}{3}\frac{GM_Z}{R_Z}$$

Przybliżona wartość natężenia pola grawitacyjnego na odcinku Δr jest równa:

$$\gamma \approx \frac{1}{3} \cdot \frac{GM_Z}{0{,}5R_Z^2} = \frac{1}{1{,}5}\frac{GM_Z}{R_Z^2} \qquad \gamma \approx 6{,}57\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$$

Obliczymy teraz dokładną wartość γ np. w środkowym punkcie odcinka Δr:

$$\gamma' = \frac{GM_Z}{(1{,}25R_Z)^2} = \frac{GM_Z}{1{,}5625R_Z^2} \qquad \gamma' \approx 6{,}31\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$$

Różnica wynosi $0{,}26\ \mathrm{N/kg}$.

Sprawdź samodzielnie, że dla punktów: $r_A = R_Z$ i $r_B = 1{,}2R_Z$ obliczone w ten sposób wartości γ i γ' są równe:

- na odcinku $\Delta r = 0{,}2R_Z$:

$$\gamma \approx \frac{\Delta V}{\Delta r} \qquad \gamma \approx 8{,}21\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$$

- w środku tego odcinka (tj. w odległości $1{,}1R_Z$ od środka Ziemi):

$$\gamma' = \frac{GM_Z}{(1{,}1R_Z)^2} = \frac{GM_Z}{1{,}21R_Z^2} \qquad \gamma' \approx 8{,}11\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$$

ZADANIA

1. W jednorodnym polu grawitacyjnym przy powierzchni Marsa potencjał wzrasta w przybliżeniu o $180\ \mathrm{J/kg}$ na każde $50\ \mathrm{m}$ wzniesienia. Oblicz wartość natężenia pola grawitacyjnego w pobliżu powierzchni Marsa.
2. Przeczytaj zadanie 3 na s. 90 i oblicz potencjał grawitacyjny w punkcie B wskazanym na rysunku 12.12. Przyjmij, że masa Ziemi $M_Z = 6 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$, a $d = 3{,}8 \cdot 10^5\ \mathrm{km}$.
3. Oblicz potencjał grawitacyjny na powierzchni Ziemi. Przyjmij, że promień Ziemi $R_Z = 6{,}37 \cdot 10^6\ \mathrm{m}$, a $GM_Z = 4 \cdot 10^{14}\ \mathrm{m^3/s^2}$.



16. Druga prędkość kosmiczna

- Pojęcie drugiej prędkości kosmicznej
- Wartość drugiej prędkości kosmicznej dla Ziemi
- Całkowita energia satelity na orbicie kołowej

Przypomnij sobie zasadę zachowania energii mechanicznej.

Zastanówmy się teraz, jaką **najmniejszą** prędkość trzeba nadać ciału, aby mogło wystartować z powierzchni Ziemi i oddalić się do nieskończoności (przy założeniu, że nie będą na nie oddziaływały inne ciała niebieskie, i przy pominięciu oporu powietrza w atmosferze).

Podczas ruchu na ciało nie będą działać żadne siły zewnętrzne, więc jego całkowita energia mechaniczna pozostanie stała. Energia potencjalna ciała na powierzchni Ziemi jest równa $E_p = -G\frac{mM_Z}{R_Z}$, a jego energia kinetyczna $E_k = \frac{mv^2}{2}$ (v – szybkość nadana ciału przy starcie). Całkowita energia mechaniczna to suma energii kinetycznej i potencjalnej, czyli:

$$E_c = E_p + E_k = -G\frac{mM_Z}{R_Z} + \frac{mv^2}{2}$$

Nieskończenie daleko od Ziemi szybkość i energia kinetyczna ciała będą równe zeru, jeśli ciału temu nadano na powierzchni Ziemi najmniejszą prędkość umożliwiającą oddalenie się do nieskończoności. Również energia potencjalna ciała w nieskończoności jest równa zeru, zgodnie z przyjętą wcześniej umową. Całkowita energia ciała w nieskończoności jest więc równa zeru. To znaczy, że w każdym innym punkcie pola grawitacyjnego musi być także równa zeru, zgodnie z zasadą zachowania energii mechanicznej.

$$E_k + E_p = 0 \qquad \frac{mv^2}{2} - G\frac{mM_Z}{R_Z} = 0$$

skąd:

$$\frac{mv^2}{2} = G\frac{mM_Z}{R_Z}$$

Z tego równania obliczamy wartość najmniejszej prędkości, którą trzeba nadać ciału, aby mogło wystartować z powierzchni Ziemi i oddalić się do nieskończoności. Prędkość taką nazywamy **drugą prędkością kosmiczną** lub **prędkością ucieczki**. Jej wartość:

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2GM_Z}{R_Z}} \qquad (16.1)$$

Po podstawieniu wartości liczbowych: $M_Z = 6 \cdot 10^{24}\,\text{kg}$, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$, $R_Z = 6{,}37 \cdot 10^6\,\text{m}$, otrzymujemy:

$$v_{II} \approx 11{,}2 \cdot 10^3\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 11{,}2\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Zauważ, że pomiędzy pierwszą i drugą prędkością kosmiczną zachodzi związek $v_{II} = \sqrt{2}v_I$. Wartość drugiej prędkości kosmicznej, którą trzeba nadać ciału na innej planecie, obliczamy ze wzoru:

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2GM_{\text{planety}}}{R_{\text{planety}}}}$$

Przykład 16.1

Energia satelity

Obliczymy całkowitą energię mechaniczną satelity o masie m obiegającego Ziemię po okręgu o promieniu r z prędkością o wartości v.

Całkowita energia satelity to suma energii kinetycznej $E_k = \frac{mv^2}{2}$ i potencjalnej $E_p = -\frac{GmM_Z}{r}$, więc:

$$E_c = \frac{mv^2}{2} - \frac{GmM_Z}{r}$$

Siła grawitacji działająca na satelitę jest siłą dośrodkową:

$$\frac{GmM_Z}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

stąd:

$$\frac{GmM_Z}{2r} = \frac{mv^2}{2}$$

Wobec tego energia całkowita satelity:

$$E_c = \frac{GmM_Z}{2r} - \frac{GmM_Z}{r} = -\frac{GmM_Z}{2r}$$

Zauważ, że $E_c = -E_k$ oraz $\frac{E_k}{E_p} = -\frac{1}{2}$, czyli $E_k = \left|\frac{E_p}{2}\right|$.

Otrzymany wynik jest słuszny dla każdego ciała, które obiega ciało centralne po okręgu, a więc dla satelitów dowolnych planet, a także dla planet obiegających Słońce.

ZADANIA

1. W jednym układzie współrzędnych naszkicuj wykresy zależności $E_p(r)$, $E_k(r)$ i $E_c(r)$ dla satelity o masie m krążącego po orbicie o promieniu r.
2. Oblicz przyrost energii kinetycznej meteorytu o masie $100\,\text{kg}$ podczas zbliżania się do powierzchni Ziemi z odległości $h_A = 5000\,\text{km}$ do odległości $h_B = 200\,\text{km}$. Przyjmij, że $GM_Z = 4 \cdot 10^{14}\,\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}$, $R_Z = 6{,}37 \cdot 10^6\,\text{m}$.
3. Skorzystaj z zasady zachowania energii i oblicz, na jaką maksymalną wysokość nad powierzchnię Ziemi dotrze ciało wystrzelone pionowo z prędkością o wartości równej wartości pierwszej prędkości kosmicznej. Pomiń opór powietrza. Przyjmij, że $R_Z = 6{,}37 \cdot 10^6\,\text{m}$.



17. Stan przeciążenia. Stany nieważkości i niedociążenia

- Warunki wystąpienia stanu przeciążenia i niedociążenia
- Skutki przeciążenia dla organizmu człowieka
- Stan nieważkości
- Sztuczna grawitacja i zasada równoważności

Przypomnij sobie opis ruchu w układach inercjalnych i nieinercjalnych.

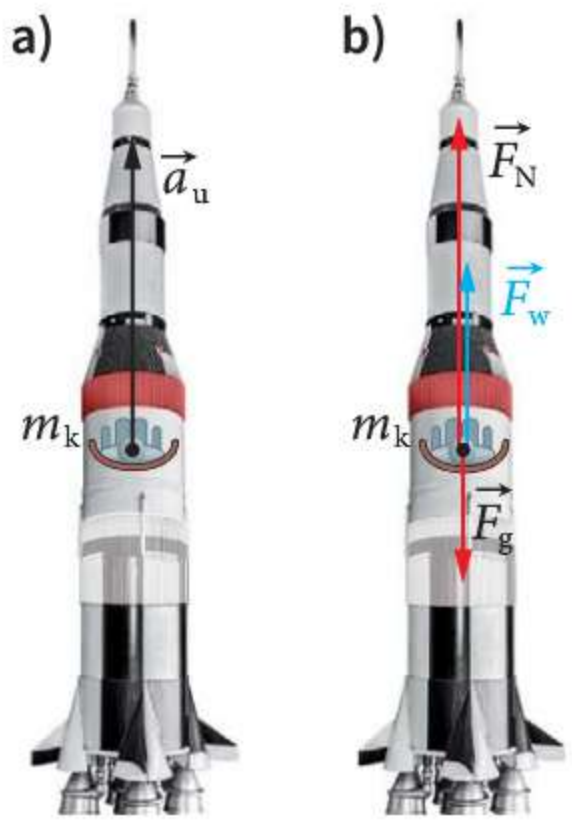
Zjawiska przeciążenia i niedociążenia podczas jednostajnie zmiennego ruchu windy omówiliśmy w przykładzie 10.6 w podręczniku do klasy pierwszej.

Znacznie większe (niż w windzie) przeciążenia występują np. w rakiecie kosmicznej podczas startu. Zanim rakieta osiągnie odpowiednią prędkość, porusza się z przyspieszeniem zwróconym pionowo w górę. Zgodnie z drugą zasadą dynamiki przyspieszenie nadaje rakiecie wypadkowa siły grawitacji i napędu (tj. siły odrzutu gazów spalinowych, wydobywających się przez dysze wylotowe). Wszystkie ciała wewnątrz rakiety mają względem Ziemi takie samo przyspieszenie $\vec{a}_u$ jak rakieta (rys. 17.1a). Jaka siła nadaje to przyspieszenie kosmonaucie? Jest to wypadkowa sił działających na kosmonautę, czyli siły grawitacji i siły nacisku, pochodzącej najczęściej od fotela, w którym kosmonauta spoczywa podczas startu (rys. 17.1b).

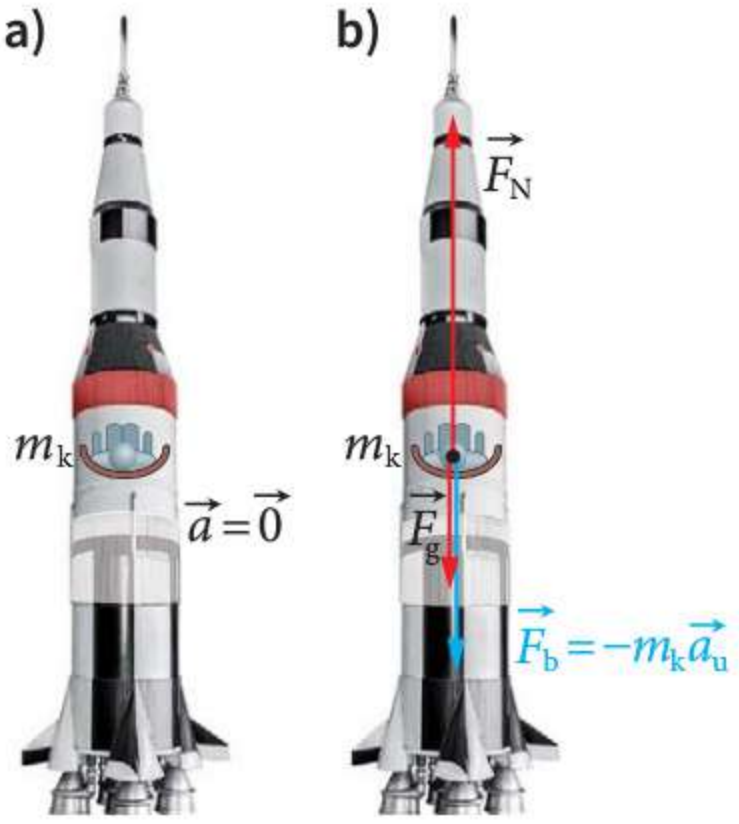
$$\vec{F}_g + \vec{F}_N = m_k \vec{a}_u \qquad F_N - F_g = m_k a_u$$

stąd:

$$F_N = F_g + m_k a_u$$



Rys. 17.1 Przyspieszenie kosmonauty w startującej rakiecie (a) oraz działające na niego siły (b) – względem układu inercjalnego Ziemi



Rys. 17.2 Przyspieszenie kosmonauty w startującej rakiecie (a) oraz działające na niego siły (b) – względem układu nieinercjalnego rakiety

Siła nacisku jest tym większa od siły grawitacji, im większe jest przyspieszenie rakiety. Jeśli fotel działa na kosmonautę siłą $\vec{F}_N$, to (zgodnie z trzecią zasadą dynamiki) kosmonauta działa na fotel siłą $\vec{F}'_N$ ($F'_N = F_N$), większą co do wartości niż siła grawitacji $\vec{F}_g$. Jak wiesz, stan ten nazywamy **stanem przeciążenia**.

Powyżej przedstawiliśmy wyjaśnienie stanu przeciążenia z punktu widzenia obserwatora związanego z Ziemią, którą w tym przypadku można uznać za inercjalny układ odniesienia. Natomiast w układzie nieinercjalnym związanym z rakietą kosmonauta spoczywa, więc wypadkowa wszystkich działających na niego sił rzeczywistych i siły bezwładności jest równa zeru (rys. 17.2).

$$\vec{F}_g + \vec{F}_N + \vec{F}_b = \vec{0} \qquad F_N - F_g - F_b = 0 \qquad F_N = F_g + F_b$$

stąd:

$$F_N = F_g + m_k a_u$$

Wynik rozumowania jest oczywiście taki sam jak poprzednio.

Skutki przeciążenia dla organizmu człowieka

Na ilustracjach poniżej pokazano sekwencję zdjęć pilota podczas naziemnego ekstremalnego testu przeciążeniowego (rys. 17.3).

Znaczne przeciążenia są szkodliwe dla organizmu ludzkiego szczególnie wtedy, gdy przyspieszenie $\vec{a}_u$ jest skierowane wzdłuż ciała. Gdy $\vec{a}_u$ jest zwrócone od nóg do głowy, stan przeciążenia powoduje odpływ krwi z mózgu i gromadzenie się jej w nogach i dolnych częściach tułowia; przy $a_u = 5g$ występuje niedostateczne ukrwienie siatkówki oczu, co może spowodować utratę zdolności widzenia lub nawet utratę przytomności. Gdy przyspieszenie $\vec{a}_u$ jest zwrócone od głowy do nóg, krew gromadzi się w mózgu



Rys. 17.3 Zdjęcia pilota podczas testu przeciążeniowego

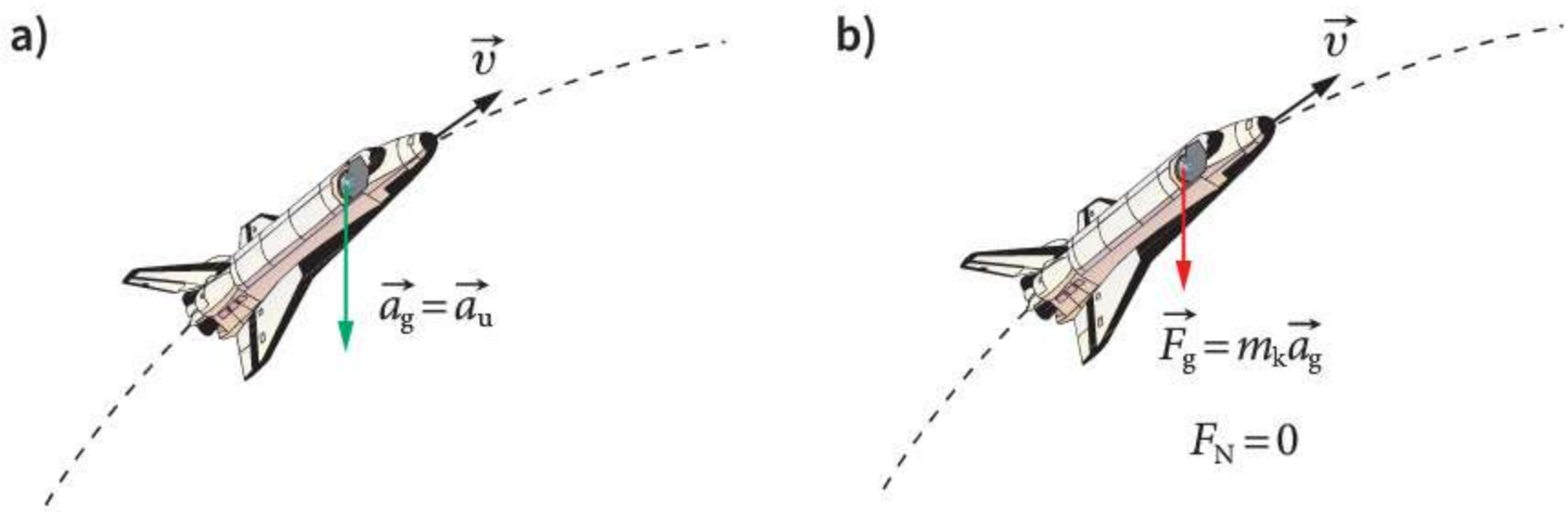
i płucach. Wywołuje to bóle głowy, krwawe wybroczyny w okolicach oczu, może spowodować krwotoki wewnętrzne w mózgu i płucach. Przyspieszenia poprzeczne (plecy – piersi) są mniej niebezpieczne dla zdrowia i życia. Ujemne skutki przeciążeń zależą nie tylko od wartości przyspieszenia, lecz także od szybkości jego wzrostu; powolny wzrost (np. o 0,1*g* w ciągu sekundy) stanowi mniejsze zagrożenie. Człowiek po odpowiednim treningu może dobrze znieść przyspieszenia o wartościach od 6*g* do 7*g*.
Badanie skutków przeciążeń i sposobów ich zmniejszania prowadzi się w biologii i medycynie kosmicznej. Na duże przeciążenia narażeni są nie tylko kosmonauci, lecz także piloci samolotów wojskowych czy kierowcy wyścigowi.

Stan nieważkości

Po wypaleniu się paliwa w silniku ostatniego członu rakiety człon ten zostaje odrzucony, a pozostała część pojazdu kosmicznego (w tym ewentualnie kabina z kosmonautami) porusza się już bez napędu, tzn. pozostaje **wyłącznie** pod działaniem pola grawitacyjnego[9]. Wówczas nie tylko znika przeciążenie, ale w ogóle nie występuje ważkość. Ciała w statku kosmicznym nie wywierają na siebie wzajemnie nacisku, czyli są w stanie nieważkości.

> Stan nieważkości polega na braku stałego występowania sił wzajemnego nacisku między ciałami w układzie ciał.

Występuje on niezależnie od tego, w jakim („w czyim") polu grawitacyjnym porusza się statek kosmiczny, a także niezależnie od toru, po którym się porusza (rys. 17.4). Nietrudno wykazać, że tak jest.



Rys. 17.4 Przyspieszenie kosmonauty w rakiecie poruszającej się bez napędu (a) oraz działająca na niego siła grawitacji (b)

Przeprowadzimy rozważania w układzie związanym ze źródłem pola grawitacyjnego (które, jak poprzednio, można uznać za układ inercjalny). Oznaczmy przyspieszenie grawitacyjne statku w dowolnym punkcie toru przez $\vec{a}_g$ (na statek działa jedynie siła grawitacji, a więc $\vec{a}_u = \vec{a}_g$). Wszystkie ciała wewnątrz statku mają w tym układzie

[9] Może to być pole grawitacyjne wypadkowe, które powstaje z nałożenia się pól grawitacyjnych różnych ciał niebieskich.

odniesienia takie samo przyspieszenie, jeśli tylko względem statku nie poruszają się z dodatkowymi przyspieszeniami. Jaka siła nadaje dowolnemu ciału w statku, a więc np. kosmonaucie, przyspieszenie $\vec{a}_g$? Oczywiście, jest to siła grawitacji i **tylko ona**! Gdyby na kosmonautę oprócz siły grawitacji działała jeszcze jakaś inna siła, pochodząca od dowolnego ciała w statku kosmicznym, np. od fotela, którego dotyka, lub ściany, wówczas wypadkowa tej siły i siły grawitacji nadawałaby kosmonaucie przyspieszenie inne niż $\vec{a}_g$. Wnioskujemy więc, że siła taka nie występuje.

Jeśli kosmonauta naciśnie na ścianę, siła reakcji ściany nada mu przyspieszenie względem kabiny, kosmonauta odbije się od niej i „popłynie" ruchem jednostajnym po prostej aż do zderzenia z innym przedmiotem (rys. 17.5). Nawet w przypadku ciał, które stykają się z sobą, nie występuje wzajemny nacisk w sposób ciągły. Kosmonauta może „siedzieć" w fotelu, ale wcale na niego nie naciska. Mamy więc do czynienia z nieważkością.



Rys. 17.5 W stanie nieważkości

Zauważ, że w polu grawitacyjnym **stan nieważkości może wystąpić tylko w układach nieinercjalnych** – statek kosmiczny poruszający się swobodnie w polu grawitacyjnym stanowi taki układ.

W naszych rozważaniach nie robiliśmy żadnych założeń dotyczących wartości przyspieszenia grawitacyjnego ani kształtu toru statku kosmicznego. Rozważania te są więc słuszne dla dowolnego ruchu postępowego pojazdu kosmicznego. Przypominamy, że kształt toru, po którym porusza się ciało w polu grawitacyjnym, zależy od warunków początkowych. Gdyby nadano ciału inną prędkość początkową $\vec{v}_0$, poruszałoby się ono po innym torze.
Po włączeniu silnika ruch pojazdu przestaje odbywać się jedynie pod działaniem siły grawitacji, zatem sytuacja radykalnie się zmienia – pojawia się ważkość.

Stan ważkości polega na stałym występowaniu sił wzajemnego nacisku pomiędzy ciałami w układzie ciał (na Ziemi, w rakiecie kosmicznej, w windzie). W polu grawitacyjnym stan ten występuje w takich układach ciał[10], na które prócz siły grawitacji działają jeszcze inne siły zewnętrzne.

Czy stan ważkości może występować w układzie ciał w przypadku nieobecności pola grawitacyjnego, np. gdzieś w odległych od planet i gwiazd obszarach przestrzeni kosmicznej? Tak, jeśli układ ciał będzie się poruszał ruchem zmiennym, jak np. rakieta z pracującym silnikiem odrzutowym. W układzie nieinercjalnym rakiety, poruszającym się z dowolnym przyspieszeniem $\vec{a}_u$, na każde ciało o masie m będzie działała siła bezwładności $\vec{F}_b = -m\vec{a}_u$. Obserwator w rakiecie w żaden sposób nie mógłby odróżnić, czy jest to siła grawitacji, czy siła bezwładności, bowiem obie te siły (i jedynie one!) są wprost proporcjonalne do masy ciała, na które działają.

Siła bezwładności może więc tworzyć „sztuczny ciężar" („sztuczną grawitację"). Inaczej mówiąc, taki układ nieinercjalny jest równoważny odpowiedniemu układowi pozostającemu pod działaniem pola grawitacyjnego. Stwierdzenie to nosi nazwę **zasady równoważności** (patrz zadanie 7 na s. 108).

W przypadku nieobecności pola grawitacyjnego stan nieważkości występowałby oczywiście w układach poruszających się ruchem jednostajnym po linii prostej, czyli inercjalnych.

ZADANIA

1. Często można usłyszeć **błędne** wypowiedzi na temat stanu nieważkości. Ich autorzy twierdzą, że stan nieważkości występuje np. w statku kosmicznym poruszającym się po orbicie (kilkaset kilometrów nad Ziemią!), gdyż na ciała nie działa tam siła ciężkości. Wyjaśnij, dlaczego takie stwierdzenie **jest fałszywe**.
2. Pomiędzy dwiema dość ciężkimi książkami (leżącymi jedna na drugiej) umieść kartkę papieru tak jak na rysunku 17.6 i spróbuj ją wysunąć, gdy książki:
   - leżą na stole,
   - spadają swobodnie.

   Wyjaśnij, dlaczego w drugim przypadku bardzo łatwo można wysunąć kartkę.

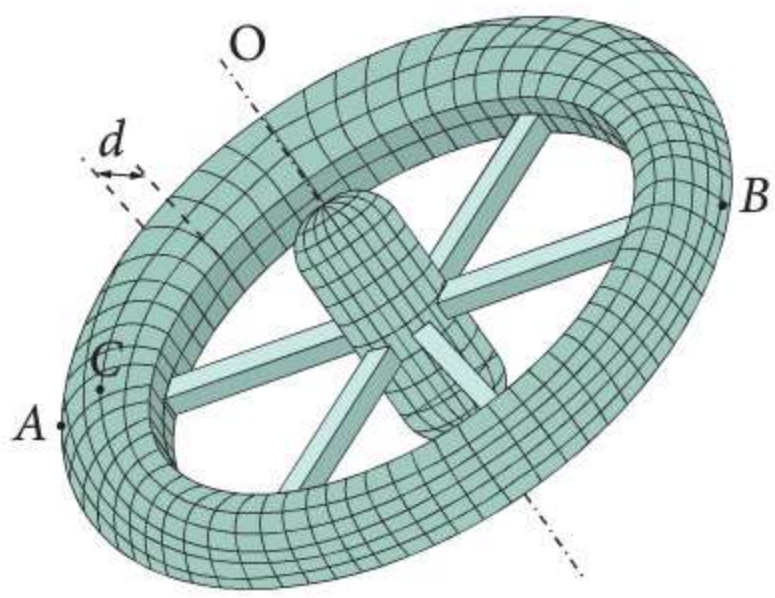


Rys. 17.6

3. Napełnioną wodą plastikową butelkę z niewielkimi otworami, przez które wypływała woda, puszczono swobodnie z wysokości kilku metrów. Zaobserwowano, że podczas spadania woda nie wypływa przez otworki. Wyjaśnij to zjawisko.

[10] Nie myl „układu ciał", o którym tutaj mowa, z „układem odniesienia". Siły działające na ciała w danym układzie ciał (winda, rakieta) możemy rozpatrywać w różnych układach odniesienia.

4. Wyobraź sobie, że siedzisz w fotelu w startującej rakiecie, plecami do Ziemi. Oblicz wartość siły, którą wskaże siłomierz zamocowany w oparciu fotela (pod twoimi plecami), gdy rakieta startuje z Ziemi pionowo z przyspieszeniem o wartości $a_{\mathrm{u}} = 2g$.
5. Wykaż występowanie stanu nieważkości w statku kosmicznym na podstawie rozważań w jego własnym układzie odniesienia, tzn. w układzie nieinercjalnym, który ma przyspieszenie $\vec{a}_{\mathrm{u}} = \vec{a}_{\mathrm{g}}$ względem źródła pola grawitacyjnego.
6. Które z wymienionych urządzeń będą działać prawidłowo w sztucznym satelicie Ziemi: zegar wahadłowy, zegarek elektroniczny, barometr rtęciowy, barometr puszkowy (tzw. aneroid), waga szalkowa, waga sprężynowa łazienkowa, lampa naftowa, latarka elektryczna? Uzasadnij odpowiedź.
7. Istnieje projekt zbudowania w XXI wieku stacji kosmicznej w celu akumulowania energii słonecznej i przesyłania jej na Ziemię w postaci mikrofal przenikających atmosferę, w tym chmury. Stację zaplanowano jako gigantyczne osiedle dla kilku tysięcy ludzi. Całość miałaby kształt opony, tzn. torusa o średnicy przekroju d równej w przybliżeniu $100\ \mathrm{m}$, wewnątrz którego byłoby zbudowane miasto (rys. 17.7).



Rys. 17.7

W celu wytworzenia sztucznej grawitacji opona ma wykonywać jeden obrót na minutę wokół osi O. Obrót ten ma zapewnić mieszkańcom pole „grawitacyjne", które w punktach położonych najdalej od osi miałoby natężenie o takiej wartości jak na Ziemi. Prócz komunikacji samochodowej po torze biegnącym wzdłuż całego pierścienia i stanowiącym główną ulicę miasta przewiduje się możliwość podróżowania do odległych miejsc czterema windami. Windy będą kursowały specjalnymi tunelami w piaście koła w stronę centrum i odwrotnie (w centrum należy się przesiąść).
Odpowiedz na następujące pytania:

a) Gdzie dla mieszkańców stacji jest „góra", a gdzie „dół"?
b) Jakich wrażeń dozna pasażer podróżujący windą „w górę" i „w dół", jeśli windy poruszają się ruchem jednostajnym względem tuneli?
c) Jaką drogę musi przebyć mieszkaniec miasta, aby (bez korzystania z wind) dostać się z punktu A do punktu B?
d) O ile procent zmniejszy się „ciężar" mieszkańca, który przejdzie z punktu A do punktu C? Przyjmij, że $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$.

Podczas analizowania tych zagadnień pomiń zewnętrzne pole grawitacyjne.



O odkryciach Kopernika i Keplera

Mikołaj Kopernik w 1543 roku ogłosił teorię heliocentryczną, mówiącą, że Ziemia (wraz z obiegającym ją Księżycem) i inne planety krążą wokół Słońca po torach zbliżonych kształtem do okręgów.
Półtora wieku później Johannes Kepler, na podstawie wyników wieloletnich obserwacji astronomicznych, sformułował trzy prawa rządzące ruchem planet.

Pierwsze prawo Keplera
Orbita każdej planety jest elipsą. Słońce znajduje się w jednym z jej ognisk, wspólnym dla orbit wszystkich planet.

Drugie prawo Keplera
Promień wodzący planety (czyli odcinek łączący planetę ze Słońcem) zakreśla w jednakowych odstępach czasu figury o takich samych polach powierzchni.
Drugie prawo Keplera jest konsekwencją zachowania momentu pędu planet obiegających Słońce.

Trzecie prawo Keplera
Iloraz kwadratu okresu obiegu planety i trzeciej potęgi średniej odległości od Słońca jest jednakowy dla wszystkich planet Układu Słonecznego.

$$\frac{T^2}{r^3} = \text{const}$$

Trzecie prawo Keplera można stosować dla każdego układu satelitów obiegających to samo ciało.



Prawo powszechnej grawitacji

Isaac Newton sformułował hipotezę o jedności świata, zgodnie z którą prawa fizyki obowiązujące dla ciał na Ziemi można stosować również do planet i gwiazd. Konsekwencją tej hipotezy i wniosków z trzeciego prawa Keplera było sformułowanie prawa powszechnej grawitacji:

Każde dwa ciała przyciągają się wzajemnie siłami grawitacji.
Wartość siły grawitacji, którą przyciągają się dwa punkty materialne lub dwie kule o sferycznie symetrycznym rozkładzie gęstości, jest wprost proporcjonalna do iloczynu ich mas i odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości między ich środkami.

$$F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Współczynnikiem proporcjonalności we wzorze na siłę grawitacji jest stała grawitacji:

$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2}$$

Ze względu na bardzo małą wartość liczbową tej stałej otaczające nas przedmioty oddziałują na siebie tak niewielkimi siłami grawitacji, że nie obserwujemy skutków tych oddziaływań. Widzimy natomiast skutki oddziaływań grawitacyjnych tych ciał z Ziemią, ponieważ jej masa jest ogromna w porównaniu z masą ciał znajdujących się wokół nas.



Pierwsza prędkość kosmiczna

Do utrzymania naturalnego lub sztucznego satelity na orbicie kołowej konieczne jest działanie siły dośrodkowej, której rolę odgrywa siła grawitacji: $\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$.

Wartość prędkości satelity obiegającego ciało centralne o masie M po orbicie o promieniu r wyraża się wzorem: $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$.

Jeśli promień orbity satelity $r \approx R_{\text{ciała centralnego}}$, to jego prędkość nazywamy pierwszą prędkością kosmiczną.

Pierwsza prędkość kosmiczna dla Ziemi to prędkość o kierunku poziomym, którą trzeba nadać ciału, aby okrążało Ziemię tuż nad jej powierzchnią: $v_{\text{I}} = \sqrt{\frac{GM_{\text{Z}}}{R_{\text{Z}}}} \approx 7{,}9\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$.

Ze względu na obecność atmosfery satelita nie może krążyć na wysokości h mniejszej niż $160\ \text{km}$ nad Ziemią, więc jego prędkość:

$$v = \sqrt{\frac{GM_{\text{Z}}}{R_{\text{Z}} + h}} < v_{\text{I}}$$

Wartość **pierwszej prędkości kosmicznej dla innych planet** wyrażamy wzorem:

$$v_{\text{I}} = \sqrt{\frac{GM_{\text{planety}}}{R_{\text{planety}}}}$$

Szczególnym rodzajem satelitów Ziemi są satelity geostacjonarne. Satelita geostacjonarny krąży z zachodu na wschód po orbicie leżącej w płaszczyźnie równika, a okres jego obiegu jest równy okresowi ruchu obrotowego Ziemi. Satelita geostacjonarny „wisi" stale nad tym samym punktem na równiku.

Promień orbity geostacjonarnej $r = \sqrt[3]{\frac{GM_{\text{Z}}T^2}{4\pi^2}} \approx 42\,200\,\text{km}.$



Natężenie pola grawitacyjnego

Do opisu oddziaływań grawitacyjnych używamy pojęcia **pola grawitacyjnego**.

Pole grawitacyjne badamy za pomocą punktowego ciała próbnego o masie zwanej **masą próbną**, a przedstawiamy graficznie za pomocą **linii pola**. W każdym punkcie pola pokazują one kierunek i zwrot siły grawitacji działającej na ciało próbne umieszczone w tym punkcie.

Pole wytworzone przez ciało punktowe lub kuliste (kulę jednorodną lub kulę o symetrycznym rozkładzie gęstości względem środka) jest **polem centralnym**.

Wektorową wielkością fizyczną charakteryzującą ilościowo pole grawitacyjne w danym punkcie jest **natężenie pola grawitacyjnego**, zdefiniowane wzorem:

$$\vec{\gamma} = \frac{\vec{F}_{\text{g}}}{m}$$

Jednostką natężenia pola grawitacyjnego w SI jest $1\,\frac{\text{N}}{\text{kg}} = 1\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Natężenie pola grawitacyjnego w danym punkcie informuje, jaka siła grawitacji działa na umieszczone w tym punkcie ciało próbne o jednostkowej masie.

Od czego zależy wartość natężenia centralnego pola grawitacyjnego?

$$\gamma = \frac{GM}{r^2} \quad \text{dla} \quad r \geqslant R$$

Natężenie **centralnego pola grawitacyjnego** jest wprost proporcjonalne do masy źródła pola, a odwrotnie proporcjonalne do kwadratu odległości między jego środkiem a danym punktem pola grawitacyjnego.

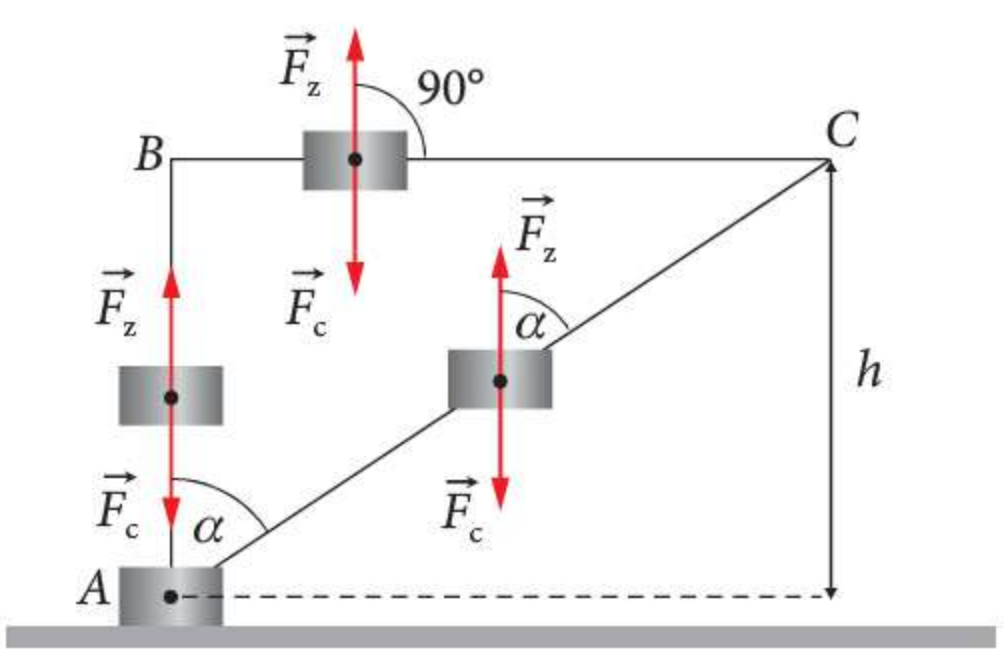
W niewielkim obszarze w pobliżu powierzchni Ziemi (której promień jest równy R) pole grawitacyjne możemy uważać za **jednorodne**. Dla odległości $h \ll R$ wektory natężeń są w przybliżeniu równoległe, a ich wartości jednakowe: $\frac{GM}{R^2} \approx \frac{GM}{(R+h)^2}$.

W każdym punkcie pola grawitacyjnego przyspieszenie grawitacyjne $\vec{a}_\mathrm{g} = \frac{\vec{F}_\mathrm{g}}{m}$, uzyskane przez ciało poruszające się swobodnie (tylko pod działaniem siły grawitacji), jest takie samo jak natężenie pola grawitacyjnego $\vec{\gamma} = \frac{\vec{F}_\mathrm{g}}{m}$ w tym punkcie. Różnica między tymi wielkościami fizycznymi polega na tym, że natężenie $\vec{\gamma}$ jest cechą punktu pola, a przyspieszenie $\vec{a}_\mathrm{g}$ jest cechą swobodnego ruchu ciała w danym punkcie toru.



Praca w polu grawitacyjnym

W jednorodnym polu grawitacyjnym pracę siły zewnętrznej (równoważącej w każdym punkcie siłę ciężkości) wykonaną przy przesuwaniu ciała między dwoma punktami oraz pracę siły ciężkości (siły pola) obliczamy za pomocą wzoru na pracę stałej siły:



$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = |\vec{F}||\Delta\vec{r}| \cos\sphericalangle(\vec{F}, \Delta\vec{r})$$

$$W_{\mathrm{z},\ \mathrm{A}\to\mathrm{B}\to\mathrm{C}} = W_{\mathrm{z},\ \mathrm{A}\to\mathrm{C}} = mgh$$

$$W_{\text{siły pola},\ \mathrm{A}\to\mathrm{B}\to\mathrm{C}} = W_{\text{siły pola},\ \mathrm{A}\to\mathrm{C}} = -mgh$$

W centralnym polu grawitacyjnym **pracę siły zewnętrznej** (równoważącej w każdym punkcie siłę grawitacji) wykonaną podczas przemieszczania ciała pomiędzy dwoma punktami pola wyrażamy wzorem:

$$W_{\mathrm{z},\ \mathrm{A}\to\mathrm{B}} = GMm\left(\frac{1}{r_\mathrm{A}} - \frac{1}{r_\mathrm{B}}\right)$$

a **pracę siły pola** – wzorem:

$$W_{\text{siły pola},\ \mathrm{A}\to\mathrm{B}} = -GMm\left(\frac{1}{r_\mathrm{A}} - \frac{1}{r_\mathrm{B}}\right) = GMm\left(\frac{1}{r_\mathrm{B}} - \frac{1}{r_\mathrm{A}}\right)$$

Prace sił pola i równoważących je sił zewnętrznych różnią się tylko znakiem.

Praca w polu grawitacyjnym nie zależy od drogi i kształtu toru, więc **dowolne pole grawitacyjne** niezmieniające się z upływem czasu **jest polem zachowawczym**, a siła grawitacji – **siłą zachowawczą**.



Energia potencjalna ciała w polu grawitacyjnym

Ze zmianą odległości ciała od źródła pola grawitacyjnego **zawsze** jest związana zmiana jego grawitacyjnej energii potencjalnej:

$$\Delta E_{\mathrm{p}} = GMm\left(\frac{1}{r_{\mathrm{A}}} - \frac{1}{r_{\mathrm{B}}}\right)$$

Ta zmiana **jest równa pracy siły pola grawitacyjnego ze znakiem minus** (lub pracy siły zewnętrznej równoważącej w każdym punkcie pola siłę grawitacji).
W każdym polu zachowawczym zmiana energii potencjalnej ciała przy zmianie jego położenia jest jednoznacznie określona.
W celu wyprowadzenia wzoru na energię potencjalną w danym punkcie centralnego pola grawitacyjnego przyjęto umowę, że energia potencjalna grawitacyjna ciała jest równa zeru w nieskończoności, gdzie nie działa już na ciało siła grawitacji. Po skorzystaniu ze wzoru:

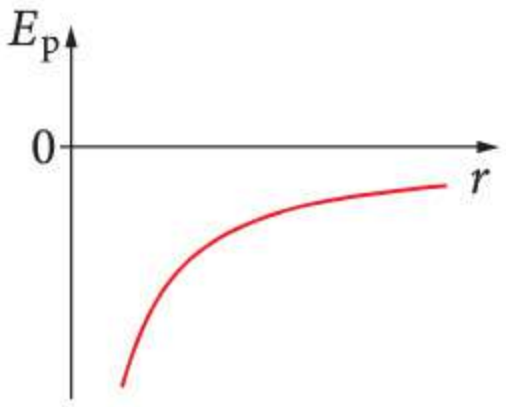
$$\Delta E_{\mathrm{p}} = 0 - E_{\mathrm{p,\,A}} = \left[GMm\left(\frac{1}{r_{\mathrm{A}}} - \frac{1}{r_{\mathrm{B}}}\right)\right]_{r_{\mathrm{B}}\to\infty}$$

otrzymujemy:

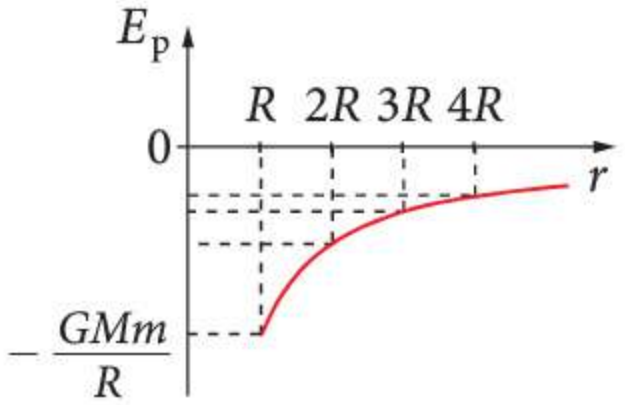
$$E_{\mathrm{p}} = -\frac{GMm}{r}$$

Energia potencjalna ciała w centralnym polu grawitacyjnym jest ujemna.

punktowe źródło pola



źródłem pola jest ciało kuliste





Potencjał pola grawitacyjnego (uzupełnienie)

Skalarną wielkością fizyczną charakteryzującą ilościowo pole grawitacyjne w danym punkcie jest **potencjał pola grawitacyjnego**, zdefiniowany wzorem:

$$V = \frac{E_{\mathrm{p}}}{m}$$

Jednostką potencjału pola grawitacyjnego w SI jest $1\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}} = 1\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$.

Potencjał pola grawitacyjnego w danym punkcie informuje, jaką energię potencjalną miałoby umieszczone w tym punkcie ciało próbne o masie $1\ \mathrm{kg}$.

W dowolnym polu grawitacyjnym na podstawie rozkładu potencjału możemy obliczyć pracę siły pola przy zmianie położenia ciała:

$$W_{\text{siły pola, A}\to\text{B}} = -m(V_{\mathrm{B}} - V_{\mathrm{A}}) = m(V_{\mathrm{A}} - V_{\mathrm{B}})$$

Rozkład potencjału zależy od rodzaju pola grawitacyjnego.
Potencjał centralnego pola grawitacyjnego:

$$V(r) = \frac{-GM}{r}$$

Potencjał jednorodnego pola grawitacyjnego:

$$V(h) = gh$$



Druga prędkość kosmiczna

Najmniejszą prędkość, którą trzeba nadać ciału startującemu z powierzchni Ziemi, aby oddaliło się do nieskończoności, nazywamy **drugą prędkością kosmiczną** (lub prędkością ucieczki) dla Ziemi.

Jej wartość (v_{II}) obliczamy z zasady zachowania energii mechanicznej (przy założeniu, że na poruszające się ciało nie oddziałują inne ciała niebieskie, oraz przy pominięciu oporu powietrza w atmosferze):

$$-G\frac{Mm}{r} + \frac{mv_{\mathrm{II}}^2}{2} = 0$$

$$v_{\mathrm{II}} = \sqrt{\frac{2GM_{\mathrm{Z}}}{R_{\mathrm{Z}}}}$$

$$v_{\mathrm{II}} \approx 11{,}2\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

Wartość drugiej prędkości kosmicznej, którą trzeba nadać ciału na innej planecie:

$$v_{\mathrm{II}} = \sqrt{\frac{2GM_{\mathrm{planety}}}{R_{\mathrm{planety}}}}$$

Pomiędzy pierwszą i drugą prędkością kosmiczną zachodzi związek:

$$v_{\mathrm{II}} = \sqrt{2}v_{\mathrm{I}}$$



Stan przeciążenia. Stany nieważkości i niedociążenia

Na co dzień mamy do czynienia ze **stanem ważkości**, polegającym na stałym występowaniu sił wzajemnego nacisku pomiędzy ciałami w układach, na które oprócz siły grawitacji działają jeszcze inne siły zewnętrzne.

Jeżeli siły wzajemnego nacisku mają wartość:

- większą od wartości ciężaru ciała, jest ono w **stanie przeciążenia**;
- mniejszą od wartości ciężaru ciała, jest ono w **stanie niedociążenia**;
- równą zeru, ciało jest w **stanie nieważkości**.

Stan nieważkości polega na braku stałego występowania sił wzajemnego nacisku między ciałami w układzie ciał. Stan ten występuje w układach poruszających się **jedynie** pod wpływem sił pola grawitacyjnego, czyli w **układach nieinercjalnych**, których przyspieszenie jest równe przyspieszeniu grawitacyjnemu.

Siła bezwładności $\vec{F}_{\mathrm{b}} = -m\vec{a}_{\mathrm{u}}$, działająca na ciało o masie m w układzie nieinercjalnym poruszającym się z dowolnym przyspieszeniem $\vec{a}_{\mathrm{u}}$, może tworzyć „**sztuczną grawitację**”. Obserwator w układzie nieinercjalnym nie jest w stanie odróżnić siły grawitacji od siły bezwładności, ponieważ obie te siły są wprost proporcjonalne do masy ciała, na które działają.

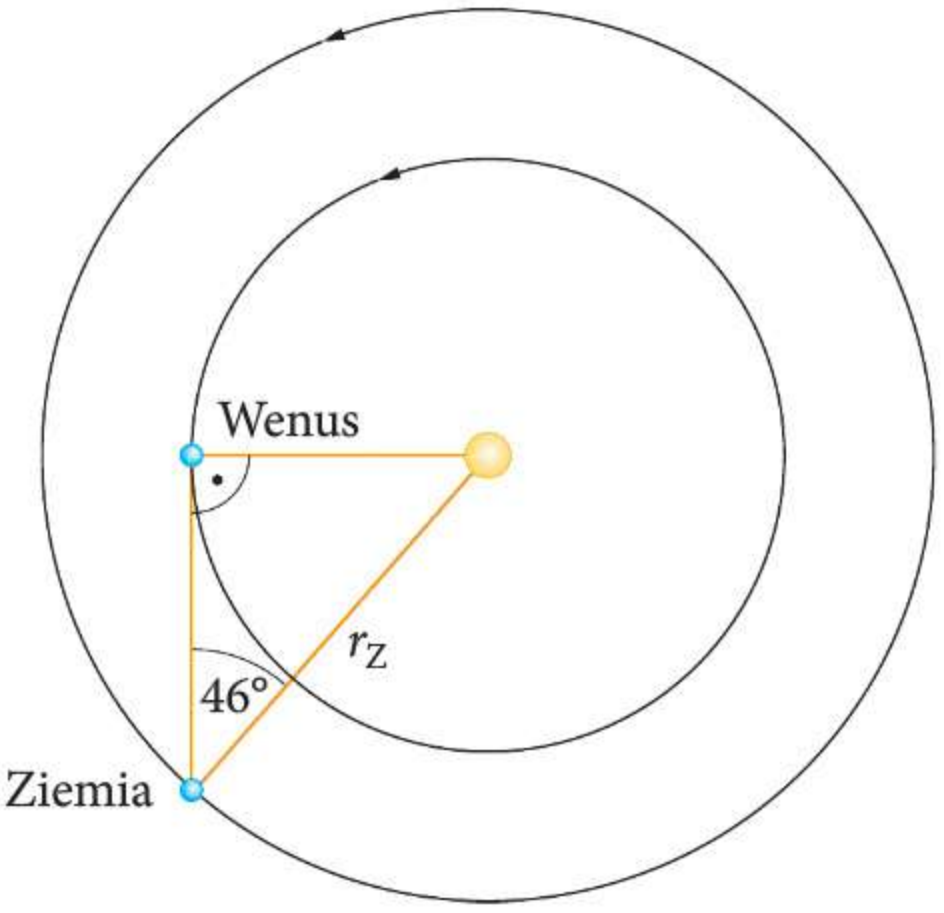
Zasada równoważności

Układ nieinercjalny jest równoważny odpowiedniemu układowi pozostającemu pod działaniem pola grawitacyjnego.

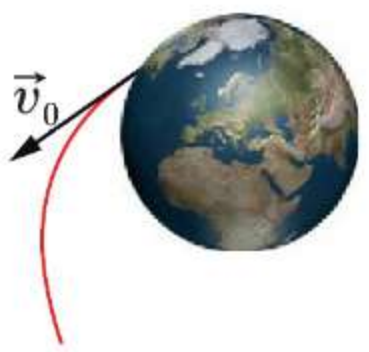
ZADANIA POWTÓRZENIOWE

1. Rysunek przedstawia konfigurację Wenus, Ziemi i Słońca w chwili, w której kąt zawarty między odcinkiem łączącym Ziemię i Wenus a odcinkiem poprowadzonym od Ziemi do Słońca jest największy, równy $46°$.

Oszacuj wartość wypadkowej sił grawitacji, którymi Słońce i Ziemia działają na Wenus. Przyjmij, że $r_Z = 150 \cdot 10^6\ \text{km}$, $M_S = 2 \cdot 10^{30}\ \text{kg}$, $M_Z = 6 \cdot 10^{24}\ \text{kg}$, $GM_W = 3{,}25 \cdot 10^{14}\ \text{m}^3/\text{s}^2$.



2. Przerysuj do zeszytu i uzupełnij poniższą tabelę. Wpisz w luki odpowiednie wartości prędkości.

 Torem ruchu pocisku jest okrąg o promieniu równym promieniowi planety.	$v_{0\ \text{pocisku}} \approx$ ▨
 Torem ruchu pocisku jest elipsa.	▨ $< v_{0\ \text{pocisku}} <$ ▨
 Pocisk oddala się do nieskończoności.	$v_{0\ \text{pocisku}} \geqslant$ ▨

3. Ciało o masie $10\ \mathrm{kg}$ podniesiono za pomocą balonu z powierzchni Ziemi na wysokość $1\ \mathrm{km}$. **Oblicz przyrost energii potencjalnej tego ciała dwoma sposobami:**

a) skorzystaj ze wzoru na energię potencjalną w jednorodnym polu grawitacyjnym ($g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$),

b) zastosuj wzór na energię potencjalną w centralnym polu grawitacyjnym ($R_Z = 6{,}37 \cdot 10^6\ \mathrm{m}$, $M_Z = 5{,}97 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$, $G = 6{,}672 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$).

Skomentuj otrzymane wyniki.

c) Oceń prawdziwość poniższych zdań. Wskaż P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F, jeśli jest fałszywe.

1.	Błąd względny, który popełniamy, obliczając przyrost energii potencjalnej ciała podniesionego na wysokość 1 km nad powierzchnię Ziemi według wzoru stosowanego w jednorodnym polu grawitacyjnym, jest rzędu setnych części procenta.	**P**	**F**
2.	Błąd względny, o którym jest mowa w zdaniu 1, wzrasta wraz ze wzrostem masy podniesionego ciała.	**P**	**F**

4. Satelita obiega Ziemię po orbicie kołowej na wysokości $330\ \mathrm{km}$ nad jej powierzchnią. Promień Ziemi to $R_Z = 6{,}37 \cdot 10^6\ \mathrm{m}$.

4.1. Oblicz szybkość satelity na tej orbicie. Przyjmij, że $GM_Z = 4 \cdot 10^{14}\ \mathrm{m^3/s^2}$.

4.2. Wskaż poprawne dokończenie zdania.

Gdyby satelicie nadano na tej wysokości prędkość o wartości równej $7{,}9\ \mathrm{km/s}$, równolegle do powierzchni Ziemi, to

A. spadłby na Ziemię.

B. poruszałby się po okręgu o promieniu nieco większym niż $6{,}7 \cdot 10^6\ \mathrm{m}$.

C. poruszałby się po elipsie.

D. oddaliłby się do nieskończoności.

4.3. Oceń prawdziwość poniższych zdań. Wskaż P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F, jeśli jest fałszywe.

1.	Związek między energią kinetyczną i energią potencjalną satelity na orbicie o dowolnym promieniu ma postać $E_k = \frac{\lvert E_p \rvert}{2}$.	**P**	**F**
2.	Całkowita energia satelity na orbitach o różnych promieniach jest taka sama.	**P**	**F**

5. Możemy przyjąć z dobrym przybliżeniem, że Ziemia jest kulą o promieniu $R_Z = 6{,}37 \cdot 10^6\ \mathrm{m}$, okres jej ruchu obrotowego $T = 24\ \mathrm{h}$, $GM_Z = 4 \cdot 10^{14}\ \mathrm{m^3/s^2}$, a $\pi^2 = 10$.

a) Zgodnie z trzecim prawem Keplera iloraz r^3/T^2 ma stałą wartość, jednakową dla wszystkich satelitów obiegających to samo ciało centralne.
Oblicz wartość liczbową tej stałej dla satelitów Ziemi.

b) Skorzystaj z wyniku otrzymanego w punkcie a zadania i oblicz promień orbity geostacjonarnej oraz szybkość liniową satelity na tej orbicie.

c) Satelitę o masie $m = 100\ \text{kg}$, spoczywającego początkowo na powierzchni Ziemi, wprowadzono na orbitę geostacjonarną.
Oblicz zmianę całkowitej energii mechanicznej satelity. Załóż, że satelita oddziałuje grawitacyjnie tylko z Ziemią. Pomiń ruch obrotowy Ziemi i obecność atmosfery.

d) W celu wprowadzenia satelity na orbitę geostacjonarną wykonano pracę W równą zmianie jego całkowitej energii mechanicznej (punkt c zadania).
Oblicz, jaka część tej pracy została zużyta na wyniesienie satelity na orbitę, a jaka – na nadanie mu tam energii kinetycznej.

e) Czy dla satelitów wprowadzanych z Ziemi na orbity kołowe inne niż stacjonarna prace wykonane w celu wyniesienia satelity na orbitę i na nadanie mu tam energii kinetycznej pozostają w takich samych proporcjach jak dla satelity stacjonarnego?
Odpowiedz na powyższe pytanie i uzasadnij odpowiedź.

6. Z Ziemi wystrzelono rakietę służącą do testowania nowych rozwiązań technicznych.

a) Oblicz wartość siły nacisku manekina kosmonauty o masie $m = 80\ \text{kg}$ na poziomo ustawiony fotel podczas kilku pierwszych sekund pionowego startu rakiety przy założeniu, że rakieta poruszała się wówczas z przyspieszeniem o wartości $a_\text{u} = 3g$. Przyjmij, że $g = 10\ \text{m/s}^2$.

b) Silniki rakiety uległy awarii w odległości $3R_\text{Z}$ od miejsca wystrzelenia.
Załóż, że rakieta oddziałuje tylko z Ziemią, wykonaj odpowiednie obliczenia i zapisz warunek, który spełniała szybkość rakiety w chwili awarii, jeśli:
- **powróciła ona na Ziemię,**
- **nie powróciła ona na Ziemię.**

Przyjmij, że $GM_\text{Z} = 4 \cdot 10^{14}\ \text{m}^3/\text{s}^2$, a $R_\text{Z} = 6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m}$.

c) Wyprowadź wzór na wartość prędkości v', z którą rakieta weszłaby w górne warstwy atmosfery o grubości h, gdyby w chwili awarii miała szybkość v_1 umożliwiającą powrót na Ziemię.

d) Wyprowadź wzór na wartość prędkości v'', z którą rakieta poruszałaby się w bardzo dużej odległości od Ziemi, gdyby w chwili awarii miała szybkość v_2 uniemożliwiającą powrót na Ziemię.

7. Odosobniona gwiazda o stałej masie M i promieniu R, wirująca z szybkością kątową ω skurczyła się tak, że jej promień zmniejszył się o 25%.

a) Oblicz szybkość kątową gwiazdy po zmianie jej promienia.

b) Oblicz i wyraź w procentach względną zmianę gęstości tej gwiazdy.

c) Oblicz, ile razy wzrosła wartość przyspieszenia grawitacyjnego na powierzchni skurczonej gwiazdy.

d) Załóżmy, że gwiazdę obiegał naturalny satelita. Czy skurczenie się gwiazdy miało wpływ na jego ruch? Uzasadnij odpowiedź.



ELEMENTY ASTRONOMII

- Układ Słoneczny
- Jednostka astronomiczna i parsek
- Nasze miejsce we Wszechświecie
- Prawo Hubble’a
- Wiek Wszechświata
- Teoria Wielkiego Wybuchu





18. Układ Słoneczny

- Słońce
- Planety grupy ziemskiej
- Planety olbrzymy
- Księżyce planet
- Planety karłowate
- Drobne ciała w Układzie Słonecznym

Przypomnij sobie wiadomości z geografii o budowie Układu Słonecznego.

Układem Słonecznym nazywamy Słońce wraz z zespołem ciał niebieskich będących w zasięgu jego oddziaływania grawitacyjnego. W skład układu planetarnego wokół Słońca wchodzą: **osiem planet** wraz z obiegającymi je księżycami, mniejsze ciała niebieskie, tj. **planety karłowate, planetoidy, meteoroidy, komety**, a także **materia międzyplanetarna**. Te ciała układu planetarnego nie świecą własnym światłem i mogą być dostrzeżone tylko dlatego, że oświetla je Słońce.

Nasza wiedza o Układzie Słonecznym jest dziś znacznie większa niż kilka dekad temu dzięki gwałtownemu rozwojowi badań kosmicznych. Pierwsze bezzałogowe sondy kosmiczne dotarły do Księżyca w 1959 roku, a dziesięć lat później na Srebrnym Globie wylądowali ludzie. Sondy kosmiczne zbliżyły się do wszystkich planet, przy czym na Wenus i Marsie także miękko wylądowały. W styczniu 2005 roku na powierzchni jednego z księżyców Saturna – Tytanie – łagodnie osiadła sonda kosmiczna Cassini-Huygens, wystrzelona w ramach wspólnego projektu amerykańsko-europejskiego, a w sierpniu tego samego roku japońska sonda Hayabusa wylądowała na powierzchni niewielkiej planetoidy o nazwie Itokawa.

Ostatnie lata przyniosły liczne odkrycia wielu innych układów planetarnych oraz pojedynczych planet obiegających gwiazdy. Planety te nazywamy **egzoplanetami**. Do połowy 2019 roku potwierdzono odkrycie ok. 4000 planet pozasłonecznych.

Słońce

W samym centrum Układu Słonecznego znajduje się **Słońce** – najbliższa nam gwiazda. Słońce jest gazową kulą o średnicy 1,4 miliona km, ponad 100 razy większej niż średnica Ziemi. Skład chemiczny naszej gwiazdy to w 73,5% wodór oraz w 24,8% hel. Cięższe pierwiastki (tlen, węgiel, żelazo, neon, azot i inne) stanowią niespełna 2% jego masy. Masa Słońca jest 330 000 razy większa od masy Ziemi i stanowi 99,86% masy wszystkich ciał Układu Słonecznego.

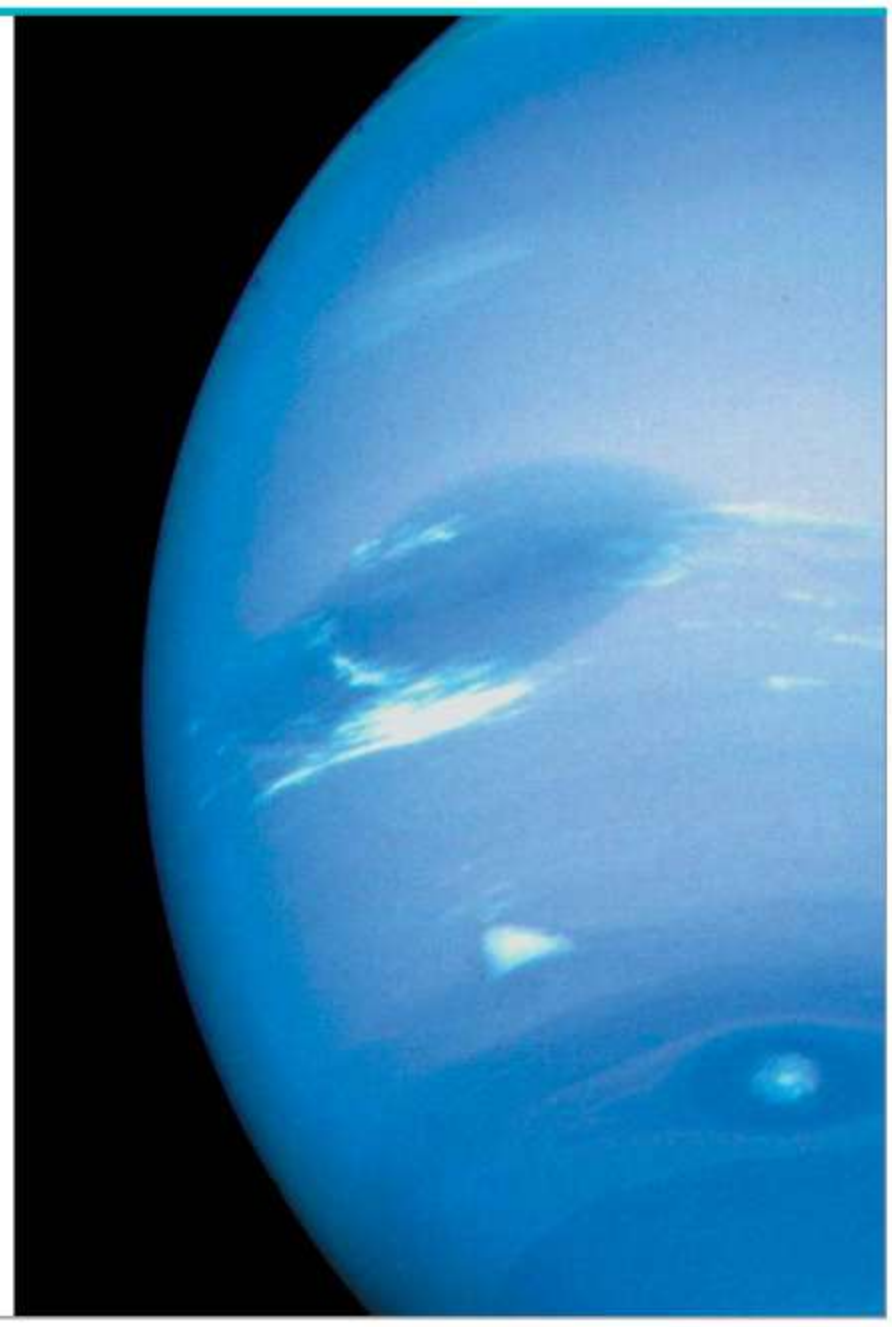
Źródłem energii słonecznej są zachodzące we wnętrzu Słońca reakcje termojądrowe, o charakterze podobnym do reakcji zachodzących w trakcie wybuchu bomby wodorowej. Będzie o nich mowa w klasie czwartej. W ich wyniku Słońce w każdej sekundzie wypromieniowuje ze swojej powierzchni, o temperaturze 5800 K, olbrzymią energię, równą $3{,}85 \cdot 10^{26}$ J. Wobec tego **moc promieniowania Słońca** wynosi $3{,}85 \cdot 10^{26}$ W.

Największymi ciałami w Układzie Słonecznym (oprócz Słońca) są planety. Już w starożytności znano Merkurego, Wenus, Marsa, Jowisza i Saturna. Uran został odkryty przypadkowo w 1781 roku przez brytyjskiego astronoma Williama Herschela, Neptuna odkryto w pierwszej połowie XIX wieku.

WIEDZIEĆ WIĘCEJ

Odkrycie Neptuna

W pierwszej połowie XIX wieku podczas obserwacji Urana stwierdzono, że jego ruch ulega zakłóceniom (perturbacjom) i pozycja tej planety odbiega od toru przewidywanego przez prawa Keplera. Słusznie zauważono, że perturbacje o charakterze grawitacyjnym mogą być powodowane przez nieznaną planetę zbliżającą się okresowo do Urana. Żmudne obliczenia mające na celu odkrycie hipotetycznej planety wykonali niezależnie Urbain Jean Le Verrier we Francji oraz John Couch Adams w Anglii. Wynikami tych obliczeń zainteresował się niemiecki astronom Johann Galle i w 1846 roku w miejscu wskazanym przez francuskiego astronoma odkrył poszukiwaną planetę, którą nazwano Neptunem.



Pod względem budowy planety dzielimy na dwie grupy:

- planety typu ziemskiego,
- planety olbrzymy.

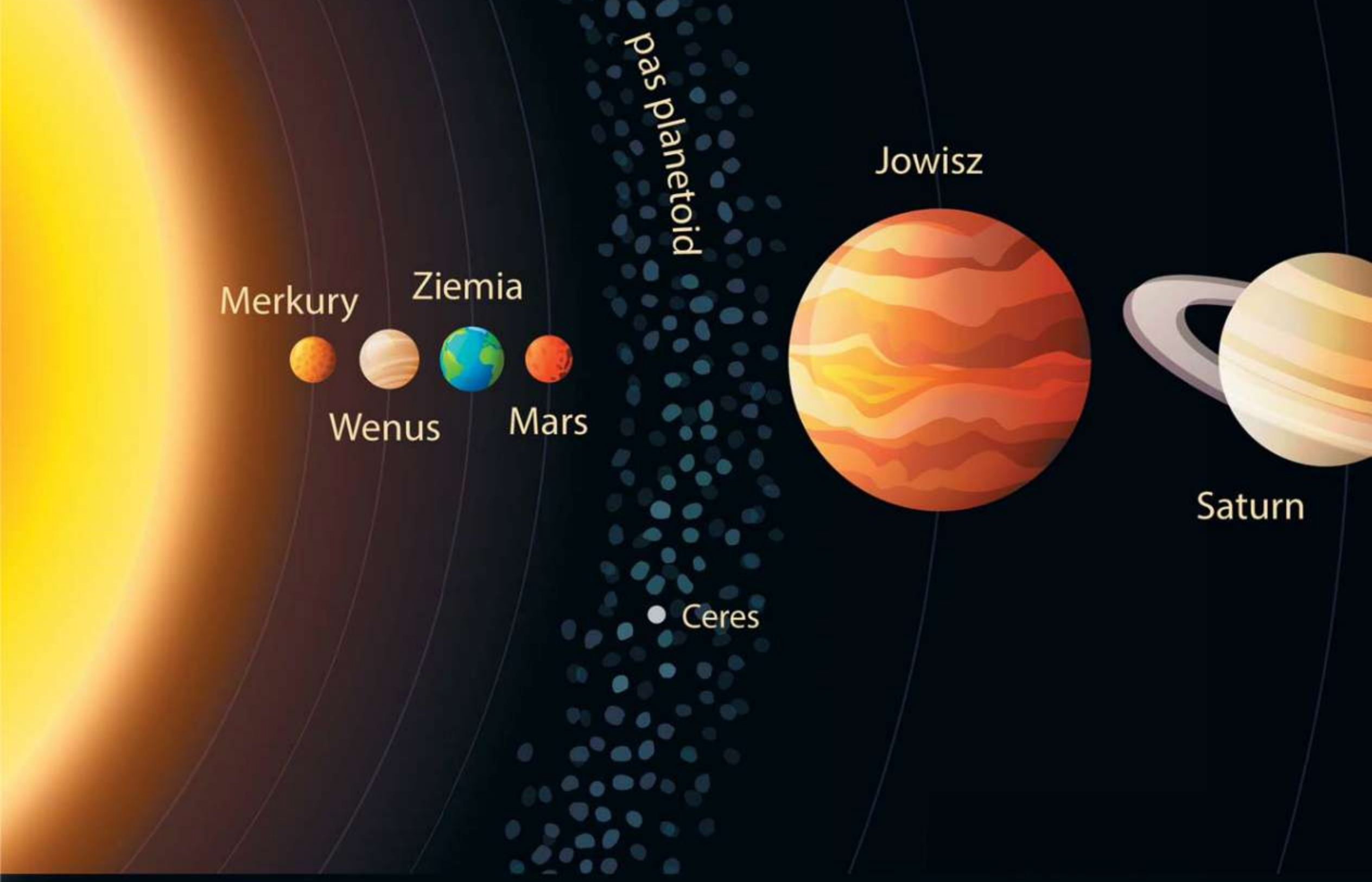
Planety typu ziemskiego

Do tej grupy oprócz Ziemi należą: Merkury, Wenus i Mars. Mają rozmiary zbliżone do naszej planety i charakteryzują się średnią gęstością większą niż 3,3 g/cm^3. Na ich twardych powierzchniach widoczne są kratery, które utworzyły się wskutek uderzeń mniejszych ciał niebieskich.

Również na powierzchni Księżyca znajduje się wiele mniejszych i większych kraterów, których fotografie przesłały m.in. statki kosmiczne programu Apollo.

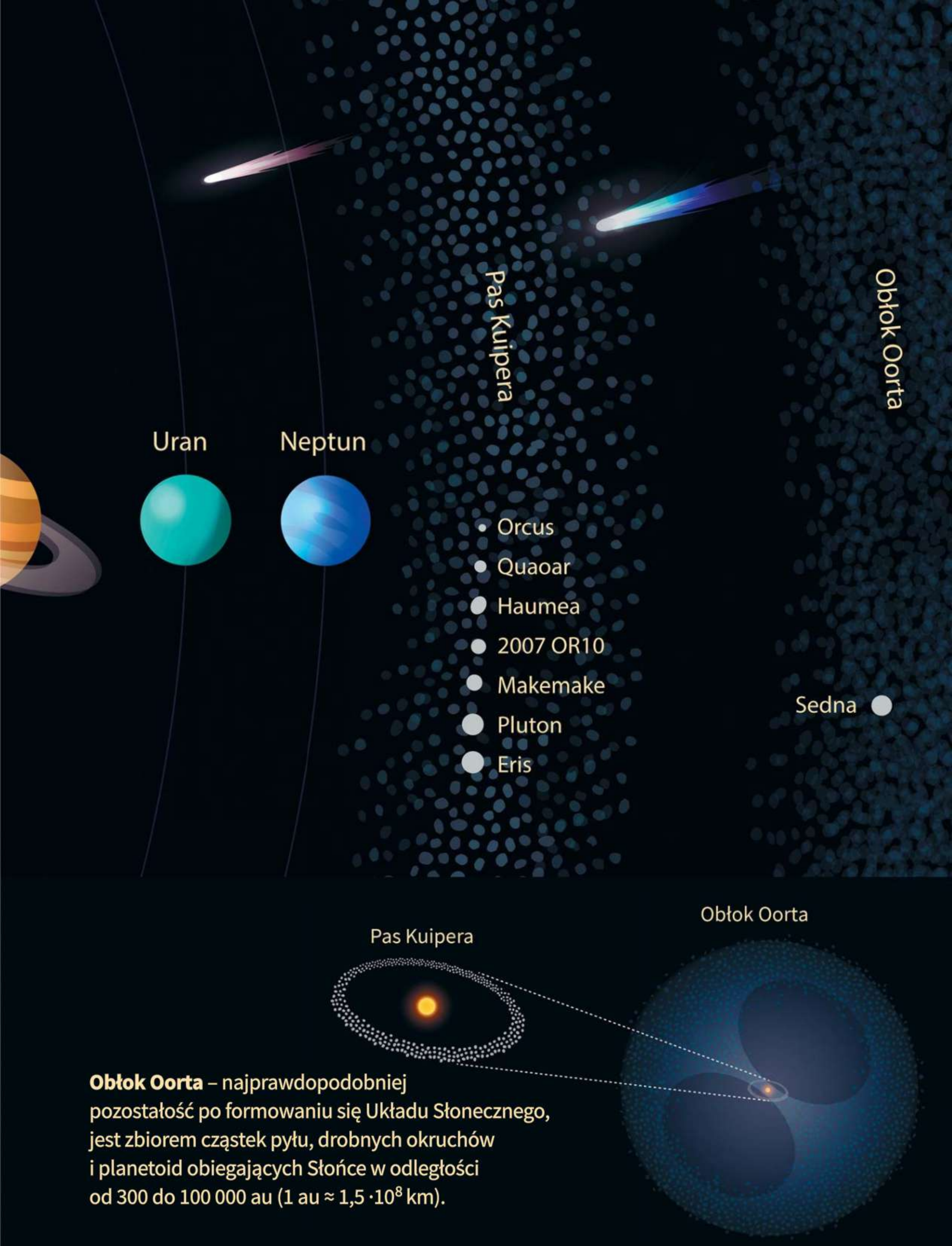
Układ Słoneczny

Wszystkie planety obiegają Słońce w przybliżeniu w tej samej płaszczyźnie i w tym samym kierunku. Również wszystkie planety wykonują obroty wokół własnej osi, z tym że Wenus obraca się w przeciwną stronę niż pozostałe planety. Dodatkowo w pasie planetoid oraz poza orbitą Neptuna obiegają Słońce planety karłowate[11].



Wybrane dane o planetach

Nazwa planety	Symbol	Średnia odległość planety od Słońca (odległość Ziemia–Słońce = 1)	Okres obiegu (lata)[12]	Promień równikowy (promień Ziemi = 1)	Okres obrotu	Masa planety (masa Ziemi = 1)	Gęstość średnia (g/cm^3)	Liczba księżyców[13]
Merkury	☿	0,387	0,2408	0,38	58,65^d	0,055	5,43	brak
Wenus	♀	0,723	0,6152	0,94	243,02^d	0,815	5,24	brak
Ziemia	♁	1	1	1	23^{h}56^m	1	5,52	1
Mars	♂	1,524	1,8808	0,53	24^{h}37^m	0,107	3,93	2
Jowisz	♃	5,203	11,868	11,21	9^{h}55^m	317,8	1,33	79
Saturn	♄	9,537	29,451	9,45	10^{h}39^m	95,2	0,68	82
Uran	♅	19,19	84,059	4,03	17^{h}14^m	14,5	1,27	27
Neptun	♆	30,07	164,89	3,88	16^{h}07^m	17,2	1,64	14



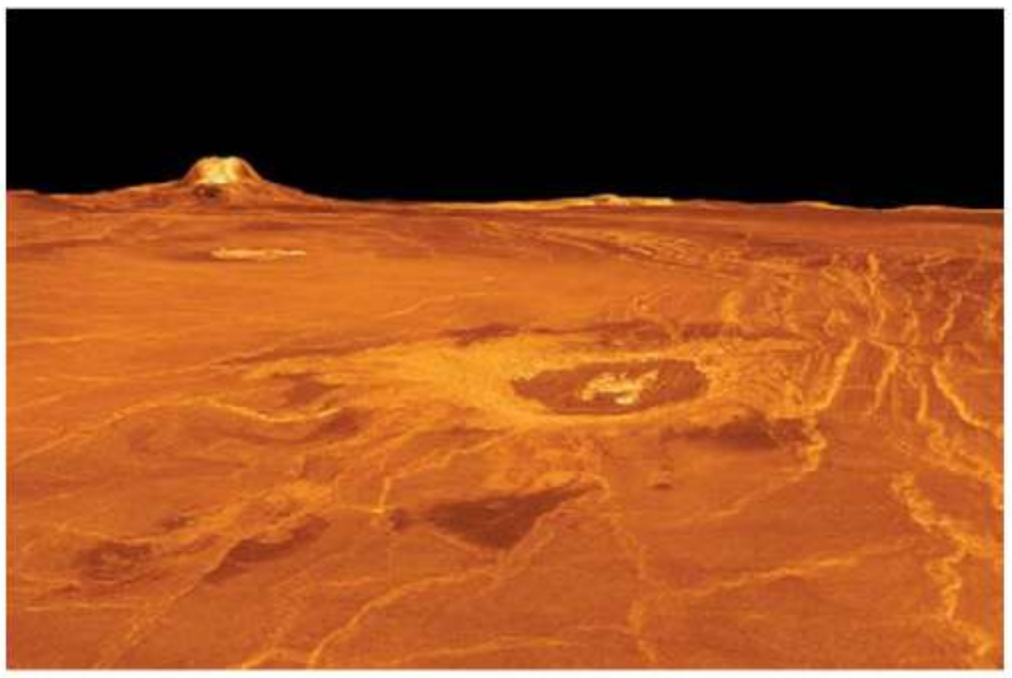
Obłok Oorta – najprawdopodobniej pozostałość po formowaniu się Układu Słonecznego, jest zbiorem cząstek pyłu, drobnych okruchów i planetoid obiegających Słońce w odległości od 300 do 100 000 au (1 au ≈ 1,5 ·10^8 km).

[11] Na ilustracji nie zachowano skali odległości a położenie największych planet karłowatych zaznaczono orientacyjne.
[12] Okresy obiegu i obrotu planet wyrażone są w powszechnie używanych „ziemskich" latach, dniach, godzinach i minutach.
[13] Według stanu na koniec lutego 2020 r.

WIEDZIEĆ WIĘCEJ

Nazwy kraterów

W większości nazwy kraterów nawiązują do wybitnych uczonych, artystów, pisarzy i innych znanych postaci, w tym również z Polski. Wśród kraterów na Księżycu mamy m.in. krater *Hevelius* (Jan Heweliusz), *Copernicus* (Mikołaj Kopernik), *Sklodowska* (Maria Skłodowska-Curie). Na powierzchni Merkurego są kratery *Chopin* oraz *Mickiewicz*. Na Wenus (rys. 18.1), gdzie nazwami upamiętniono słynne kobiety, odnajdujemy m.in. kratery *Konopnicka* oraz *Nalkowska*. Ponadto znajdują się tam kratery o żeńskich imionach: *Jadwiga*, *Janina*, *Wanda* oraz *Zosia*.



Rys. 18.1



Rys. 18.2

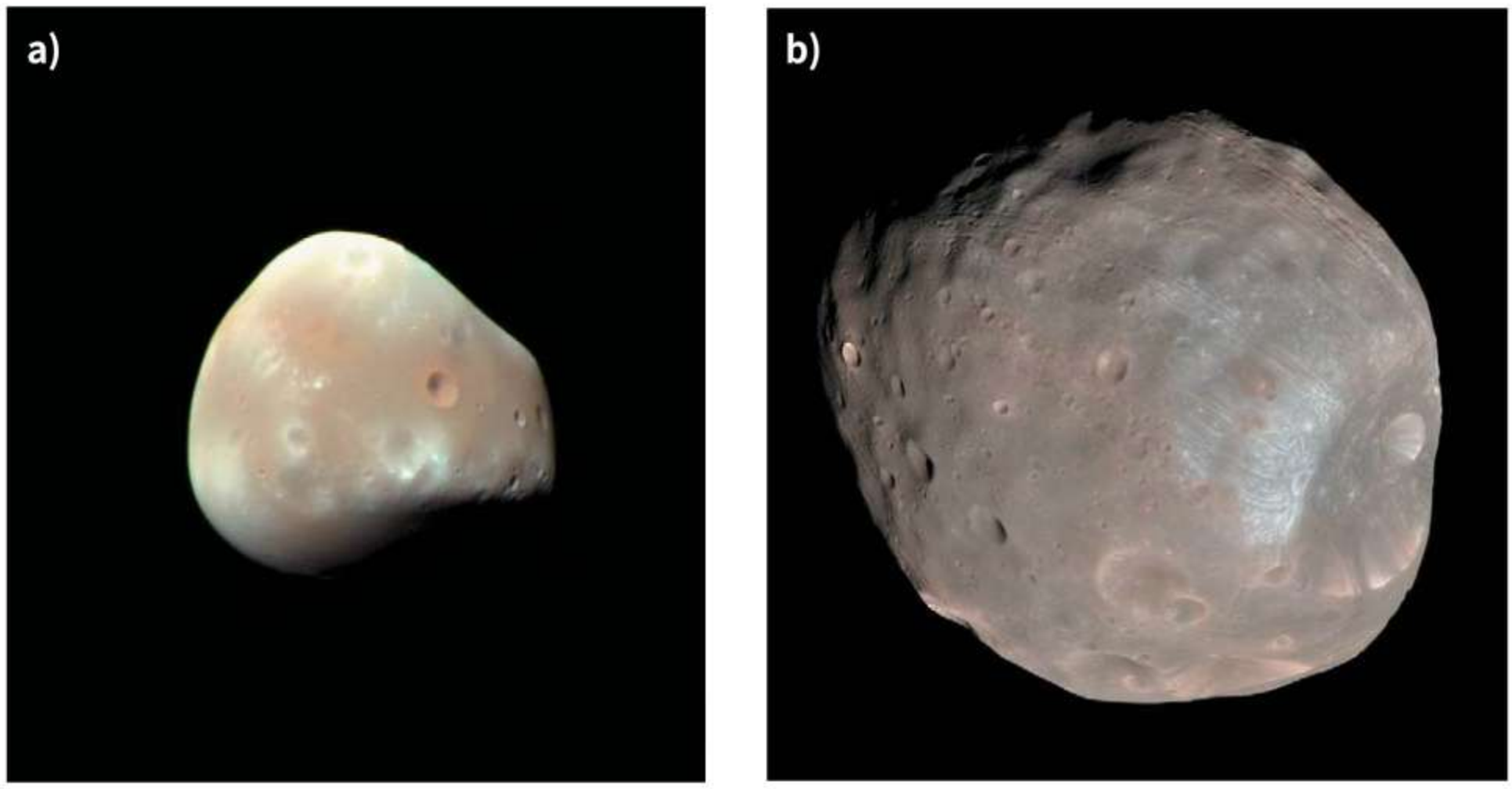
Kratery na Marsie (rys. 18.2) noszą nazwy nie tylko sławnych postaci (m.in. *Copernicus* czy *Sklodowska*), lecz także nazwy miast, których liczba ludności nie przekracza 100 000. Wśród nich są kratery mające nazwy polskich miejscowości: *Grojec*, *Pulawy*, *Punsk* oraz *Rypin* (pisownia oryginalna). Jedną z dolin marsjańskich nazwano *Vistula* (Wisła) *Valles*.

Wśród planet grupy ziemskiej tylko **Merkury** praktycznie nie ma atmosfery. Planeta ta obiega Słońce na tyle blisko, że brak tam warunków do powstania życia, gdyż zmiany temperatury na powierzchni planety wahają się od –180°C (po stronie nieoświetlonej przez Słońce) do 430°C.

Kolejna planeta, licząc od Słońca, to **Wenus**, zwana Jutrzenką lub Gwiazdą Wieczorną. Otacza ją gęsta atmosfera, wypełniona chmurami. Aż 96,5% tej atmosfery stanowi tlenek węgla(IV) – CO_2, a pozostałe 3,5% to azot. Ciśnienie przy powierzchni planety jest ok. 90 razy większe niż atmosfery ziemskiej na poziomie morza, a temperatura powierzchni sięga 500°C, czyli jest wyższa niż temperatura topnienia ołowiu. Tak wysoka temperatura to wynik **efektu cieplarnianego** spowodowanego tym, że promieniowanie słoneczne po dotarciu do powierzchni Wenus jest z niej emitowane w zakresie podczerwonym, dla którego atmosfera planety jest nieprzepuszczalna. W efekcie promieniowanie zostaje „uwięzione" w atmosferze i powoduje jej ogrzewanie.
Na Wenus nie ma warunków do istnienia życia. Na powierzchni Wenus, podobnie jak na innych planetach grupy ziemskiej, są liczne kratery uderzeniowe (rys. 18.1).

Atmosfera czwartej od Słońca planety – **Marsa** – jest bardzo cienka i rzadka (rys. 18.2). Ciśnienie przy powierzchni planety odpowiada ciśnieniu atmosfery ziemskiej na wysokości 30 km. Atmosfera Marsa (podobnie jak Wenus) składa się głównie z CO_2 – zawartość tego związku to ok. 95%, zaś ok. 3% stanowi azot. Średnia temperatura powierzchni planety wynosi ok. –63°C, ale w ciągu dnia przy równiku marsjańskim może się podnieść powyżej zera. Nie jest wykluczone, że na Marsie w odległej przeszłości płynęły rzeki, a nawet obecnie pod powierzchnią planety może zalegać tzw. wodny lód. Według niektórych uczonych w przeszłości na Marsie mogło powstać życie, jakkolwiek w chwili obecnej nie ma na to przekonujących dowodów.

Merkury i Wenus nie mają naturalnych satelitów. W przypadku Marsa w XIX wieku odkryto dwa niewielkie księżyce o nieregularnych kształtach – Deimosa (rys. 18.3a) i Fobosa (rys. 18.3b).



Rys. 18.3 Księżyce Marsa: Deimos (a), Fobos (b)

Planety olbrzymy

Do planet olbrzymów zaliczamy Jowisza, Saturna, Urana i Neptuna. Są one znacznie większe od Ziemi, otoczone rozległymi i gęstymi atmosferami, w których dominuje wodór. Planety tej grupy nie mają twardej powierzchni. Ich średnia gęstość jest mniejsza niż 1,8 g/cm^3.

Na fotografiach Jowisza, Saturna, Urana i Neptuna nie dostrzeżemy kraterów, gdyż bryły skalne docierające do tych planet wpadały głęboko w ich atmosfery. Planety olbrzymy mają szczególnie dużo księżyców.

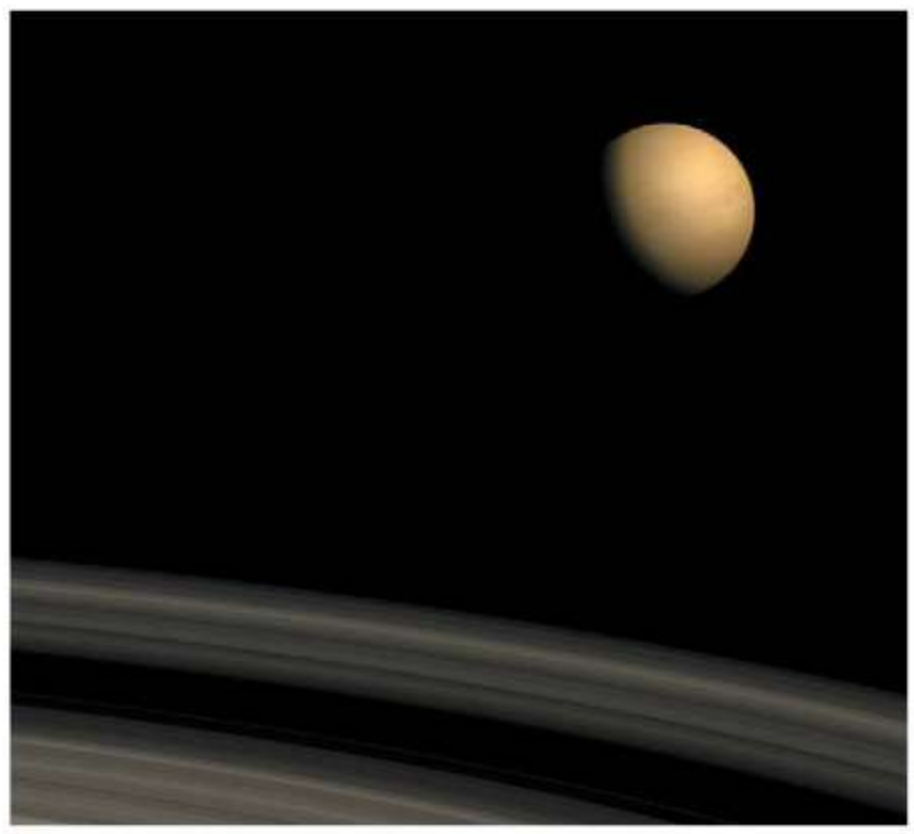
Cztery największe księżyce **Jowisza** w 1610 roku odkrył Galileusz (rys. 18.4). Ponieważ przypominały układ planetarny w miniaturze, były ważnym argumentem przemawiającym za słusznością teorii heliocentrycznej Kopernika. Wśród księżyców Jowisza na szczególną uwagę zasługuje Io – sondy kosmiczne zaobserwowały tam wybuchy wulkanów. Inny z księżyców Jowisza, Europa (nie mylić z nazwą kontynentu na Ziemi),

jest pokryty warstwą lodową; lód ten składa się głównie z zestalonej wody. Powierzchnię tego księżyca przecinają liczne szczeliny i pęknięcia, które zapewne powstały niedawno, gdyż nie dostrzega się tam kraterów uderzeniowych.



Rys. 18.4 Galileuszowe księżyce Jowisza

Bardzo interesującym księżycem jest również Tytan (rys. 18.5) obiegający **Saturna**. Tytan ma gęstą atmosferę, składającą się głównie z azotu oraz metanu. Z danych, które w 2005 roku przesłała sonda kosmiczna Cassini-Huygens po wylądowaniu na powierzchni Tytana, wynika, że oprócz licznych kanionów i wąwozów najprawdopodobniej znajdują się tam także jeziora wypełnione ciekłym metanem. Temperatura powierzchni Tytana wynosi ok. –180°C.

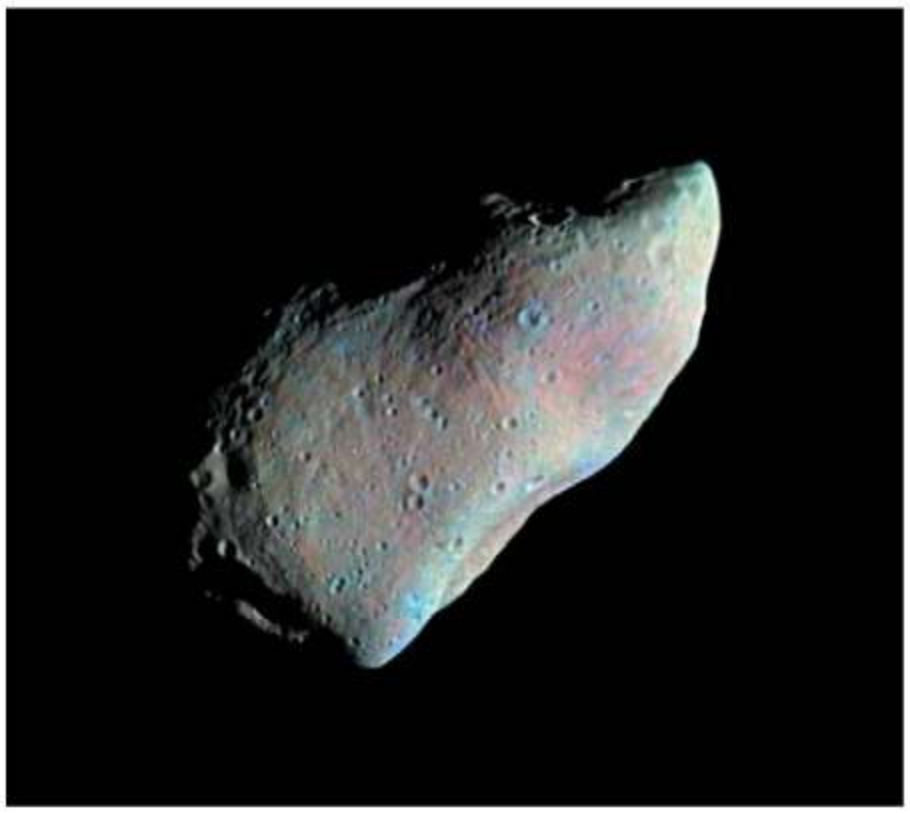


Rys. 18.5 Tytan i fragment pierścieni Saturna

Osobliwością planet olbrzymów są pierścienie, wśród których najbardziej okazałe otaczają Saturna. Pierścienie zbudowane są z bardzo drobnych okruchów skalnych i brył zestalonych gazów o wielkości od kilku milimetrów do kilku metrów. Grubość pierścieni jest bardzo mała i wynosi nie więcej niż kilkaset metrów.

Planetoidy

Planetoidy (asteroidy) są bryłami skalnymi o rozmiarach zawartych w szerokim zakresie: od kilku metrów do kilkuset kilometrów. Do jednej z nich (o nazwie Gaspra) zbliżyła się sonda kosmiczna Galileo i przekazała wysokiej jakości obrazy (rys. 18.6).



Rys. 18.6 Planetoida Gaspra

Łączną liczbę planetoid szacuje się na kilka milionów, przy czym około tysiąca ma średnice przekraczające 30 km. Tylko największe z nich mają kształt zbliżony do kuli. Większość planetoid obiega Słońce wzdłuż torów znajdujących się pomiędzy orbitami Marsa i Jowisza. Planetoidy nie są dostępne do obserwacji nieuzbrojonym okiem. Mogą być dostrzeżone tylko przez większą lornetkę lub lunetę i tylko wtedy, gdy znajdują się w korzystnym położeniu względem Ziemi.

Istnieje nieliczna grupa planetoid o niewielkich rozmiarach, których orbity mają kształt wydłużonej elipsy. Może się zdarzyć, że któraś z nich bardzo się zbliży do Ziemi, a w skrajnym przypadku może nawet dojść do kolizji. Z badań geologicznych wynika, że takie wypadki już miały miejsce i prowadziły do katastrof, czasem o zasięgu globalnym. Prawdopodobnie ok. 65 milionów lat temu ciało niebieskie o średnicy 10–20 km uderzyło w Ziemię w rejonie dzisiejszego półwyspu Jukatan w Meksyku i utworzyło krater o średnicy 180 km, którego część znajduje się dziś pod wodami Zatoki Meksykańskiej. Jak się powszechnie uważa, skutkowało to wyginięciem dinozaurów.

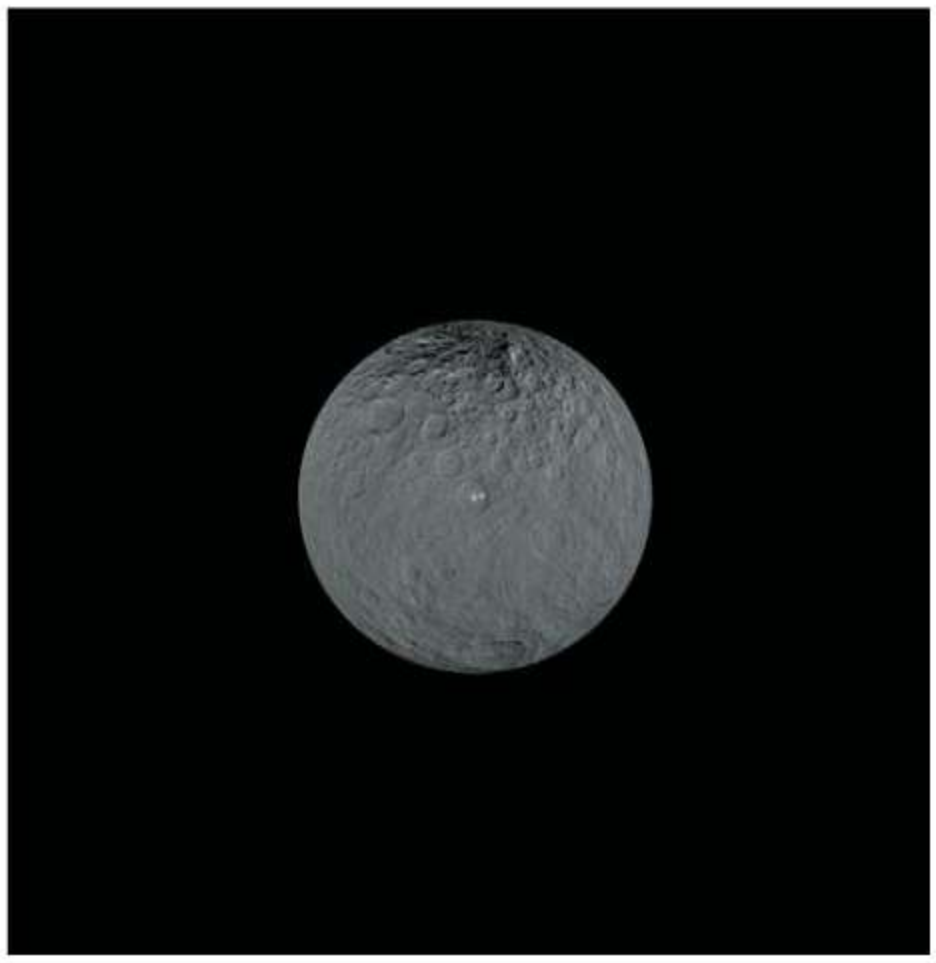
Innym przykładem jest Krater Barringera (*Meteor Crater*, rys. 18.7) w Arizonie (Stany Zjednoczone), który powstał ok. 49 tysięcy lat temu w wyniku uderzenia w Ziemię obiektu o średnicy ok. 50 m.

Rys. 18.7 Krater meteorytowy Barringera

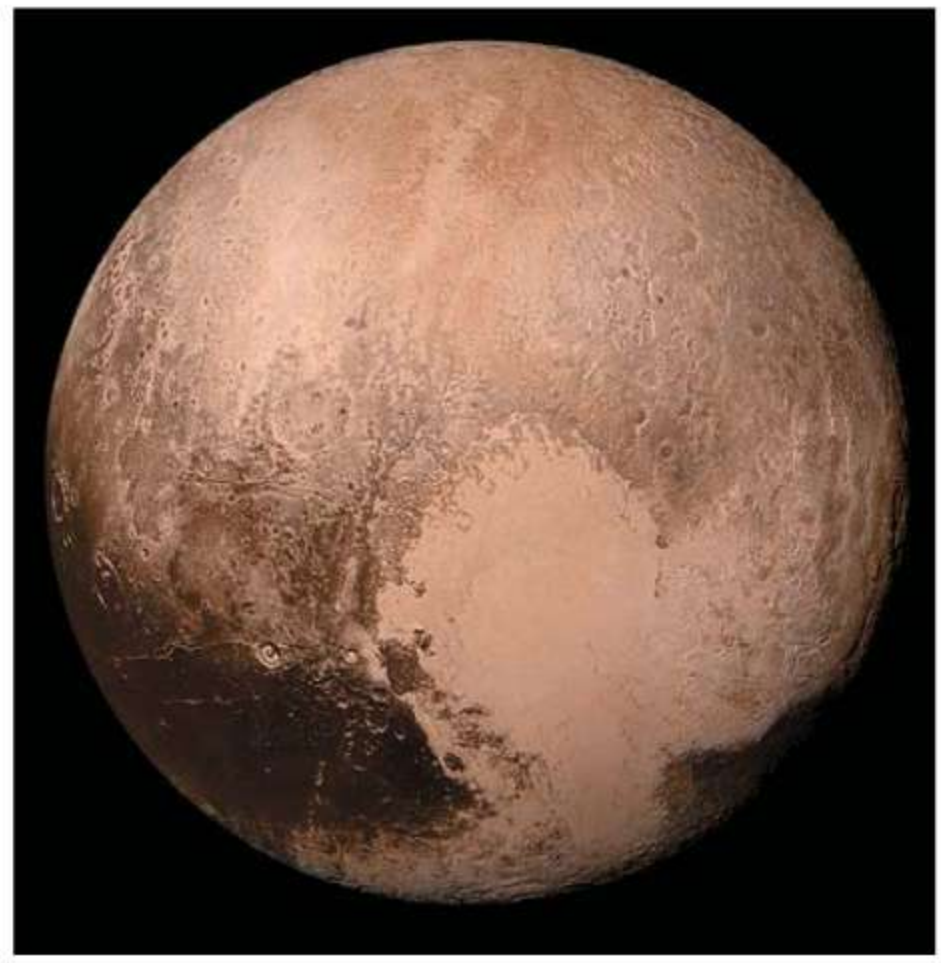


Planety karłowate

W 2006 roku Międzynarodowa Unia Astronomiczna wyodrębniła spośród planetoid grupę większych obiektów, które otrzymały nazwę **planet karłowatych**.
Obiegają one Słońce i mają kształt zbliżony do kuli, ale różnią się od planet tym, że nie zdołały wskutek oddziaływania grawitacyjnego oczyścić sąsiedztwa swojej orbity z innych większych ciał. Do planet karłowatych zaliczono m.in. największą z planetoid – **Ceres** (rys. 18.8) oraz **Plutona** (rys. 18.9), który do roku 2006 był uważany za jedną z planet.



Rys. 18.8 Planeta karłowata Ceres



Rys. 18.9 Planeta karłowata Pluton

Poza orbitą Neptuna odkryto również kilka innych planet karłowatych oraz bardzo dużo drobniejszych obiektów podobnych do planetoid. Te obiekty zaliczane są do tzw. **Pasa Kuipera**.

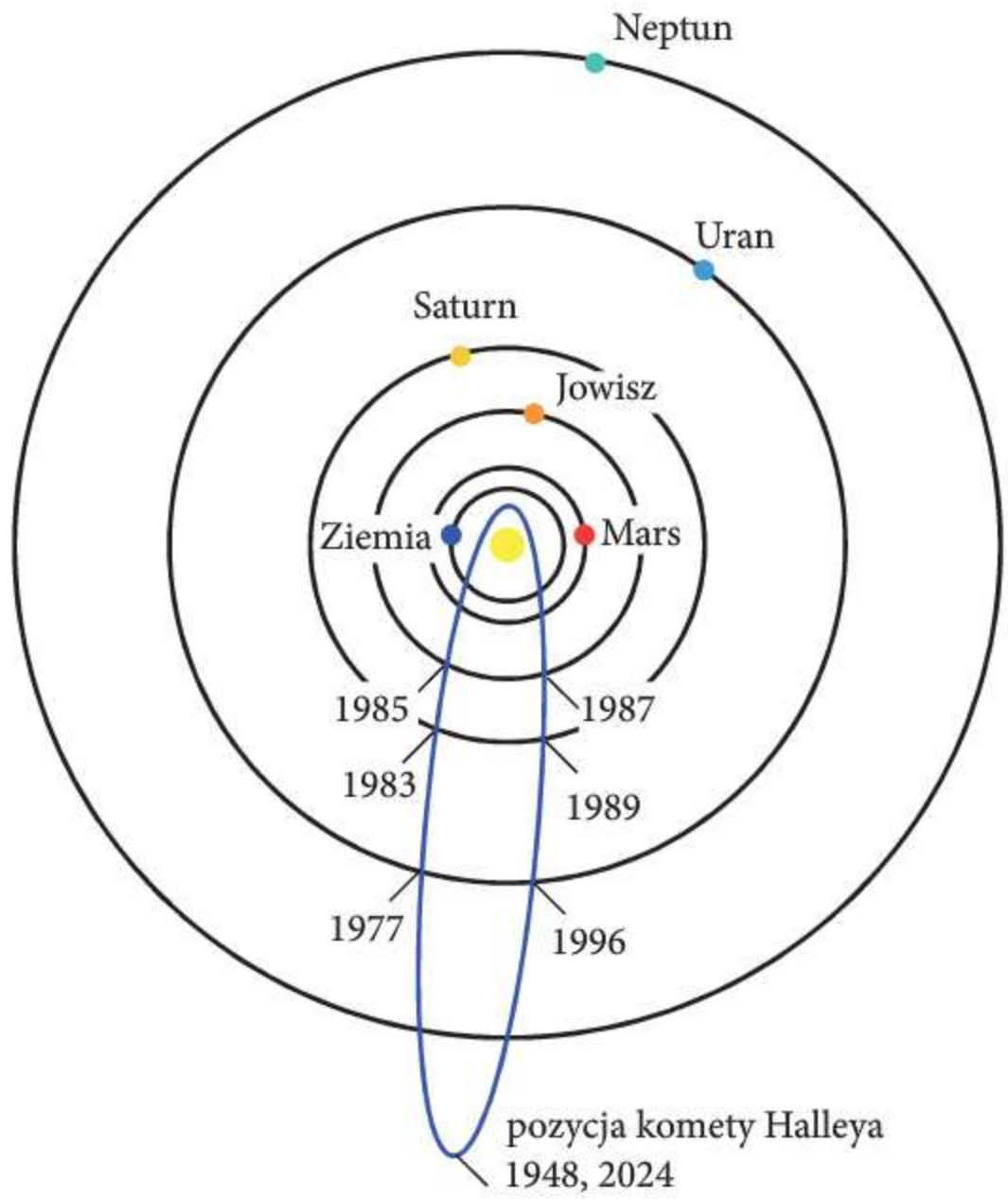
Meteoroidy

W Układzie Słonecznym oprócz planet, planet karłowatych i planetoid Słońce obiegają bardzo liczne, niewielkie bryły skalne i drobne okruchy materii, które otrzymały nazwę **meteoroidów**. Orbity wielu z nich znajdują się bardzo blisko orbity Ziemi (lub nawet ją przecinają).
Wtedy taka bryła może wpaść do atmosfery ziemskiej, tworząc zjawisko **meteoru**, popularnie zwane „spadającą gwiazdą". Olbrzymia większość wpadających do atmosfery meteoroidów ma średnice od ułamka milimetra do kilku centymetrów, a ich szybkość przy zetknięciu się z atmosferą wynosi od ok. 12 do ok. 72 km/s. Wartość ta zależy od tego, czy meteoroid „dogania" Ziemię (poruszającą się wokół Słońca z szybkością ok. 30 km/s), czy też biegnie jej „naprzeciw".
Wpadająca do atmosfery bryła materii zmniejsza swą szybkość i rozgrzewa się do temperatury ok. 3000°C. Powierzchnia meteoroidu ulega stopieniu i częściowo zamienia

się w gaz, a jego atomy ze znaczną szybkością zderzają się z atomami atmosfery i pobudzają je do świecenia. Stan ten trwa od kilku do kilkunastu sekund. Gdy obserwujemy „spadającą gwiazdę", widzimy więc jasny ślad pobudzonej do świecenia atmosfery, a nie rozżarzoną niewielką bryłkę materii, przelatującą na wysokości 100–150 km.
Jeśli wpadający do atmosfery ziemskiej meteoroid ma średnicę większą od kilkunastu centymetrów, to nie ulegnie całkowitemu spaleniu i uderzy w powierzchnię Ziemi. Wtedy nosi nazwę **meteorytu**. W niezwykle rzadkich wypadkach, gdy bryła materii ma średnicę kilkudziesięciu centymetrów lub większą, meteoroid przelatujący przez niskie warstwy atmosfery nazywamy **bolidem**. Przypomina on bardzo jasną kulę ognia, a szybkiemu przelotowi najczęściej towarzyszą głośne efekty akustyczne.

Komety

Szczególnie widowiskowym, ale nieczęstym zjawiskiem jest pojawienie się na niebie jasnej komety. Jej jądrem jest lodowo-skalna bryła materii o rozmiarach od kilku do kilkudziesięciu kilometrów. Znaczna część komet obiega Słońce po bardzo wydłużonych elipsach (rys. 18.10). Gdy kometa zbliża się do Słońca, wzrasta jej temperatura i zaczynają się uwalniać zestalone gazy, tworząc charakterystyczną głowę komety otaczającą skaliste jądro. Dalsze zbliżanie się do Słońca sprawia, że z jądra komety wydobywają się gazowo-pyłowe strumienie materii tworzące charakterystyczny warkocz komety.



Rys. 18.10 Orbita komety Halleya

Oprócz komet obiegających Słońce obserwujemy także wiele komet poruszających się wzdłuż torów przypominających parabolę. Komety te tylko jeden raz docierają do centralnych części układu planetarnego, a następnie bezpowrotnie ulatują w przestrzeń kosmiczną. Ta grupa komet najprawdopodobniej pochodzi z otaczającego Układ Słoneczny obłoku materii, tzw. **Obłoku Oorta**. Ma on kształt olbrzymiego „kokonu" o średnicy kilkadziesiąt tysięcy razy większej od rozmiarów Układu Słonecznego. Obłok Oorta jest najprawdopodobniej pozostałością po pierwotnej materii, z której 4,5 miliarda lat temu powstało Słońce wraz z układem planetarnym.

WIEDZIEĆ WIĘCEJ

Kometa Halleya

Do najbardziej znanych komet należy **kometa Halleya**, której orbita jest bardzo wydłużoną elipsą (rys. 18.10). Kometa zbliża się do Słońca co 76 lat i wtedy nieuzbrojonym okiem można podziwiać jej okazały warkocz. Ostatnie zbliżenia komety Halleya do Słońca nastąpiły w 1910 oraz 1986 roku.

Kometa Halleya bardzo często utożsamiana jest z Gwiazdą Betlejemską, jednak obliczenia wskazują, że jej zbliżenie do Słońca nastąpiło w październiku 12 roku p.n.e., a Jezus urodził się w 7 lub 6 roku p.n.e., gdy kometa nie była już widoczna. Również w dawnych kronikach brak informacji, aby na przełomie 7 i 6 roku p.n.e. były widoczne inne jasne komety. Należy więc raczej uznać, że przedstawianie Gwiazdy Betlejemskiej jako komety ma charakter symboliczny i nie jest związane z konkretnym zjawiskiem astronomicznym na niebie.

Natomiast pojawianie się komety Halleya (i innych bardzo jasnych komet) zawsze było na tyle znaczącym zjawiskiem, że znajdowało swoje odzwierciedlenie w dziełach sztuki. Przykładowo Giotto upamiętnił pojawienie się komety Halleya na fresku w kaplicy Scrovegnich w Padwie (rys. 18.11). Kometa była widoczna z Ziemi w 1301 roku, a fresk został namalowany trzy lata później.



Rys. 18.11



Rys. 18.12

Gdy w 1986 roku kometa Halleya zbliżyła się do Słońca, w jej kierunku wysłano kilka sond kosmicznych. Jedną z nich nazwano Giotto. Sonda ta jako pierwsza przesłała wysokiej jakości obrazy jądra komety Halleya (rys. 18.12).

ZADANIA

1. Na podstawie internetu lub innych źródeł objaśnij pochodzenie nazw planet.
2. Oceń możliwość istnienia życia na innych niż Ziemia planetach Układu Słonecznego.
3. Która planeta może najbardziej zbliżyć się do Ziemi? Uzasadnij odpowiedź.
4. Skorzystaj z danych zawartych w tabeli na s. 120 i sprawdź dla wybranych trzech planet słuszność III prawa Keplera.
5. Objaśnij terminy: egzoplaneta, asteroida, meteoroid, meteor, meteoryt, bolid.



19. Jednostki odległości stosowane w astronomii

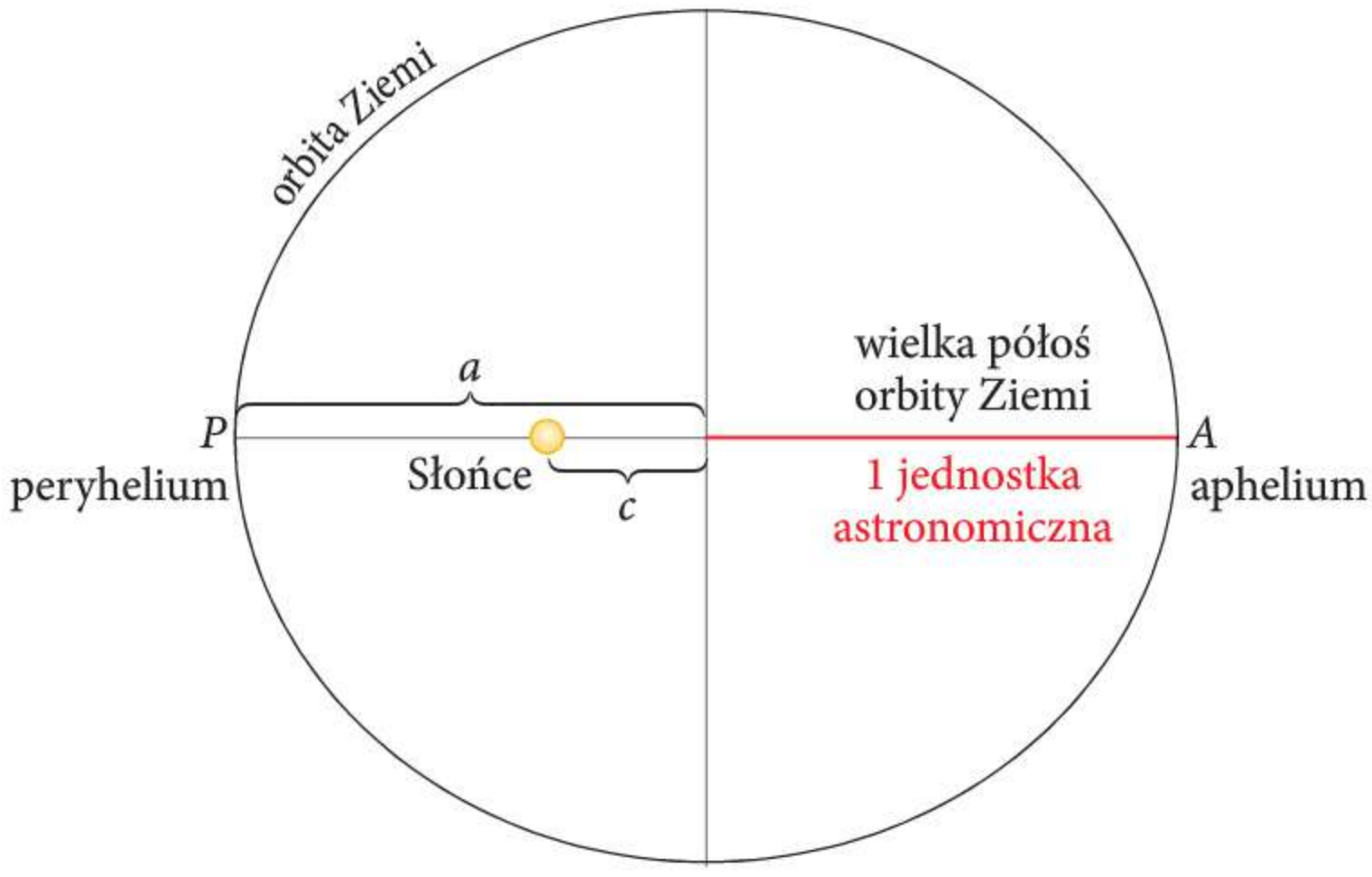
- Jednostka astronomiczna
- Rok świetlny
- Parsek

Przypomnij sobie wiadomości o jednostkach miar kątów i związkach między nimi oraz założenia teorii heliocentrycznej Kopernika.

W astronomii zamiast wyrażać odległości w metrach i ich wielokrotnościach stosuje się jednostki specyficzne dla tej gałęzi wiedzy. W badaniach ciał Układu Słonecznego najczęściej stosowaną jednostką odległości jest **jednostka astronomiczna** (w skrócie: au – od angielskich słów *astronomical unit* – lub j.a.).

Jednostka astronomiczna (1 au) to długość wielkiej półosi elipsy, wzdłuż której Ziemia obiega Słońce (rys. 19.1).

$$1\ \text{au} = 149\,597\,871\ \text{km} \approx 150 \cdot 10^6\ \text{km}$$



Rys. 19.1 Ilustracja definicji jednostki astronomicznej

Jednostka astronomiczna jest równa średniej odległości Ziemi od Słońca ($r_{śr}$) w peryhelium (r_P) i aphelium (r_A), ponieważ:

$$r_{śr} = \frac{r_P + r_A}{2} = \frac{(a-c)+(a+c)}{2} = \frac{2a}{2} = a$$

Zwróć uwagę, że nazwa „jednostka astronomiczna" ma charakter tradycyjny i może budzić nieporozumienia, gdyż jest jednostką odległości.

Promień orbity Merkurego, planety najbliższej Słońcu, wyrażony w jednostkach astronomicznych wynosi ok. 0,39 au, natomiast najdalsza z planet – Neptun – obiega Słońce w odległości ok. 30 au, czyli jest oddalona od Słońca trzydzieści razy bardziej niż Ziemia.

Odległości z Ziemi do gwiazd, a także odległości między nimi są wielokrotnie większe niż 1 au, dlatego najczęściej wyrażane są w **latach świetlnych**.

Rok świetlny (1 ly) jest to odległość, którą światło biegnące w próżni z szybkością $c = 299\,792$ km/s przebywa w ciągu jednego roku (czyli 365,25 dnia).

$$1\ \text{ly} = 6{,}32 \cdot 10^4\ \text{au} \approx 9{,}5 \cdot 10^{12}\ \text{km}$$

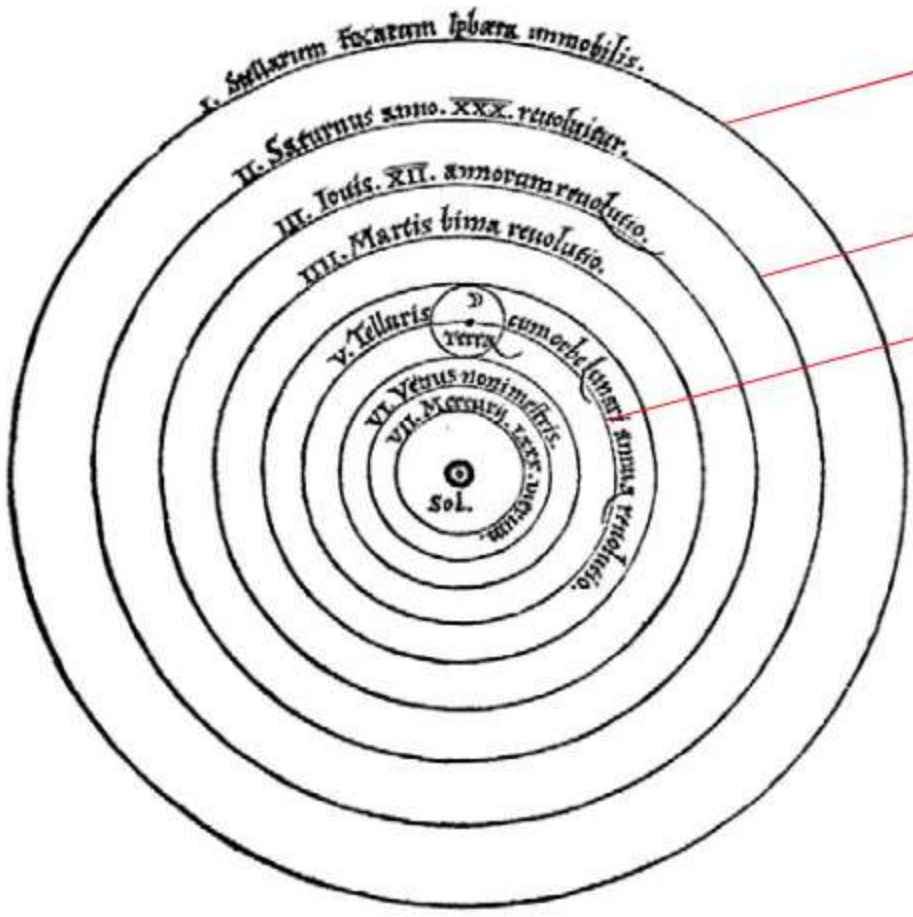
Choć najczęściej rok świetlny oznaczamy w skrócie jako ly (od ang. *light-year)*, stosowane są również symbole: r.św. lub l.św.

Uwaga: Ta tradycyjna definicja również może budzić nieporozumienia, ponieważ występuje w niej słowo „rok" (lub „lata") określające jednostkę czasu, a nie odległości. Termin „rok świetlny" („lata świetlne") należy traktować łącznie.

WIEDZIEĆ WIĘCEJ

Jak daleko jest od Ziemi do gwiazd?

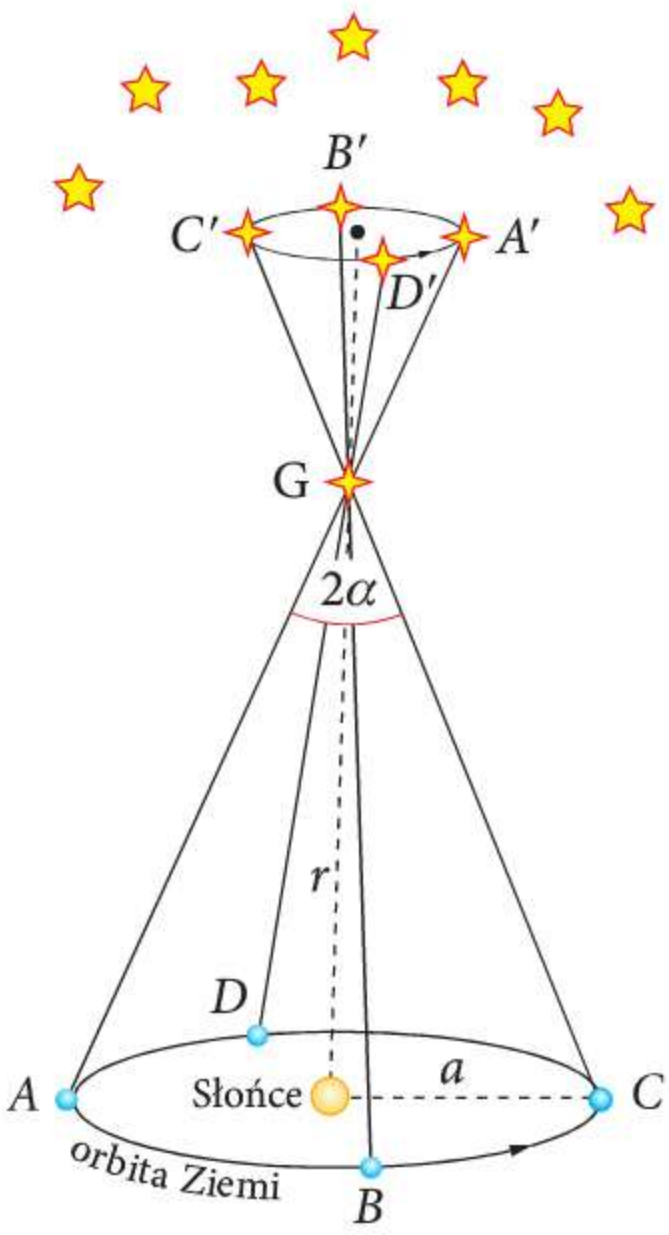
Aż do połowy XIX wieku odległości gwiazd od Ziemi były nieznane. Uczeni, w tym również Mikołaj Kopernik, nie potrafili ocenić, jak daleko znajdują się gwiazdy.



Rys. 19.2

Na znanej rycinie w *De revolutionibus*… (rys. 19.2) twórca teorii heliocentrycznej umieścił gwiazdy w niewielkiej odległości za orbitą Saturna, który był najdalszą znaną planetą w połowie XVI wieku. Dla Kopernika było zagadką, dlaczego wszystkie gwiazdy na niebie tworzą niezmienne konfiguracje i pozostają względem siebie w tym samym miejscu.
Z kolei duński astronom Tycho Brahe (1546–1601) uważał, że jeśli nasza planeta obiega Słońce, to na niebie wzajemne odległości gwiazd powinny się nieco różnić w kolejnych miesiącach roku. Ponieważ nie mógł dostrzec tego zjawiska, podawał w wątpliwość słuszność teorii heliocentrycznej. Zarówno Mikołaj Kopernik, jak i Tycho Brahe nie przypuszczali, że gwiazdy znajdują się zbyt daleko od Ziemi, aby można było wykryć bardzo małe zmiany ich położeń na niebie za pomocą szesnastowiecznych instrumentów.

Problem wyznaczenia odległości między Ziemią a najbliższymi gwiazdami został rozwiązany dopiero w latach trzydziestych XIX wieku, gdy dla kilku gwiazd udało się zmierzyć tzw. **kąt paralaksy heliocentrycznej** α[14] (rys. 19.3).



Rys. 19.3 Ilustracja definicji kąta paralaksy heliocentrycznej

Istota tej metody wyznaczania odległości polega na pomiarze kąta (oznaczamy go jako 2α), o jaki gwiazda G zmienia swoje położenie na tle innych odległych gwiazd w odstępie pół roku, gdy Ziemia znajduje się po przeciwnych stronach Słońca. W wyniku obserwacji prowadzonych przez cały rok stwierdzono, że gwiazda G zatacza na niebie niewielką elipsę, będącą odzwierciedleniem ruchu naszej planety.

[14] W podręcznikach i opracowaniach astronomicznych bardzo często na oznaczenie kąta paralaksy stosuje się literę grecką π (nie należy jej mylić z liczbą $\pi \approx 3{,}14$).

Gdy znana jest odległość Ziemi od Słońca oraz kąt 2α, można obliczyć odległość gwiazdy G z następującego związku:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{r} \tag{19.1}$$

gdzie:
a jest odległością Ziemia–Słońce,
r to odległość Słońce–gwiazda G.

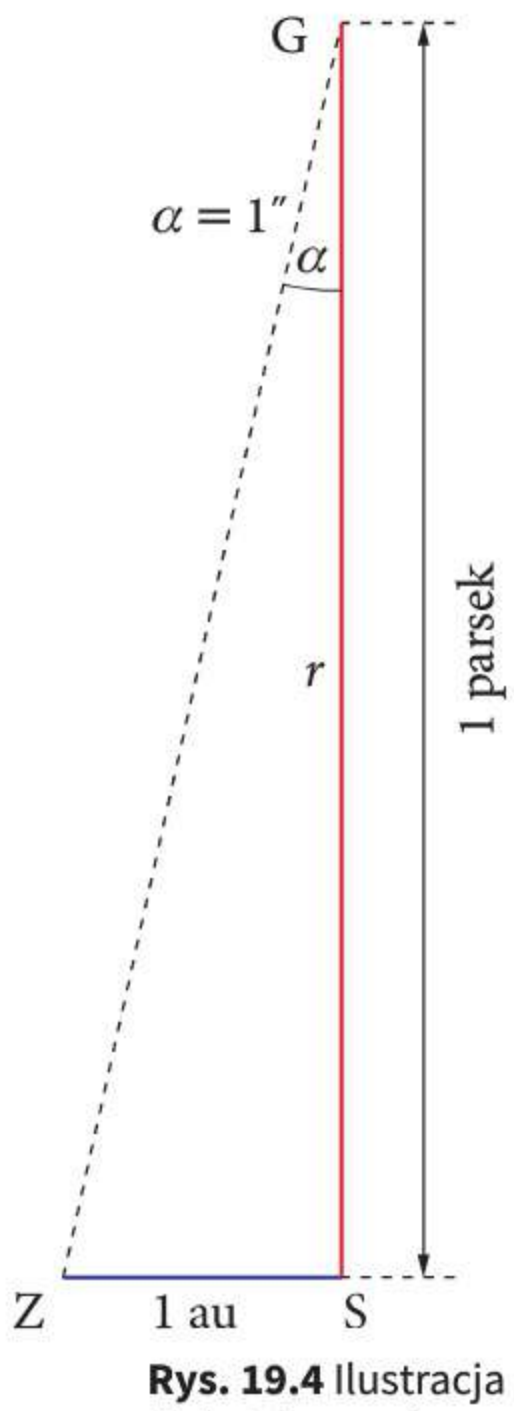
Im dalej gwiazda jest oddalona od Słońca (i Ziemi), tym mniejszy jest kąt paralaksy heliocentrycznej.
Z opisaną metodą wyznaczania odległości związana jest jednostka **parsek**. Ta nazwa pochodzi z połączenia pierwszych sylab słów **par**alaksa i **sek**unda.

Parsek (1 pc) jest odległością, z której jedna jednostka astronomiczna jest widoczna pod kątem jednej sekundy kątowej[15].

Innymi słowy:
Dane ciało niebieskie znajduje się w odległości $r = 1$ pc od Słońca (S) wtedy, gdy kąt α jego paralaksy heliocentrycznej wynosi jedną sekundę kątową.

Wyjaśnia to rysunek 19.4, na którym nie zachowano skali. W rzeczywistości dla obserwowanych gwiazd kąt paralaksy α jest niezwykle mały (znacznie mniejszy od 1 sekundy), w związku z czym boki trójkąta przy kącie α są niemal równe.

W astronomii bardzo często stosuje się wielokrotności tej jednostki:
kiloparseki (1 kpc = 10^3 pc) oraz
megaparseki (1 Mpc = 10^6 pc).



Rys. 19.4 Ilustracja definicji parseka

[15] Jednostką miary stopniowej kąta są stopnie (°), minuty kątowe (′) oraz sekundy kątowe (″). Dla odróżnienia od miary stopniowej kątów minuty czasu oznaczamy literą „m", a sekundy czasu – literą „s". Na przykład rekord świata w biegu na 1500 metrów mężczyzn wynosi $3^m26{,}00^s$ (3 minuty 26 sekund), natomiast średnica tarczy Księżyca w chwili, gdy nasz naturalny satelita jest najbliżej Ziemi, wynosi w mierze stopniowej ok. 34′06″ (34 minuty kątowe i 6 sekund kątowych). Jednak w prasie sportowej minuty i sekundy czasu często oznaczane są tak, jakby były jednostkami miary stopniowej kąta.

Przykład 19.1

Zamiana jednostek

Obliczymy, ile kilometrów ma jeden parsek. Zastosujemy wzór (19.1).

$$\operatorname{tg} 1'' = \frac{1\,\text{au}}{1\,\text{pc}}$$

stąd:

$$1\,\text{pc} = \frac{1\,\text{au}}{\operatorname{tg} 1''}$$

Ponieważ dla małych kątów $\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$ (gdzie α jest wyrażone w radianach), zamiast tangensa kąta podstawiamy miarę kąta. Pamiętamy również, że kąt 1 radiana wyrażony w stopniach jest równy:

$$1\,\text{rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} \approx 57{,}2958^\circ \approx 206\,265'' \text{ (sekund kątowych)}$$

czyli:

$$1'' \approx \frac{1\,\text{rad}}{206\,265}$$

Wobec tego:

$$1\,\text{pc} \approx \frac{1\,\text{au}}{\frac{1}{206\,265}} = 1\,\text{au} \cdot 206\,265 \approx 1{,}5 \cdot 10^8\,\text{km} \cdot 206\,265 \approx 3{,}1 \cdot 10^{13}\,\text{km}$$

1 parsek to w przybliżeniu 31 bilionów kilometrów.

$$1\,\text{pc} \approx 2{,}1 \cdot 10^5\,\text{au} \approx 3{,}1 \cdot 10^{13}\,\text{km}$$

Według współczesnych pomiarów najbliżej Słońca znajduje się gwiazda o nazwie **Proxima Centauri**. Kąt 2α, o jaki zmienia ona w ciągu połowy roku swe położenie na niebie, wynosi zaledwie 1,54 sekundy kątowej. Odległość odpowiadająca kątowi α jest równa 1,3 pc, czyli $4{,}02 \cdot 10^{13}$ km (ok. 40 bilionów km).

WIEDZIEĆ WIĘCEJ

Najbliższa znana planeta pozasłoneczna

Proxima Centauri (z jęz. łacińskiego: *proxima* – najbliższa) została odkryta w 1915 roku na niebie południowym w gwiazdozbiorze Centaura, niewidocznym z Polski. Średnica Proximy stanowi zaledwie 15% średnicy Słońca, jej masa jest ośmiokrotnie mniejsza od masy Słońca. Proxima ma barwę pomarańczowoczerwoną, co świadczy o jej relatywnie niskiej temperaturze powierzchni, wynoszącej ok. 3000 K, podczas gdy temperatura powierzchni Słońca wynosi 5800 K. Gwiazda świeci 100 razy słabiej niż najsłabsze gwiazdy widoczne nieuzbrojonym okiem w bezchmurną noc, toteż może być dostrzeżona dopiero za pomocą niewielkiego teleskopu.

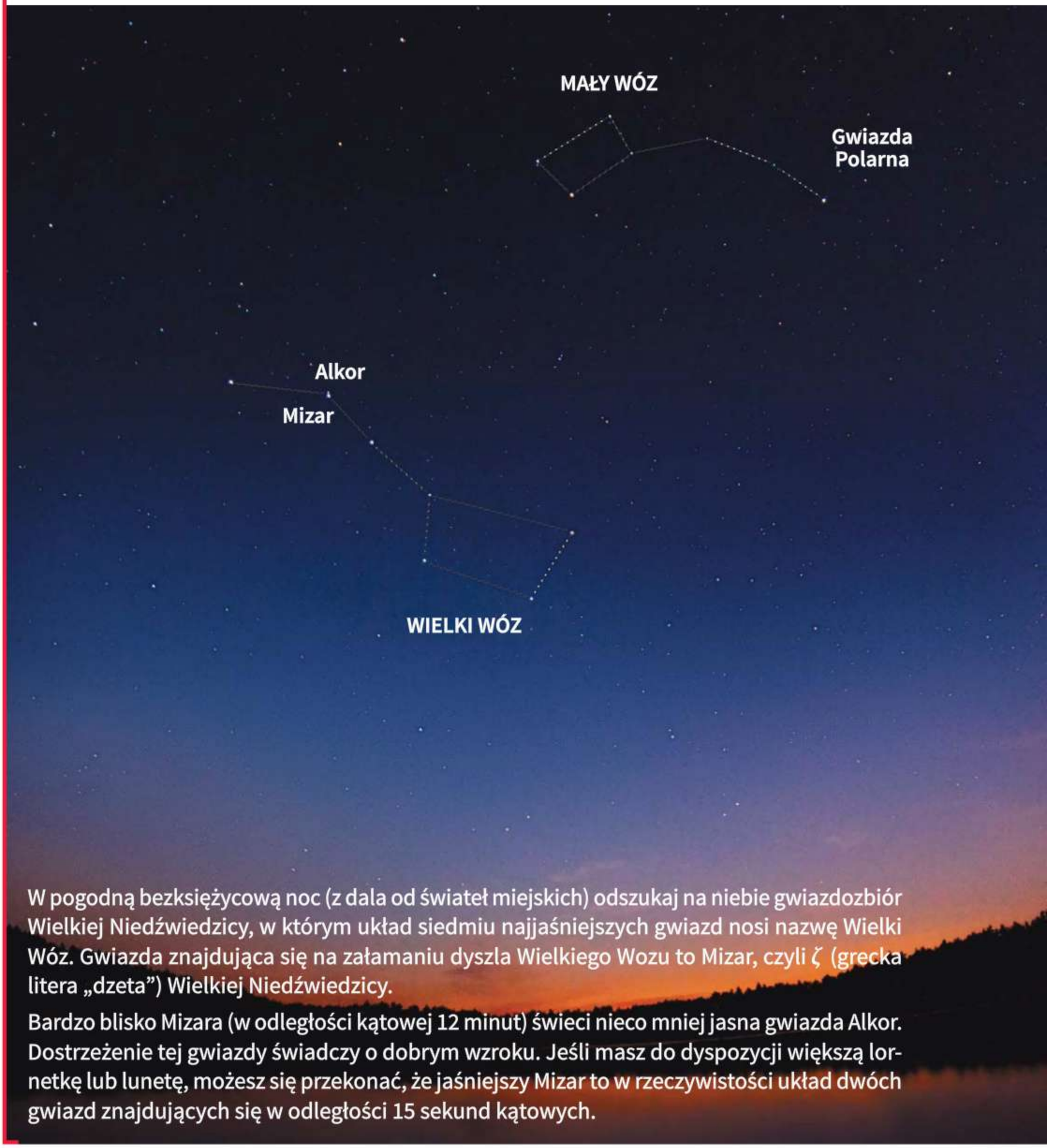
W 2016 roku stwierdzono, że tę najbliższą nam gwiazdę (nie licząc Słońca) obiega w ciągu 11 dni planeta zbliżona wielkością do Ziemi (Proxima Centauri b). Nie należy się jednak spodziewać, aby mogły tam panować warunki do powstania życia.

Obserwacja 19.1

Sprawdź ostrość swojego wzroku

Człowiek o dobrym wzroku może rozróżnić dwa szczegóły wtedy, gdy kąt między nimi jest większy niż jedna minuta kątowa. Odpowiada za to tzw. **zdolność rozdzielcza oka**, związana z budową siatkówki. Z tych powodów, nawet gdy Jowisz jest najbliżej Ziemi, nieuzbrojonym okiem nie możemy dostrzec tarczy tej planety, gdyż jej średnica kątowa wynosi wtedy 51 sekund (51″).

Niektóre ptaki drapieżne mają większą zdolność rozdzielczą oczu niż człowiek, co pozwala im nawet z dużej wysokości dostrzec drobne zwierzęta i skutecznie na nie zapolować.



W pogodną bezksiężycową noc (z dala od świateł miejskich) odszukaj na niebie gwiazdozbiór Wielkiej Niedźwiedzicy, w którym układ siedmiu najjaśniejszych gwiazd nosi nazwę Wielki Wóz. Gwiazda znajdująca się na załamaniu dyszla Wielkiego Wozu to Mizar, czyli ζ (grecka litera „dzeta”) Wielkiej Niedźwiedzicy.

Bardzo blisko Mizara (w odległości kątowej 12 minut) świeci nieco mniej jasna gwiazda Alkor. Dostrzeżenie tej gwiazdy świadczy o dobrym wzroku. Jeśli masz do dyspozycji większą lornetkę lub lunetę, możesz się przekonać, że jaśniejszy Mizar to w rzeczywistości układ dwóch gwiazd znajdujących się w odległości 15 sekund kątowych.

ZADANIA

1. Wskaż poprawne dokończenie zdania.
1 rok świetlny to w przybliżeniu
A. 10 milionów km.
B. 10 miliardów km.
C. 10 bilionów km.
D. 10 trylionów km.

2. Oblicz czas, w którym sygnał radiowy przebędzie drogę z Ziemi do sondy kosmicznej znajdującej się w pobliżu Neptuna (gdy jest najbliżej Ziemi) i z powrotem.

3. W znanym programie telewizyjnym dziennikarz chciał określić, że pewne wydarzenie nastąpiło bardzo dawno temu. Użył w tym celu zwrotu: *Minęły lata świetlne*. Oceń poprawność tej wypowiedzi.

4. Średnica monety dwuzłotowej jest równa $21{,}5\ \mathrm{mm}$. Oblicz, w jakiej odległości od obserwatora znajduje się moneta, jeśli jej średnica kątowa wynosi:
a) 1 minutę,
b) 1 sekundę.

5. Wystrzelona w 1977 roku sonda kosmiczna Voyager 2 z końcem 2018 roku znajdowała się w odległości $120\ \mathrm{au}$ od Słońca i leciała z szybkością $15{,}4\ \mathrm{km/s}$. Oblicz czas potrzebny na dotarcie tej sondy do gwiazdy znajdującej się w odległości $10\ \mathrm{ly}$ przy założeniu, że Voyager 2 porusza się ze stałą szybkością.

6. Dla modelu Układu Słonecznego w skali $1 : 10^{10}$ (zmniejszenie 10 miliardów razy) oblicz brakujące dane i wpisz do poniższej tabeli przerysowanej do zeszytu.

		Wartość rzeczywista	Model $1 : 10^{10}$
1.	średnica Słońca	1,4 mln km	14 cm
2.	odległość Ziemia–Słońce	1 au	
3.	średnica Ziemi	12 800 km	
4.	średnica Księżyca	3480 km	
5.	odległość Ziemia–Księżyc	384 000 km	
6.	średnica równikowa Jowisza	143 000 km	
7.	promień orbity Jowisza	5,2 au	
8.	promień orbity Neptuna	30,1 au	
9.	odległość najbliższej gwiazdy	4,25 ly	

7. Kometa Halleya zbliża się do Słońca co $76\ \mathrm{lat}$ na odległość $0{,}59\ \mathrm{au}$.
a) Oszacuj jej średnią odległość od Słońca.
b) Oszacuj, na jaką maksymalną odległość oddala się ona od Słońca.



20. Nasza Galaktyka i jej miejsce we Wszechświecie

- Budowa Galaktyki (Drogi Mlecznej)
- Supermasywna czarna dziura w centrum Galaktyki
- Grupa Lokalna i gromady galaktyk

Przypomnij sobie, co to jest druga prędkość kosmiczna.

Obserwacja 20.1

Droga Mleczna

Do przeprowadzenia obserwacji Drogi Mlecznej konieczna będzie lornetka. Zwróć uwagę, że na obudowie lornetki najczęściej spotyka się oznaczenie składające się z dwóch liczb, pomiędzy którymi jest znak „×". Pierwsza z nich oznacza powiększenie lornetki, druga – średnicę jednego z obiektywów wyrażoną w milimetrach. Na przykład jeden z popularnych modeli lornetki pryzmatycznej ma oznaczenie 6 × 30, co oznacza, że lornetka ma sześciokrotne powiększenie, a średnica jednego z obiektywów wynosi 30 mm.

Obserwację najlepiej wykonać w trakcie letnich wakacji lub ferii zimowych. Do jej przeprowadzenia konieczna będzie bezchmurna pogoda i brak widocznego Księżyca. Wybrane miejsce musi znajdować się z dala od świateł domów i latarni ulicznych, aby całe niebo było ciemne. Odczekaj kilkanaście minut, aby wzrok przyzwyczaił się do ciemności.

Zwróć uwagę, że przez całe niebo przebiega jaśniejszy pas zwany Drogą Mleczną (rys. 20.1). Popatrz przez lornetkę na najjaśniejsze miejsca Drogi Mlecznej. Dostrzeżesz, że widoczna nieuzbrojonym okiem jaśniejsza smuga na niebie to w rzeczywistości bardzo wiele słabo świecących gwiazd. Następnie skieruj lornetkę w inne miejsce na niebie, z dala od Drogi Mlecznej. Zauważysz, że w polu widzenia lornetki są widoczne słabo świecące gwiazdy, lecz ich liczba będzie nieporównywalnie mniejsza niż w Drodze Mlecznej. Zwróć także uwagę na to, że we wszystkich kierunkach na niebie są widoczne gwiazdy, również wtedy, gdy po kilku godzinach obserwujemy inne, dotąd niewidoczne fragmenty nieba.



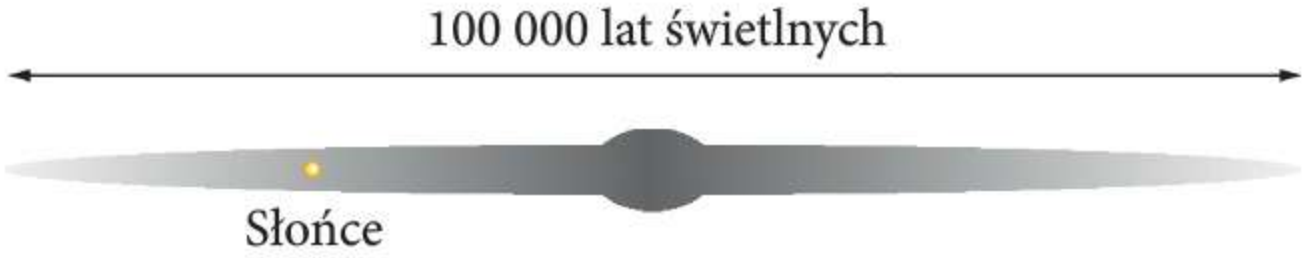
Rys. 20.1

Wykonana obserwacja przekonuje nas, że znajdujemy się wewnątrz olbrzymiego zbiorowiska gwiazd, zwanego Galaktyką (przez duże „G") lub Drogą Mleczną. Z pomiarów odległości gwiazd wiemy, że nie są one rozmieszczone przypadkowo w przestrzeni, ale tworzą grawitacyjnie powiązany układ przypominający olbrzymi dysk, podobny do używanego w zawodach sportowych już w czasach starożytnych.

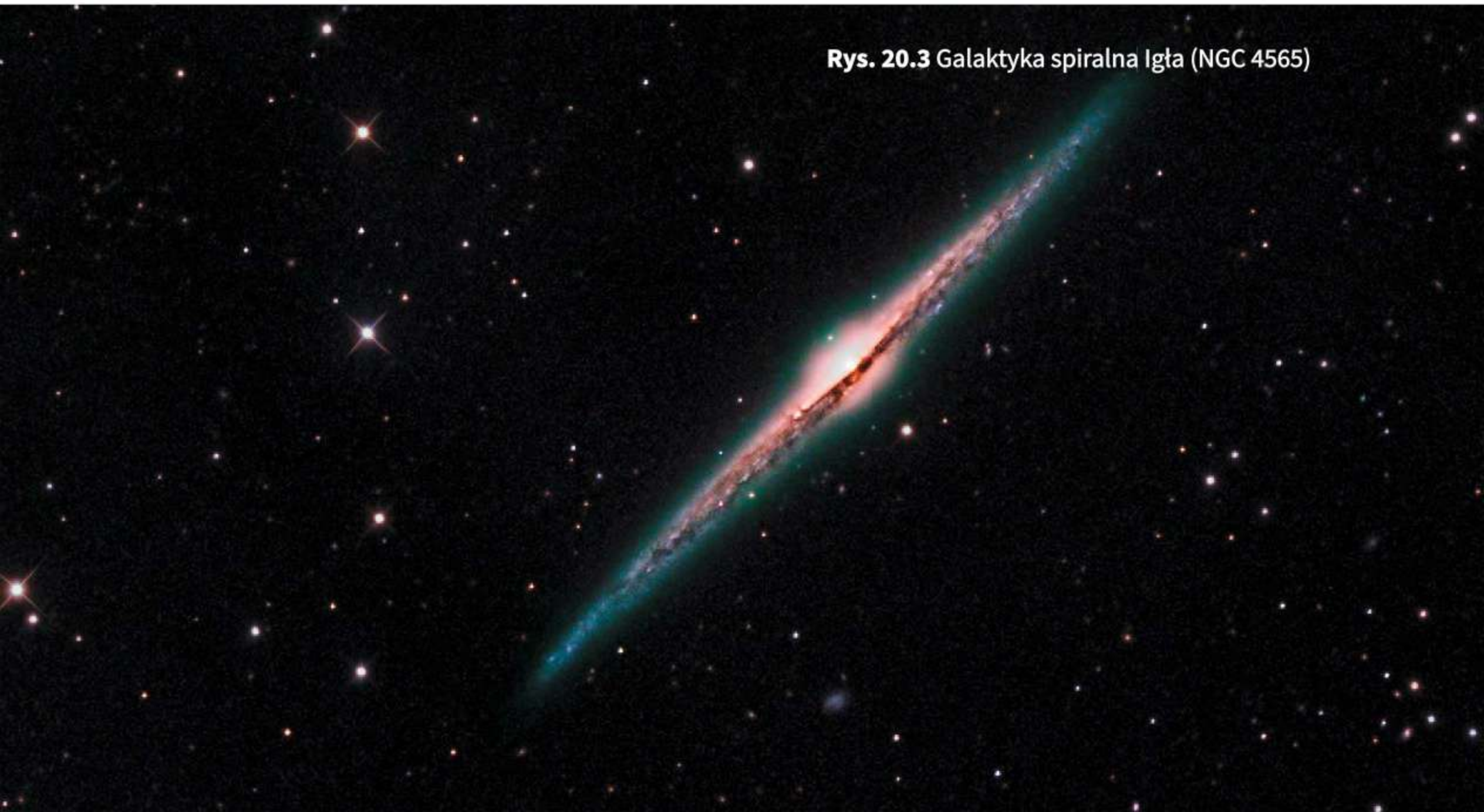
Jeśli kierujemy wzrok wzdłuż linii równoległej do płaszczyzny dysku galaktycznego, dostrzegamy kolejne, coraz bardziej odległe gwiazdy, zlewające się w jasną poświatę. Gdy natomiast patrzymy na niebo z dala od Drogi Mlecznej, też widzimy gwiazdy, ale pomiędzy nimi dostrzegamy ciemne obszary spoza naszej Galaktyki. Przypomina to sytuację turysty w lesie. Gdy patrzy przed siebie, widzi coraz dalej rosnące kolejne drzewa i krzewy, które tworzą jak gdyby zieloną ścianę, natomiast gdy spogląda do góry, dostrzega spoza gałęzi niebieskie (lub zachmurzone) niebo.

Rozwój cywilizacyjny i związane z tym rozświetlenie nocnego nieba sprawiają, że dla 1/3 ludności świata dostrzeżenie Drogi Mlecznej z własnego domu jest niemożliwe i być może wielu ludzi nigdy w życiu jej nie widziało.

Galaktyka ma średnicę ok. 100 000 ly i grubość ok. 1000 ly. Słońce znajduje się blisko płaszczyzny dysku Galaktyki, w odległości ok. 26 500 ly od jej centrum (rys. 20.2). Ocenia się, że w Galaktyce znajduje się 200–400 miliardów gwiazd. Słońce wraz z układem planetarnym nie zajmuje stałego miejsca w Galaktyce, ale porusza się wokół jej centrum z przybliżoną szybkością 220 km/s.



Rys. 20.2 Schemat budowy Galaktyki widzianej wzdłuż płaszczyzny dysku

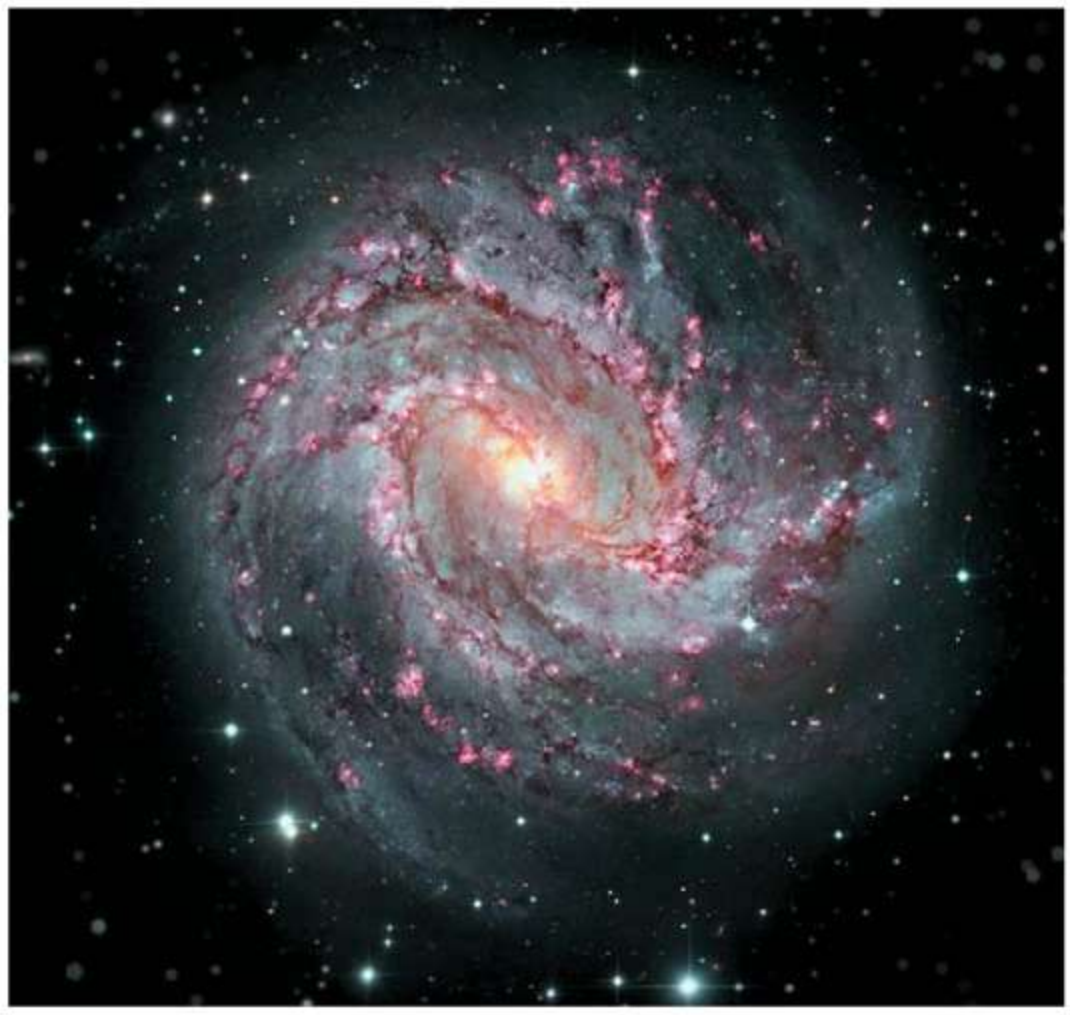


Rys. 20.3 Galaktyka spiralna Igła (NGC 4565)

Z bardzo dużej odległości nasza Galaktyka oglądana „z boku", przypominałaby galaktykę nazwaną Igła (NGC 4565, rys. 20.3), natomiast obraz Drogi Mlecznej widocznej „z góry" byłby podobny do galaktyki Wiatraczek (M101, rys. 20.4). Gwiazdy w naszej Galaktyce, podobnie jak w galaktyce Wiatraczek, nie są rozmieszczone równomiernie, ale tworzą zagęszczenia zwane **ramionami spiralnymi**, gdyż przypominają zwoje olbrzymiej sprężyny.

W Galaktyce oprócz gwiazd obserwujemy liczne obłoki (tzw. mgławice) składające się z pyłów i gazów, głównie wodoru i helu. Obłoki te są miejscem powstawania i formowania się gwiazd. Przykładem takich obłoków są tzw. **Filary Stworzenia** (ang. *Pillars of Creation*, rys. 20.5), sfotografowane przez Teleskop Kosmiczny Hubble'a w mgławicy M16. Ich nazwa nawiązuje do tytułu powieści fantasy amerykańskiego pisarza Terry'ego Goodkinda.

W centralnej części naszej Galaktyki znajduje się **supermasywna** (czyli o bardzo wielkiej masie) **czarna dziura**. Jej masa wynosi ok. 4 milionów mas Słońca. Odkrycie tego obiektu było możliwe dzięki obserwacjom ruchu gwiazd znajdujących się w jego pobliżu. Obiegają one niewidoczną czarną dziurę podobnie jak planety obiegają Słońce.



Rys. 20.4 Galaktyka spiralna Wiatraczek (M101)



Rys. 20.5 Fragment mgławicy Orzeł (M16)

WIEDZIEĆ WIĘCEJ

Czarna dziura

W rozdziale 16 wyprowadziliśmy wzór na wartość drugiej prędkości kosmicznej v_{II}, którą możemy obliczyć dla dowolnej planety, gwiazdy lub nawet galaktyki. Wartość ta zależy zarówno od masy ciała niebieskiego, jak i jego promienia.

Obliczymy (bez uwzględniania efektów związanych z teorią względności), jaki byłby promień ciała niebieskiego o masie M, gdyby wartość drugiej prędkości kosmicznej była równa szybkości światła ($c \approx 300\,000\ \mathrm{km/s}$). Wzór (16.1) ze strony 101 przybierze następującą postać:

$$c = \sqrt{\frac{2GM}{r_{\mathrm{S}}}}$$

gdzie: c jest szybkością światła, G – stałą grawitacji, M – masą ciała niebieskiego, natomiast r_{S} – promieniem ciała niebieskiego.

Po przekształceniu powyższego wzoru otrzymujemy:

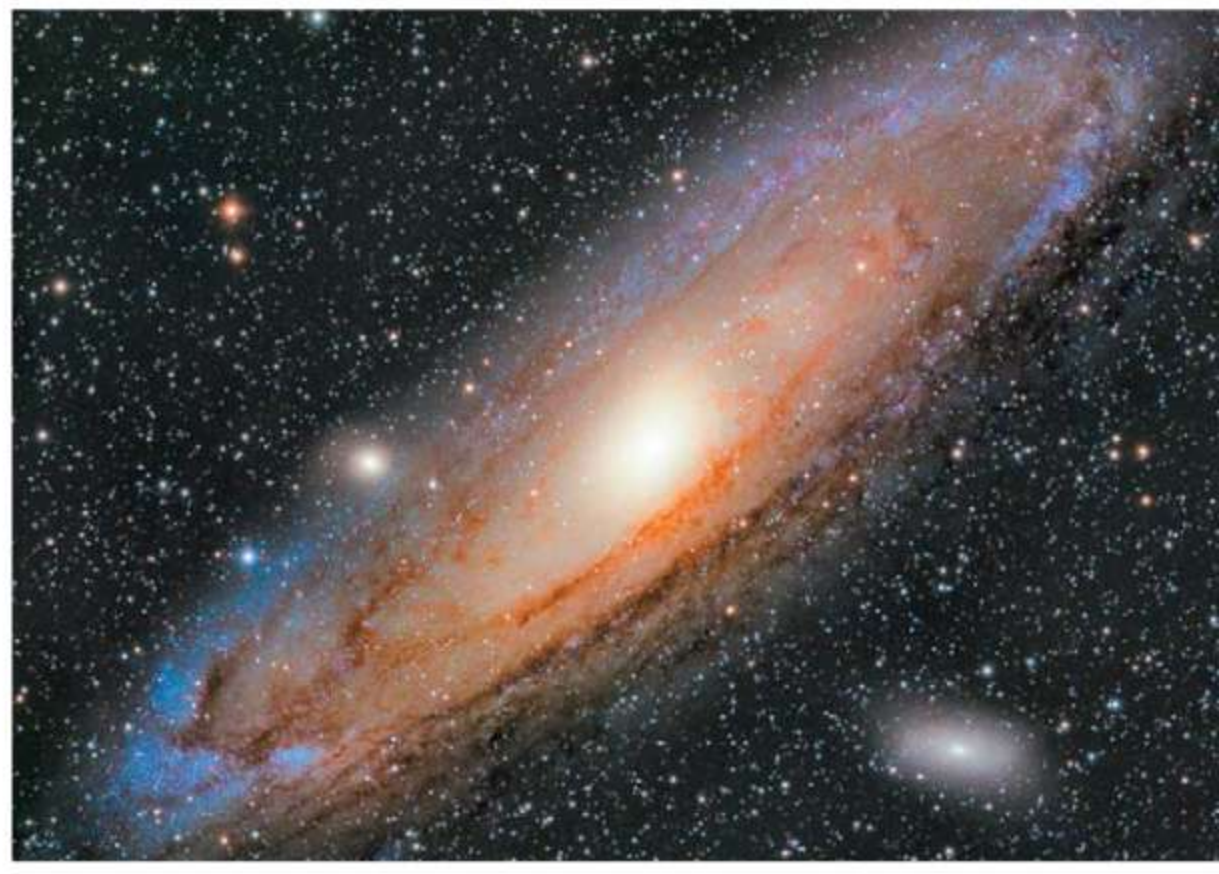
$$r_{\mathrm{S}} = \frac{2GM}{c^2}$$

Jeśli ciało o ustalonej masie M miałoby promień mniejszy od promienia r_{S}, to wartość prędkości ucieczki takiego ciała byłaby większa od szybkości światła. Ponieważ szybkość światła jest największą możliwą szybkością we Wszechświecie, oznacza to, że nawet światło nie może się wydostać z takiego obiektu, zwanego **czarną dziurą**.

W sąsiedztwie naszej Galaktyki znajduje się ponad 50 innych galaktyk tworzących tzw. **Grupę Lokalną**. Wśród nich są **Galaktyka Andromedy** (rys. 20.6) leżąca w gwiazdozbiorze Andromedy, w odległości 2,5 miliona lat świetlnych od Ziemi, oraz mniejsze galaktyki, widoczne z południowej półkuli Ziemi: Wielki Obłok Magellana, znajdujący się w odległości 162 000 lat świetlnych, oraz Mały Obłok Magellana (203 000 ly).

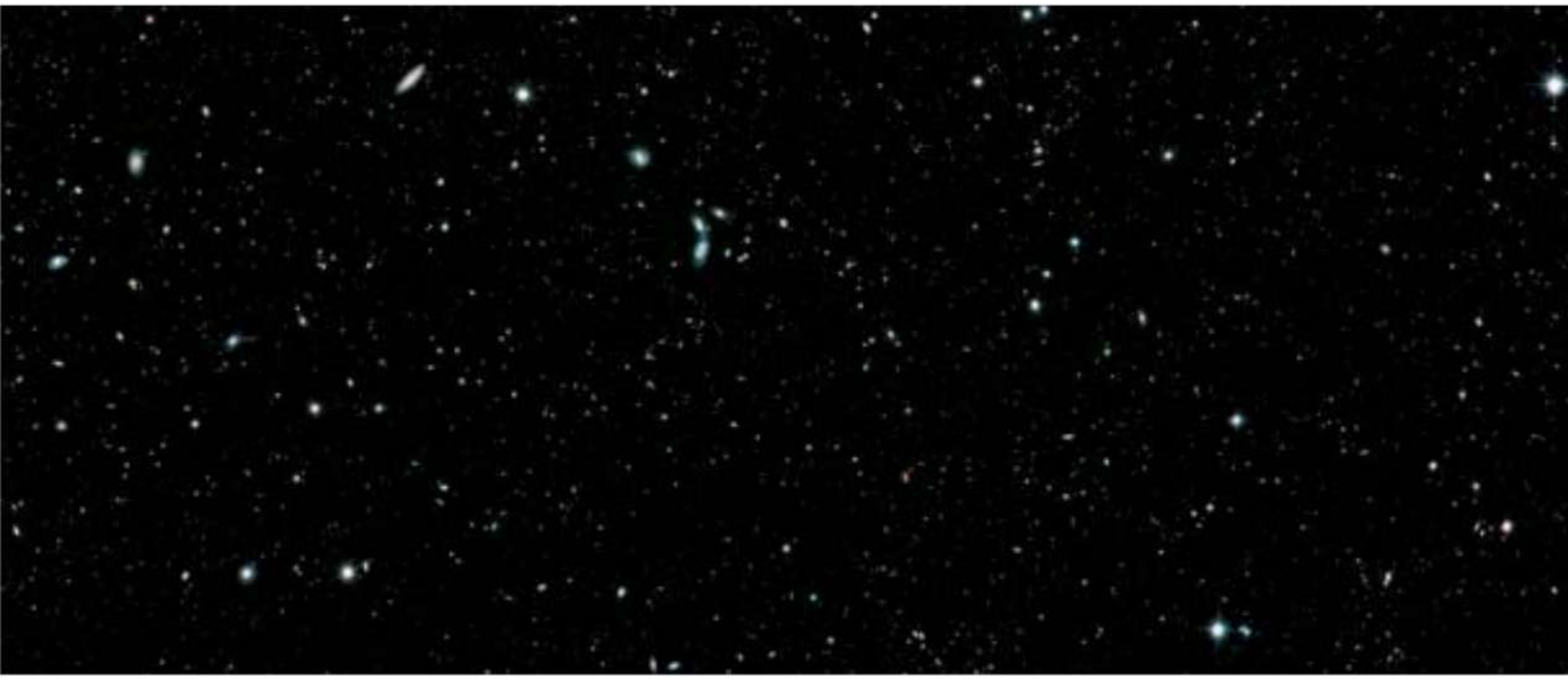
Galaktyka Andromedy ma wielkość zbliżoną do naszej i zawiera porównywalną liczbę gwiazd. Jest ona najdalszym obiektem, jaki może dostrzec człowiek bez potrzeby użycia przyrządów optycznych. Podobnie jak Droga Mleczna, jest widoczna nieuzbrojonym okiem jedynie w bardzo sprzyjających warunkach na ciemnym tle nieba.

Nasza Galaktyka jest tylko jedną z bardzo wielu galaktyk obserwowanych we Wszechświecie. Według niektórych ocen w części Wszechświata dostępnej naszym obserwacjom liczba galaktyk jest porównywalna z liczbą gwiazd tworzących Drogę Mleczną.



Rys. 20.6 Galaktyka Andromedy (M31)

Odległość najdalszych obserwowanych galaktyk, które na fotografiach przypominają niewielkie rozmyte plamki (rys. 20.7), jest rzędu 10 miliardów lat świetlnych, przy czym średnie odległości między galaktykami wynoszą od kilkuset tysięcy do kilku milionów lat świetlnych. Galaktyki zawierają od 10^8 do 10^{13} gwiazd.



Rys. 20.7 Obraz kilku tysięcy galaktyk

Podobnie jak gwiazdy skupiają się w galaktykach, galaktyki skupiają się w **grupach galaktyk** (należy do nich na przykład wspomniana powyżej Grupa Lokalna), a grupy tworzą **gromady galaktyk**, zawierające od kilkuset do kilku tysięcy galaktyk. Jedną z najbliżej położonych gromad galaktyk można zaobserwować w gwiazdozbiorze Panny (*Virgo*). Ta gromada zawiera ok. 1300 galaktyk i znajduje się w odległości ok. 54 milionów lat świetlnych. Gromady galaktyk mają tendencję do skupiania się w jeszcze większe struktury, zwane **supergromadami galaktyk**. Przyjmują one rozmiary rzędu 500 milionów lat świetlnych.

ZADANIA

1. W modelu, w którym średnica Galaktyki wynosi $600\ \mathrm{km}$ (tj. w przybliżeniu tyle, ile wynosi odległość pomiędzy wschodnią i zachodnią granicą Polski), oblicz odległość Ziemia–Słońce oraz odległość najbliższej gwiazdy od Słońca.
2. Oblicz czas, w którym Słońce dokona pełnego obiegu centrum Galaktyki (tzw. rok galaktyczny). Przyjmij, że Słońce porusza się wokół centrum Galaktyki po okręgu.
3. Przeczytaj *Wiedzieć więcej* na s. 139, a następnie wskaż poprawne dokończenie zdania. Hipotetyczny promień, jaki miałaby Ziemia, gdyby stała się czarną dziurą, jest w przybliżeniu równy
   A. $1\ \mathrm{cm}$ B. $10\ \mathrm{m}$ C. $1\ \mathrm{km}$ D. $100\ \mathrm{km}$



21. Prawo Hubble'a i teoria Wielkiego Wybuchu

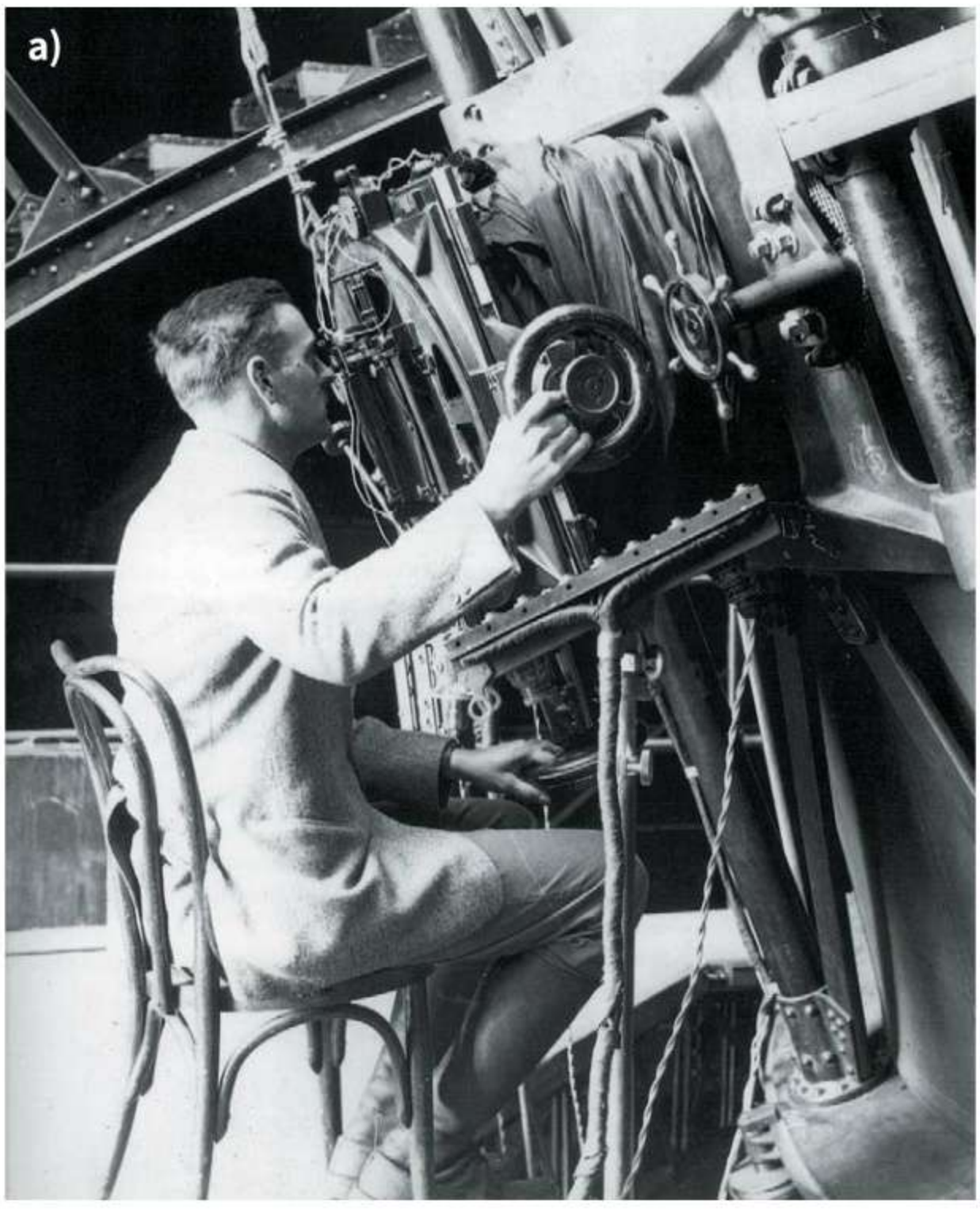
- „Ucieczka" galaktyk
- Prawo Hubble'a
- Wiek Wszechświata
- Teoria Wielkiego Wybuchu

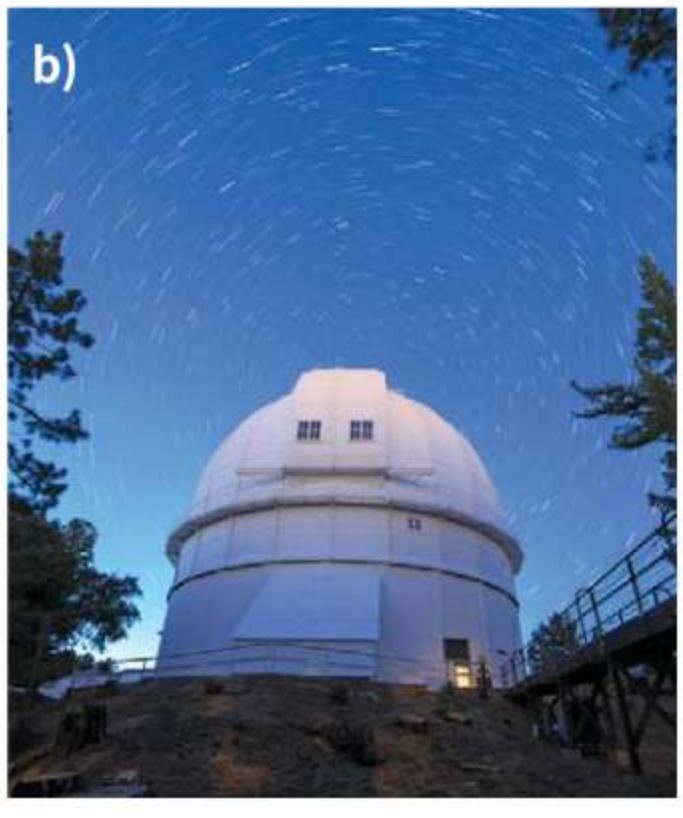
Przypomnij sobie pojęcie dwóch wymiarów i pojęcie trzech wymiarów.

Jednym z najbardziej doniosłych odkryć astronomicznych XX wieku było stwierdzenie:

> Odległe galaktyki oddalają się od nas z szybkościami wprost proporcjonalnymi do ich odległości, przy czym dotyczy to wszystkich odległych galaktyk, bez względu na to, gdzie znajdują się na niebie.

Odkrycia tego dokonał w 1929 roku amerykański astronom **Edwin Powell Hubble** (1889–1953), widoczny na rys. 21.1a. Hubble prowadził obserwacje galaktyk za pomocą największego w owych latach teleskopu, który znajdował się w Obserwatorium Mount Wilson w Stanach Zjednoczonych (rys. 21.1b).





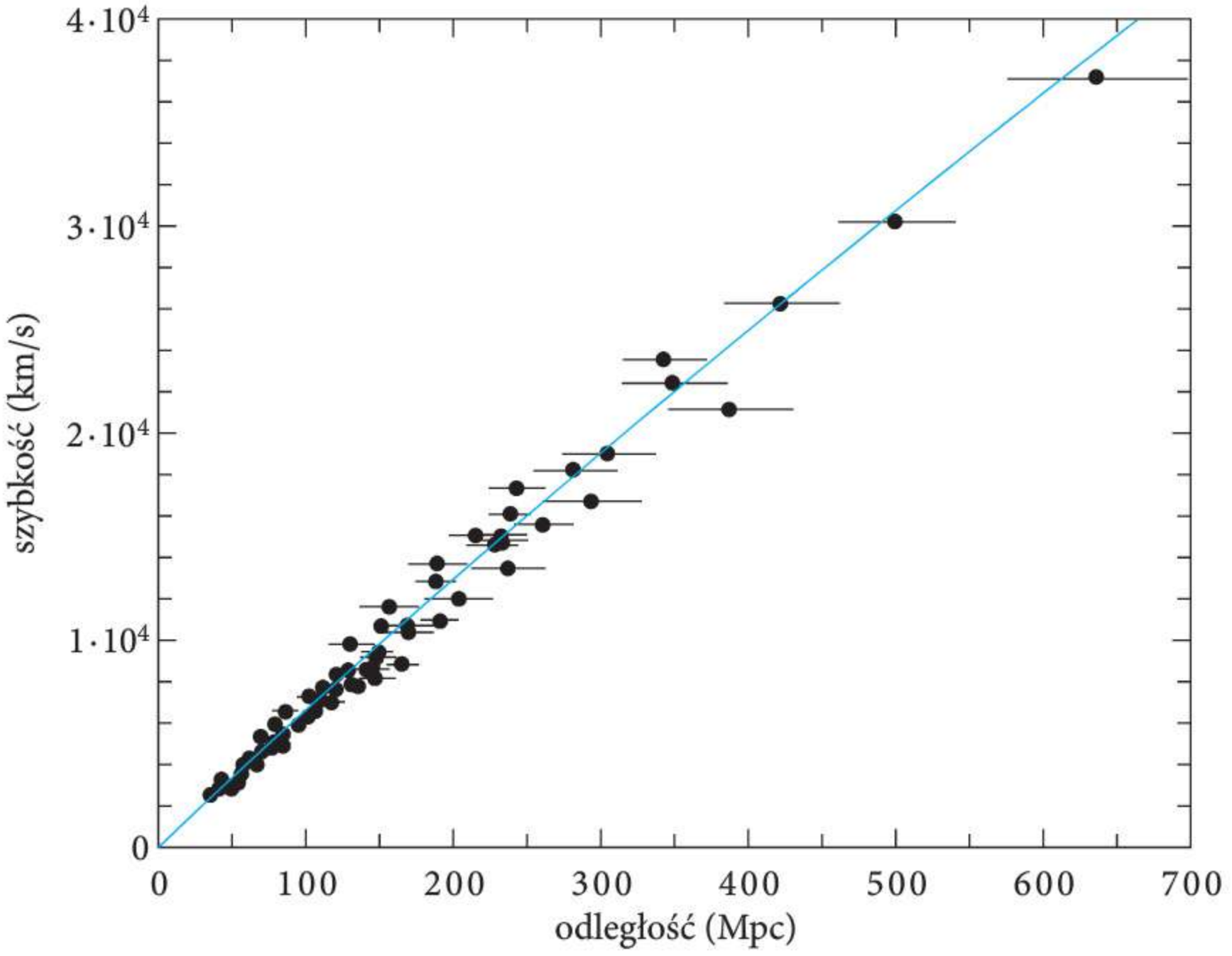
Rys. 21.1 Edwin Hubble (a) oraz obserwatorium, w którym pracował (b)

Odkrycie Hubble'a, nazwane później **prawem Hubble'a**, zapisane w formie wzoru ma następującą postać:

$$v_r = H \cdot r$$

gdzie:
v_r to szybkość oddalania się galaktyki (tzw. **szybkość ucieczki**),
H – **stała Hubble'a**, wyrażana tradycyjnie w $\frac{\text{km}}{\text{s} \cdot \text{Mpc}}$,
r – odległość galaktyki.

Prawo Hubble'a w formie graficznej przedstawia rysunek 21.2. Punkty na wykresie odpowiadają współcześnie uzyskanym wartościom odległości i szybkości ucieczki dla poszczególnych galaktyk. Poziome kreski oznaczają niepewności pomiarowe.



Rys. 21.2 Diagram ilustrujący prawo Hubble'a

Jeśli we wzorze opisującym prawo Hubble'a szybkość ucieczki wyrazimy w km/s, a odległość – w megaparsekach, to wartość **stałej Hubble'a**:

$$H \approx 71 \frac{\frac{\text{km}}{\text{s}}}{\text{Mpc}} \approx \frac{71 \frac{\text{km}}{\text{s}}}{3{,}1 \cdot 10^{19}\ \text{km}} \approx 2{,}3 \cdot 10^{-18}\ \frac{1}{\text{s}}$$

Oznacza to, że jeżeli odległość galaktyki wynosi np. 100 Mpc (100 milionów parseków, czyli 326 milionów lat świetlnych), to jej szybkość ucieczki wynosi 7100 km/s. Można to sprawdzić na wykresie (rys. 21.2).

Wartość stałej Hubble'a podawana przez różnych autorów może nieco odbiegać od podanej powyżej wartości 71 $\frac{\text{km}}{\text{s} \cdot \text{Mpc}}$, co wynika z różnych metod wyznaczania tej stałej. Zaobserwowano, że szybkości ucieczki najdalszych galaktyk wynoszą ponad 270 000 km/s, czyli więcej niż 90% szybkości światła.

Jeśli przyjmiemy, że szybkość ucieczki galaktyk nie zmieniała się istotnie w ciągu ostatnich kilkunastu miliardów lat, można przypuszczać, że w tak odległej przeszłości cała materia Wszechświata była skupiona bardzo blisko siebie. Możemy oszacować czas, który upłynął od tej chwili – nazywamy go **wiekiem Wszechświata**.

Przykład 21.1

Wiek Wszechświata

Oszacujemy wiek Wszechświata. Czas T_{W}, w którym galaktyka oddaliła się na odległość r ze stałą szybkością ucieczki v_{r}, możemy wyrazić wzorem:

$$T_{\text{W}} = \frac{r}{v_{\text{r}}}$$

Po podstawieniu w mianowniku wartości szybkości ucieczki wynikającej z prawa Hubble'a otrzymujemy:

$$T_{\text{W}} = \frac{r}{H \cdot r} = \frac{1}{H}$$

To znaczy, że szacowany wiek Wszechświata jest równy odwrotności stałej Hubble'a. Zwróć uwagę, że w końcowym wzorze nie występuje odległość galaktyki, czyli nie ma znaczenia, którą galaktykę wzięliśmy do obliczeń. Po podstawieniu do powyższego wzoru wartości stałej Hubble'a otrzymujemy:

$$T_{\text{W}} = 1{,}38 \cdot 10^{10}\ \text{lat}$$

czyli szacowany wiek Wszechświata to ok. 13,8 miliarda lat.

Prawo odkryte przez Hubble'a ma również podstawowe znaczenie przy wyznaczaniu odległości najbardziej oddalonych obiektów we Wszechświecie. Jeśli wyznaczymy szybkość ucieczki odległej galaktyki, to możemy obliczyć jej odległość.

Początkowo trudno było zrozumieć zjawisko ucieczki galaktyk. Jeśli bowiem wziąć pod uwagę tylko prawo grawitacji, sformułowane przez Newtona, to należało się spodziewać, że galaktyki wskutek wzajemnego przyciągania będą raczej zbliżać się do siebie, a nie oddalać. Aby objaśnić obserwowany fakt ucieczki galaktyk, początkowo przyjmowano, że „rozpycha" je jakaś nieznana siła. Ponadto wydawało się rzeczą niezrozumiałą, że Ziemia jest tym wyróżnionym miejscem, od którego „uciekają" wszystkie odległe galaktyki.

Wyjaśnienie ucieczki galaktyk nastąpiło z chwilą, gdy odkrycie Hubble'a rozpatrzono na gruncie ogólnej teorii względności, sformułowanej przez Alberta Einsteina. Okazało się, że ucieczka ma inną naturę niż na przykład wybuch racy w trakcie pokazu sztucznych ogni, gdy świecące iskry rozbiegają się na wszystkie strony.

W przypadku odległych galaktyk nie jest tak, że biegną one coraz szybciej w przestrzeni (w nieskończoność?), mijając inne obiekty we Wszechświecie, ponieważ to **przestrzeń się rozszerza** wraz z tymi galaktykami. Gdyby z bardzo odległej galaktyki obserwować naszą Galaktykę, okazałoby się, że również ona „ucieka" z olbrzymią szybkością. Przypomina to rosnące w trakcie pieczenia ciasto drożdżowe z rodzynkami, które oddalają się od siebie.

Rozszerzanie przestrzeni jest dla nas, jako istot **trójwymiarowych**, trudne do wyobrażenia. Łatwo pojąć, że coś w naszym otoczeniu „pęcznieje" i zwiększa swoją objętość w porównaniu z innymi nieruchomymi ciałami, ale trudno przyjąć fakt, że sama przestrzeń się rozszerza. W zrozumieniu tego zjawiska może nam pomóc doświadczenie opisane poniżej.

Doświadczenie 21.1
Model rozszerzającej się przestrzeni



Rys. 21.3

Nadmuchaj częściowo balonik (rys. 21.3), aż jego średnica wyniesie 15–20 cm. Na powierzchni balonika naklej 3 lub 4 kropki tworzące trójkąt lub czworokąt, odległe od siebie o 2–3 cm, i zmierz odległości między nimi. Następnie dodatkowo nadmuchaj balonik tak, aby jego średnica wynosiła 25–30 cm, i ponownie zmierz odległości między zaznaczonymi punktami.

Przekonasz się, że każdy z punktów oddalił się od sąsiedniego proporcjonalnie do wzajemnych początkowych odległości (na przykład dwukrotnie), a kształt figury geometrycznej (trójkąta lub czworokąta) nie zmienił się. Zwróć również uwagę, że nie ma znaczenia, który z punktów na powierzchni balonika będzie „wyróżniony", ponieważ w każdym przypadku pozostałe będą się od niego oddalać wraz ze wzrostem średnicy balonika.

W opisanym doświadczeniu mamy model rozszerzającej się **dwuwymiarowej** powierzchni balonika, będącej jak gdyby dwuwymiarową „przestrzenią". Wyobraźmy sobie, że na takiej powierzchni żyją hipotetyczne inteligentne **dwuwymiarowe** twory przypominające mrówki. Nie znają one trzeciego wymiaru i nie są w stanie pojąć, co to jest wysokość. Gdy rozszerza się powierzchnia, na której żyją owe inteligentne „mrówki", ze zdziwieniem dostrzegają one oddalanie się sąsiednich punktów w ich (niemal płaskim) środowisku, przy czym każda z „mrówek" utrzymywałaby, że to jej położenie jest niezmienne, a oddalają się pozostałe.

Analogicznie wygląda sytuacja w **trójwymiarowym** Wszechświecie. Obserwowany efekt ucieczki galaktyk to rezultat rozszerzania się przestrzeni całego Wszechświata. Efekt ten jest zauważalny dopiero przy obserwacjach najbardziej odległych obiektów. Przy obserwacjach ciał Układu Słonecznego, gwiazd wchodzących w skład naszej Galaktyki, a nawet przy obserwacjach bliskich galaktyk efekt rozszerzania się przestrzeni jest niezauważalny, gdyż dominują siły grawitacji. Galaktyka Andromedy, znajdująca się w odległości 2,5 miliona lat świetlnych, wręcz **zbliża się** do naszej Galaktyki z szybkością ok. 110 km/s.

Teoria Wielkiego Wybuchu

Wynikająca z obserwacji ucieczka galaktyk (opisana przez prawo Hubble'a) była jednym z podstawowych faktów leżących u podstaw **teorii Wielkiego Wybuchu** (ang. *Big Bang*). Teoria ta podaje ogólny zarys powstania Wszechświata niemal od jego początku, a także próbuje przedstawić możliwe scenariusze dalszych jego losów. Nazwa Wielki Wybuch ma charakter tradycyjny i – jak już wspomniano wcześniej – nie należy wyobrażać sobie, że w pewnym miejscu przestrzeni „coś wybuchło" na podobieństwo racy lub miny na poligonie wojskowym. Wielki Wybuch dokonał się w całej (ówczesnej) przestrzeni o znikomych rozmiarach.

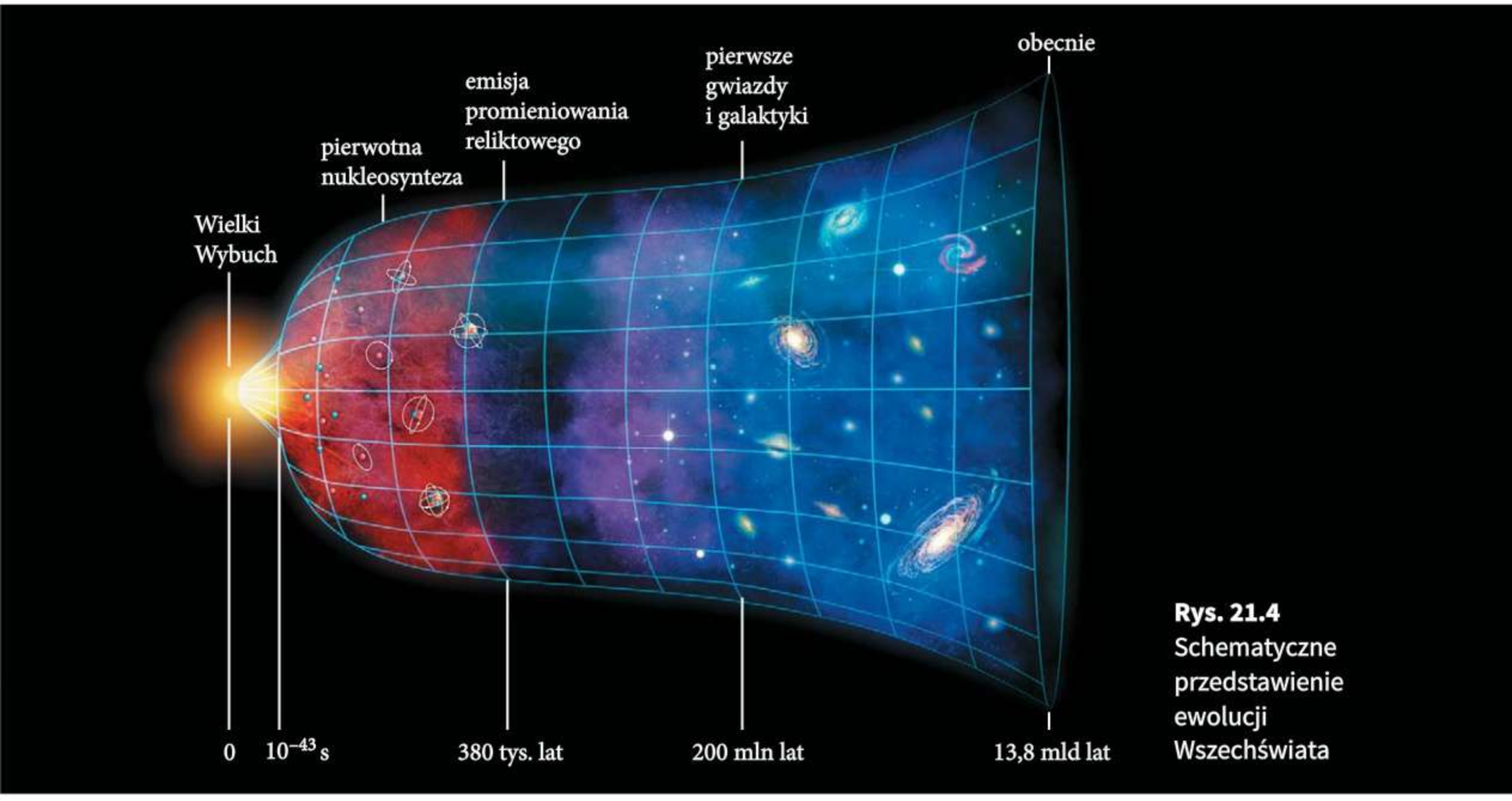
Przy opracowaniu teorii Wielkiego Wybuchu przyjęto dwa istotne założenia.

1. W całym Wszechświecie obowiązują te same, znane nam prawa fizyki (na przykład prawo grawitacji), tak samo zbudowana jest materia, taka sama jest szybkość światła w próżni itd.
2. Wielkoskalowy obraz Wszechświata nie zależy od położenia obserwatora, ale może zależeć od czasu. To oznacza, że hipotetyczny obserwator znajdujący się w odległej galaktyce również zaobserwuje oddalające się od niego galaktyki i sformułuje w identycznej formie prawo opisujące ich ucieczkę. Najbliższe otoczenie obserwatorów może być jednak różne: inaczej mogą być zbudowane układy planetarne, inne może być rozmieszczenie gwiazd w pobliżu obserwatora itd.

Zgodnie z tą teorią Wszechświat rozumiany jako przestrzeń i materia powstał w formie niezwykle zwartego i gorącego tworu ok. 14 miliardów lat temu. Nic nie potrafimy powiedzieć o ekstremalnych warunkach (gęstości, ciśnieniu i temperaturze) panujących we Wszechświecie w niewyobrażalnie krótkim przedziale czasu od chwili „zero" (czyli tzw. osobliwości początkowej) do ok. 10^{-43} sekundy. Dalsze ułamki sekundy to czas, kiedy gorący Wszechświat bardzo gwałtownie zaczął się rozszerzać. Następowały wówczas różnego typu reakcje, prowadzące do przemian fundamentalnych własności materii. W końcu tego etapu temperatura Wszechświata obniżyła się mniej więcej do miliarda kelwinów, a gęstość materii była zbliżona do gęstości powietrza. Wtedy pewna część (ok. 22%) powstałych nieco wcześniej neutronów i protonów połączyła się w jądra deuteru, a następnie helu i znikomej ilości innych pierwiastków (tzw. **pierwotna nukleosynteza**). Natomiast większa część protonów pozostała niezwiązana jako jądra wodoru. Ten etap ewolucji Wszechświata zakończył się kilka minut po chwili „zero".

Obecne obserwacje materii we Wszechświecie wskazują, że w jej skład wchodzi głównie wodór, a także hel, który jest produkowany we wnętrzach gwiazd (również we wnętrzu Słońca). Jednak nawet wszystkie gwiazdy we Wszechświecie w czasie swojego istnienia nie zdołałyby wytworzyć tyle helu, ile obserwujemy w całej obserwowanej obecnie materii Wszechświata. Płynie z tego wniosek, że we wczesnych etapach ewolucji Wszechświata musiały panować: niezwykle wysoka temperatura, niewyobrażalnie duże ciśnienie oraz olbrzymia gęstość materii, aby w tych warunkach na olbrzymią skalę doszło do utworzenia się helu, który powszechnie występuje we Wszechświecie. Należy pamiętać, że gwiazd wtedy jeszcze nie było.

Gdy około 380 000 lat po Wielkim Wybuchu temperatura Wszechświata obniżyła się mniej więcej do 4000 K, od gorącej materii oddzieliło się promieniowanie elektromagnetyczne, które wypełniło cały rozszerzający się i stygnący Wszechświat. Początkowo było to promieniowanie o bardzo dużej częstotliwości (o najkrótszych falach), jednak w miarę obniżania się temperatury Wszechświata (i zwiększania się jego rozmiarów) długość fali tego promieniowania wzrastała na tyle, że w ostatnich miliardach lat osiągnęła wartości charakterystyczne dla promieniowania mikrofalowego. Promieniowanie to nazwano **promieniowaniem reliktowym** (albo **mikrofalowym promieniowaniem tła**), gdyż jest reliktem, czyli pozostałością po bardzo wczesnym Wszechświecie.
Odkryli je w 1965 roku amerykańscy astrofizycy Arno Penzias i Robert Wilson, którzy za to odkrycie w 1978 roku zostali uhonorowani Nagrodą Nobla z fizyki. Odkrywcy stwierdzili, że promieniowanie reliktowe dociera do nas z całego nieba, a jego długość fali wynosi ok. 1,1 mm.



Rys. 21.4 Schematyczne przedstawienie ewolucji Wszechświata

Początkowo rozkład materii we Wszechświecie był niemal jednorodny (rys. 21.4). Najprawdopodobniej wskutek oddziaływań grawitacyjnych z niewielkich przypadkowych zagęszczeń materii powstawały większe skupiska, a to prowadziło do powstania gwiazd i galaktyk. Zarówno prawo Hubble'a, jak też wysoka zawartość helu w materii Wszechświata oraz odkrycie promieniowania reliktowego wypełniającego Wszechświat są podstawowymi **faktami obserwacyjnymi** potwierdzającymi słuszność teorii Wielkiego Wybuchu.

WIEDZIEĆ WIĘCEJ

Fizyka czy filozofia przyrody

Często zadawane są pytania: *Co było przyczyną Wielkiego Wybuchu?*, a także: *Co było przed Wielkim Wybuchem*? W tym miejscu warto zwrócić uwagę, że nie jest rolą astronoma (ani fizyka) poszukiwanie odpowiedzi na te pytania. Metodą badawczą zarówno astronomii, jak też fizyki są obserwacje i doświadczenia, na podstawie których uczeni gromadzą różne fakty i formułują prawa opisujące przyrodę (na przykład prawo grawitacji). Na gruncie sformułowanych praw przyrody uczeni tworzą teorie objaśniające przebieg zjawisk oraz przewidują ewentualne następstwa zachodzących procesów. Formułowane teorie są często modyfikowane i rozszerzane, w miarę jak przybywa faktów obserwacyjnych. Zdarza się, że niektóre teorie w świetle nowszych odkryć okazują się fałszywe. Natomiast poszukiwanie najbardziej podstawowych (pierwotnych) przyczyn występowania zjawisk w przyrodzie należy do filozofów przyrody. W kwestii powstania Wszechświata niektórzy z filozofów przyrody odwołują się do teologii, inni zaś reprezentują pogląd o wiecznym istnieniu materii, która może przybierać różne formy.

Podobnie, z braku jakichkolwiek informacji o samym początku Wszechświata (chwili „zero"), astronom i fizyk nie mogą dać odpowiedzi na pytanie, co było „przed" Wielkim Wybuchem. W szczególności czy można rozpatrywać czas i przestrzeń, gdy nie istnieje materia? Innymi słowy, czy czas – tak jak to wyobrażał sobie Isaac Newton – jest pewnym parametrem matematycznym płynącym jednostajnie bez względu na cokolwiek zewnętrznego? Według Gottfrieda Leibniza, który żył w tym samym czasie co Newton, przestrzeń to „uporządkowany układ ciał", czas zaś to „porządek ich kolejności". Jeśli nie istnieje materia, to trudno mówić o czasie i przestrzeni.

ZADANIA

1. Z obserwacji widma pewnej galaktyki obliczono jej szybkość ucieczki, która wynosiła $28\,000\ \mathrm{km/s}$. Na podstawie wykresu na rysunku 21.2 oceń przybliżoną odległość tej galaktyki.
2. Oblicz wartość stałej Hubble'a w $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}\cdot\mathrm{ly}}$.
3. Stała Hubble'a wyznaczona różnymi metodami przyjmuje wartości od $67{,}6\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}\cdot\mathrm{Mpc}}$ do $74{,}0\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}\cdot\mathrm{Mpc}}$. Oblicz, w jakich granicach zmieniałby się wiek Wszechświata przy różnych wartościach stałej Hubble'a.



Układ Słoneczny

Układ Słoneczny tworzą Słońce wraz z obiegającymi je planetami, planetami karłowatymi, planetoidami, meteoroidami i kometami.
Do planet grupy ziemskiej, charakteryzujących się m.in. twardą powierzchnią, zaliczamy: Merkurego, Wenus, Ziemię i Marsa.
Planety olbrzymy: Jowisz, Saturn, Uran i Neptun mają m.in. rozległe i gęste atmosfery. Planety tej grupy mają szczególnie dużo księżyców.

Zjawisko meteoru obserwujemy wtedy, gdy do atmosfery wpada niewielki meteoroid, powodując jej krótkotrwałe świecenie.



Jednostki odległości stosowane w astronomii

Jednostkami odległości w astronomii są:

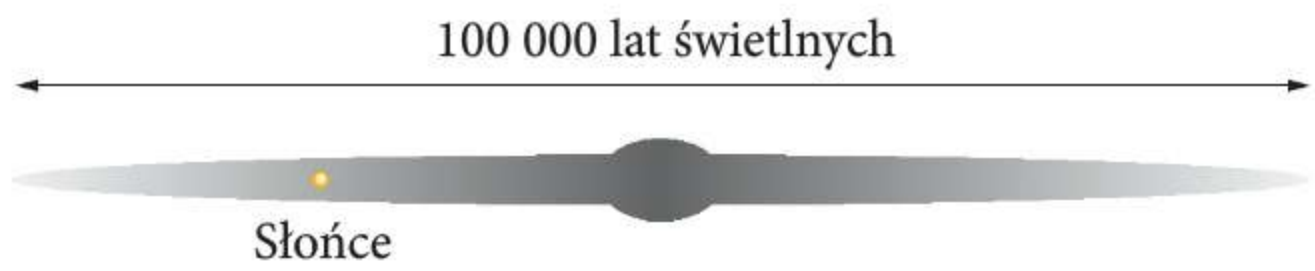
- jednostka astronomiczna (średnia odległość Ziemi od Słońca w peryhelium i aphelium, czyli ok. $150\ \text{mln km}$),
- rok świetlny (odległość, którą przebywa światło w ciągu jednego roku),
- parsek (odległość, z której jedna jednostka astronomiczna jest widoczna pod kątem jednej sekundy kątowej).

Najbliższą Ziemi gwiazdą (nie licząc Słońca) jest Proxima Centauri, znajdująca się w odległości 4,2 roku świetlnego.



Nasza Galaktyka i jej miejsce we Wszechświecie

Słońce jest jedną z 200 miliardów gwiazd tworzących Galaktykę.
Galaktyka ma kształt dysku o średnicy 100 000 lat świetlnych.
Słońce leży ok. 26 500 lat świetlnych od środka Galaktyki, w którym znajduje się supermasywna czarna dziura.
Galaktyki we Wszechświecie skupiają się w grupy, gromady i supergromady.





Prawo Hubble'a i teoria Wielkiego Wybuchu

Zgodnie z prawem Hubble'a odległe galaktyki oddalają się od nas z szybkościami wprost proporcjonalnymi do ich odległości.
Wiek Wszechświata obliczony na podstawie prawa Hubble'a wynosi 13,8 miliarda lat.
Głównymi faktami obserwacyjnymi przemawiającymi za teorią Wielkiego Wybuchu są:

- prawo Hubble'a opisujące efekt ucieczki galaktyk,
- obserwowany nadmiar helu wytworzonego w trakcie pierwotnej nukleosyntezy,
- mikrofalowe promieniowanie tła dochodzące z całego nieba.

ZADANIA POWTÓRZENIOWE

1. Oceń prawdziwość poniższych zdań. Wskaż P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F, jeśli jest fałszywe.

1.	Wśród ciał układu planetarnego tylko planety świecą własnym światłem.	**P**	**F**
2.	Do roku 2019 odkryto ok. 4000 planet obiegających gwiazdy inne niż Słońce.	**P**	**F**
3.	Mikołaj Kopernik i Tycho Brahe nie wiedzieli o istnieniu Urana i Neptuna.	**P**	**F**
4.	Najmniejszą planetą w Układzie Słonecznym jest Merkury.	**P**	**F**
5.	Skład atmosfery Merkurego jest zbliżony do składu atmosfery ziemskiej.	**P**	**F**
6.	Najwięcej kraterów uderzeniowych można obserwować na powierzchni Jowisza.	**P**	**F**
7.	Meteoroidy nigdy nie wpadają do atmosfery ziemskiej.	**P**	**F**
8.	Na powierzchni Ziemi brak kraterów uderzeniowych.	**P**	**F**

2. Wskaż wszystkie poprawne dokończenia zdania.

Musimy wiedzieć, ile wynosi odległość Ziemi od Słońca, aby obliczyć:

A. okres obiegu Ziemi wokół Słońca.
B. prędkość kątową obrotu Ziemi.
C. prędkość, z jaką Ziemia obiega Słońce.
D. ile czasu potrzebuje światło na dotarcie ze Słońca na Ziemię.
E. ile czasu potrzebuje impuls elektromagnetyczny, aby dotrzeć z Ziemi na Marsa.

3. Jednostki długości stosowane w astronomii wyrażone w jednostkach długości SI wynoszą: $1\ \text{au} \approx 150 \cdot 10^6\ \text{km}$, $1\ \text{ly} \approx 9{,}5 \cdot 10^{12}\ \text{km}$, $1\ \text{pc} \approx 3{,}1 \cdot 10^{13}\ \text{km}$.

3.1. Oblicz czas, w którym promieniowanie elektromagnetyczne przebywa odległość ze Słońca do Ziemi.

3.2. Odległość do Wielkiego Obłoku Magellana wynosi $162\,000\ \text{ly}$. Kamil na sprawdzianie napisał, że Wielki Obłok Magellana znajduje się ok. $49{,}7\ \text{tys. pc}$ od Ziemi, a Maja, że ok. $10^{10}\ \text{au}$.

Odpowiedz na pytanie. Wskaż poprawną odpowiedź wybraną spośród A–C oraz jej uzasadnienie wybrane spośród 1–3.

Kto podał poprawną informację: Maja czy Kamil?

A.	Tylko Maja,	ponieważ	**1.**	$3{,}26\ \text{ly} \approx 1\ \text{pc}$ i $1\ \text{pc} \approx 6{,}32 \cdot 10^4\ \text{au}$.
B.	Zarówno Maja, jak i Kamil,		**2.**	$1\ \text{pc} \approx 3{,}26\ \text{ly}$ i $1\ \text{ly} \approx 6{,}32 \cdot 10^4\ \text{pc}$.
C.	Tylko Kamil,		**3.**	$1\ \text{pc} \approx 3{,}26\ \text{ly}$ i $1\ \text{ly} \approx 6{,}32 \cdot 10^4\ \text{au}$.

3.3. Przerysuj do zeszytu i uzupełnij tabelę.

	Odległość od Ziemi			
	A (km)	**B** (au)	**C** (ly)	**D** (pc)
Słońce		1		
Proxima Centauri	$4{,}02 \cdot 10^{13}$			
Centrum Galaktyki			26 500	
Galaktyka Andromedy			$2{,}5 \cdot 10^{6}$	
Gromada galaktyk *Virgo*			$54 \cdot 10^{6}$	

4. Oszacuj odległość do gwiazdy Kapella (α Aur), jeśli wiadomo, że jej kąt paralaksy wynosi $0{,}076''$ (sekundy kątowej).

5. Zgodnie z odkryciem Edwina Hubble'a prędkość ucieczki galaktyki oddalonej o r opisuje wzór:

$$v_r = 71 \frac{\text{km}}{\text{s} \cdot \text{Mpc}} \cdot r$$

5.1. Wskaż poprawne dokończenie zdania.

Zgodnie z prawem Hubble'a szybkość ucieczki odległej galaktyki jest

A. proporcjonalna do jej odległości.

B. odwrotnie proporcjonalna do jej odległości.

C. proporcjonalna do kwadratu jej odległości.

D. odwrotnie proporcjonalna do kwadratu jej odległości.

5.2. Oceń prawdziwość poniższych zdań. Wskaż P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F, jeśli jest fałszywe.

1.	Z prawa Hubble'a wynika, że dowolna odległa galaktyka porusza się względem naszej Galaktyki ruchem przyspieszonym.	**P**	**F**
2.	Na podstawie prawa Hubble'a można porównać szybkości dwóch galaktyk: jeżeli pewna galaktyka jest o $1\ \text{Mpc}$ dalej od Ziemi niż inna galaktyka, to szybkość dalszej galaktyki jest o $71\ \text{km/s}$ większa od szybkości bliższej galaktyki.	**P**	**F**
3.	Z prawa Hubble'a wynika, że gdy jedna galaktyka, znajdująca się obecnie w odległości r, oddala się od nas z szybkością v, to druga, znajdująca się w odległości $5r$, oddala się od nas z szybkością $5v$.	**P**	**F**

5.3. Oblicz wartość prędkości, z jaką oddala się galaktyka odległa od obserwatora na Ziemi o $d = 1 \cdot 10^9\ \text{ly}$.

6. Pierwsze oszacowania (z 1929 roku) stałej Hubble'a dały wynik: $H \approx 500 \frac{\text{km}}{\text{s} \cdot \text{Mpc}}$.

Oblicz, ile wynosiłby wiek Wszechświata wynikający z przyjęcia tej wartości, i porównaj wynik z wiekiem najstarszych skał na Ziemi (3–4 miliardy lat).



RUCH DRGAJĄCY HARMONICZNY

- Siły sprężystości
- Opis ruchu harmonicznego
- Ruch wahadła matematycznego
- Zjawisko rezonansu mechanicznego





22. Sprężystość jako makroskopowy efekt oddziaływań mikroskopowych

- Przyczyny występowania sił sprężystości
- Przyczyny stabilności kształtu ciał stałych

Przypomnij sobie, co wiesz o budowie atomu i wzajemnych oddziaływaniach cząstek naładowanych, a także o tym, jakie zmiany zachodzą w cząsteczkowej budowie metali wraz ze wzrostem temperatury.

W doświadczeniu 3 na s. 334 wykazujemy, że ciała można ważyć za pomocą siłomierza, ponieważ wydłużenie sprężyny jest wprost proporcjonalne do wartości siły zewnętrznej $\vec{F}_z$ działającej na sprężynę.

$$x \sim F_z$$

Wielkość wydłużenia x odczytujemy dla sprężyny znajdującej się w równowadze. Zgodnie z pierwszą zasadą dynamiki siła, która powoduje rozciągnięcie sprężyny, jest równoważona przez siłę $\vec{F}_s$, której źródłem jest sprężyna.

$$\vec{F}_s = -\vec{F}_z$$

Siłę tę nazywamy siłą sprężystości. Przypomnijmy definicję tej siły.

Siły sprężystości są to siły występujące przy odkształcaniu ciał. Dążą one do przywrócenia ciałom ich pierwotnych kształtów i rozmiarów.

Efekty sprężyste występują tylko w ciałach stałych – ciecze i gazy nie wykazują tzw. sprężystości postaci.
Czy siły sprężystości są przejawem jakichś nieznanych ci dotąd oddziaływań? Otóż nie. Są one wynikiem oddziaływań elektromagnetycznych między cząsteczkami materii, tych samych, które powodują, że ciała stałe mają swój ustalony kształt, do którego chcą wracać. Opisywanie struktury cząsteczek i ich wzajemnego oddziaływania jest przedmiotem studiów fizyki na uniwersytecie. Wiele można jednak zrozumieć, jeśli rozważy się bardzo prosty model.
Wiemy, że każdy atom jest obojętny elektrycznie, czyli całkowity ładunek ujemny elektronów jest równy dodatniemu ładunkowi jądra. Ładunek elektryczny w pojedynczym atomie jest rozłożony najczęściej symetrycznie.

W cząsteczce składającej się np. z kilku atomów oddziaływanie elektromagnetyczne między elektronami powoduje ich przesunięcie, więc cząsteczka ma zwykle nieco więcej ładunków ujemnych na jednym końcu, a dodatnich na drugim. Wobec tego cząsteczki przyciągają się wzajemnie siłami elektrostatycznymi i porządkują się. Tworzą przy tym np. łańcuchy, w których dodatni koniec jednej cząsteczki będzie sąsiadował z ujemnym końcem innej (rys. 22.1).



Rys. 22.1 Model łańcucha cząsteczek oddziałujących elektromagnetycznie

Powyższy rysunek jest ogromnie uproszczony. Cząsteczki ciał sprężystych często układają się nie w łańcuchy, a w bardzo złożone struktury przestrzenne.

Doświadczenia ze ściskaniem ciał sprężystych pokazują, że gdy cząsteczki są do siebie zbliżane, pojawiają się siły odpychania. Wynikają one głównie ze wzajemnych oddziaływań dodatnio naładowanych jąder atomów. Gdy ciało nie jest ściskane ani rozciągane, siły przyciągania i odpychania równoważą się wzajemnie.

Przedstawiony model pozwala zrozumieć, dlaczego zjawiska sprężyste występują tylko dla niezbyt wielkich odkształceń. Jeśli łańcuch cząsteczek zostanie przerwany, to po usunięciu siły zewnętrznej nie sklei się ponownie – na przykład zerwana gumka nie połączy się, choć będziemy stykać ze sobą jej końce, ponieważ nie umiemy zetknąć ponownie cząsteczek tak, aby odległości między nimi były rzędu jednej milionowej centymetra, a dopiero przy takich odległościach pojawiają się oddziaływania elektromagnetyczne.
Może się też zdarzyć, że na skutek działania siły łańcuch nie zostanie zerwany, ale nastąpi trwała, nieodwracalna przebudowa sieci krystalicznej ciała.

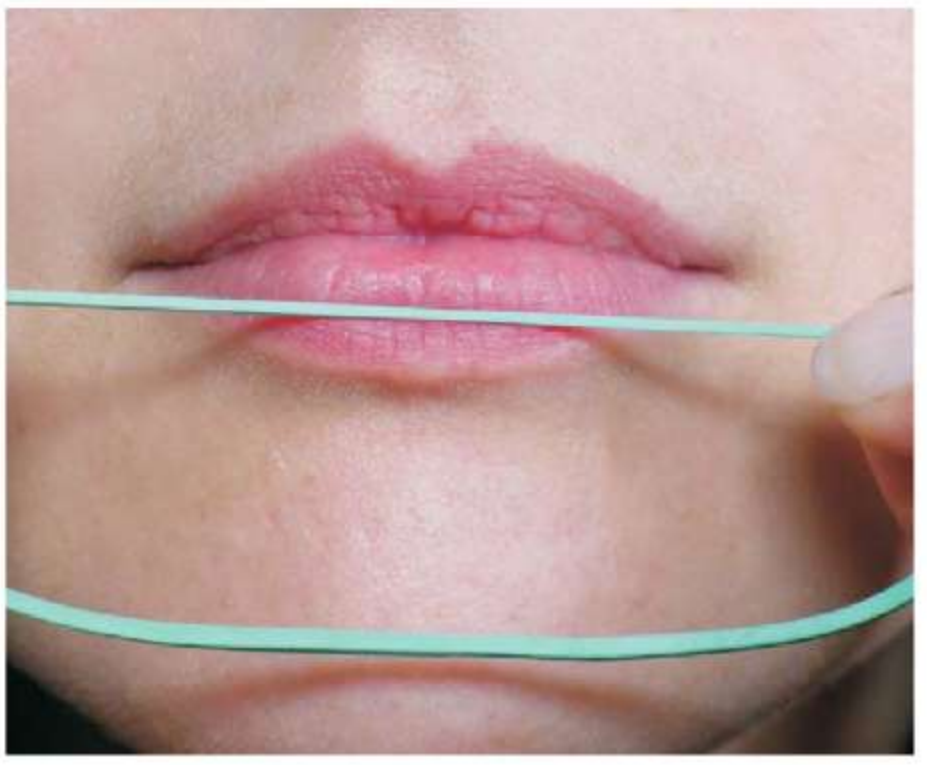
Odkształcenie jest niesprężyste (plastyczne), jeśli wskutek działania sił zewnętrznych następuje nieodwracalna zmiana kształtu ciała (trwała zmiana położeń cząsteczek sieci krystalicznej).

Jeśli jednak odkształcenie ciała jest niewielkie, łańcuchy z naszego obrazka (rys. 22.1) nie ulegną zerwaniu, tylko się rozciągną. Po usunięciu siły zewnętrznej ciało będzie dążyć do poprzedniego kształtu, w którym energia oddziaływań jest najmniejsza. Cząsteczki ciała będą przy tym zespołowo wykonywać drgania. Drgania te są zwykle szybko tłumione, a ich energia zostaje zamieniona na energię drgań termicznych pojedynczych cząsteczek ciała i otoczenia. Można to zaobserwować, gdy przyłoży się

(nieużywaną, starannie umytą i zdezynfekowaną!) gumkę recepturkę do warg (rys. 22.2), a następnie kilkakrotnie ją rozciągnie i powtórnie przyłoży do warg. Temperatura gumki będzie wyższa.

Wobec tego:

> Stabilny kształt ciał stałych i działające przy odkształceniach siły sprężystości są efektem oddziaływań elektromagnetycznych między cząsteczkami materii.

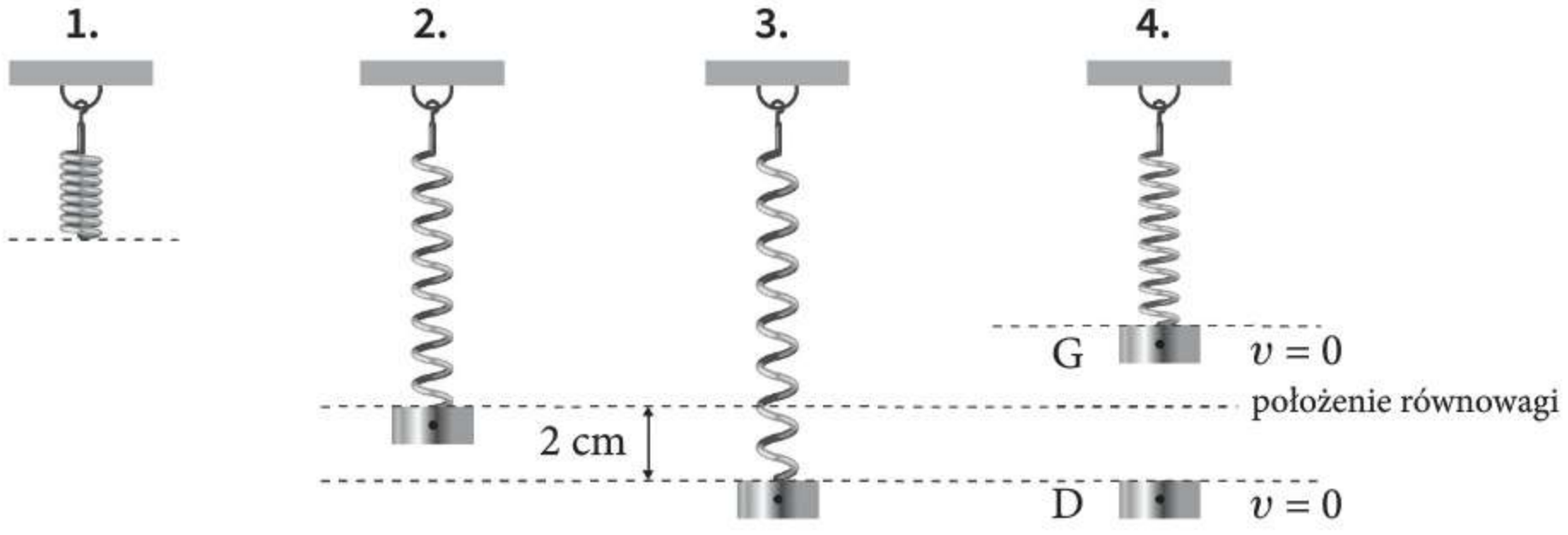


Rys. 22.2 Zamiana energii potencjalnej sprężystości w energię wewnętrzną

Siły międzycząsteczkowe, omawiane w szkole podstawowej, są siłami o naturze elektromagnetycznej.

ZADANIA

1. Na sprężynie (rys. 1), która wydłuża się o $1\ \mathrm{cm}$, gdy działa na nią siła o wartości $0{,}2\ \mathrm{N}$, zawieszono odważnik o masie $m = 0{,}1\ \mathrm{kg}$. Pomiń masę sprężyny i opory ruchu. Przyjmij, że $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$.



Rys. 22.3

a) Oblicz wydłużenie x_0 sprężyny spowodowane zawieszeniem odważnika (rys. 2).
b) Odważnik wychylono z położenia równowagi (rys. 3) o $x_1 = 2\ \mathrm{cm}$ w dół i puszczono. Odważnik porusza się z położenia D do położenia G i z powrotem, wykonując drgania. Oblicz wartość siły, którą sprężyna działa na odważnik w położeniach G i D (rys. 4).
c) Powtórz obliczenia dla przypadków, gdy odważnik został wychylony o $x_2 = 5\ \mathrm{cm}$ i $x_3 = 7\ \mathrm{cm}$.
d) Podaj zwrot każdej z obliczonych sił.

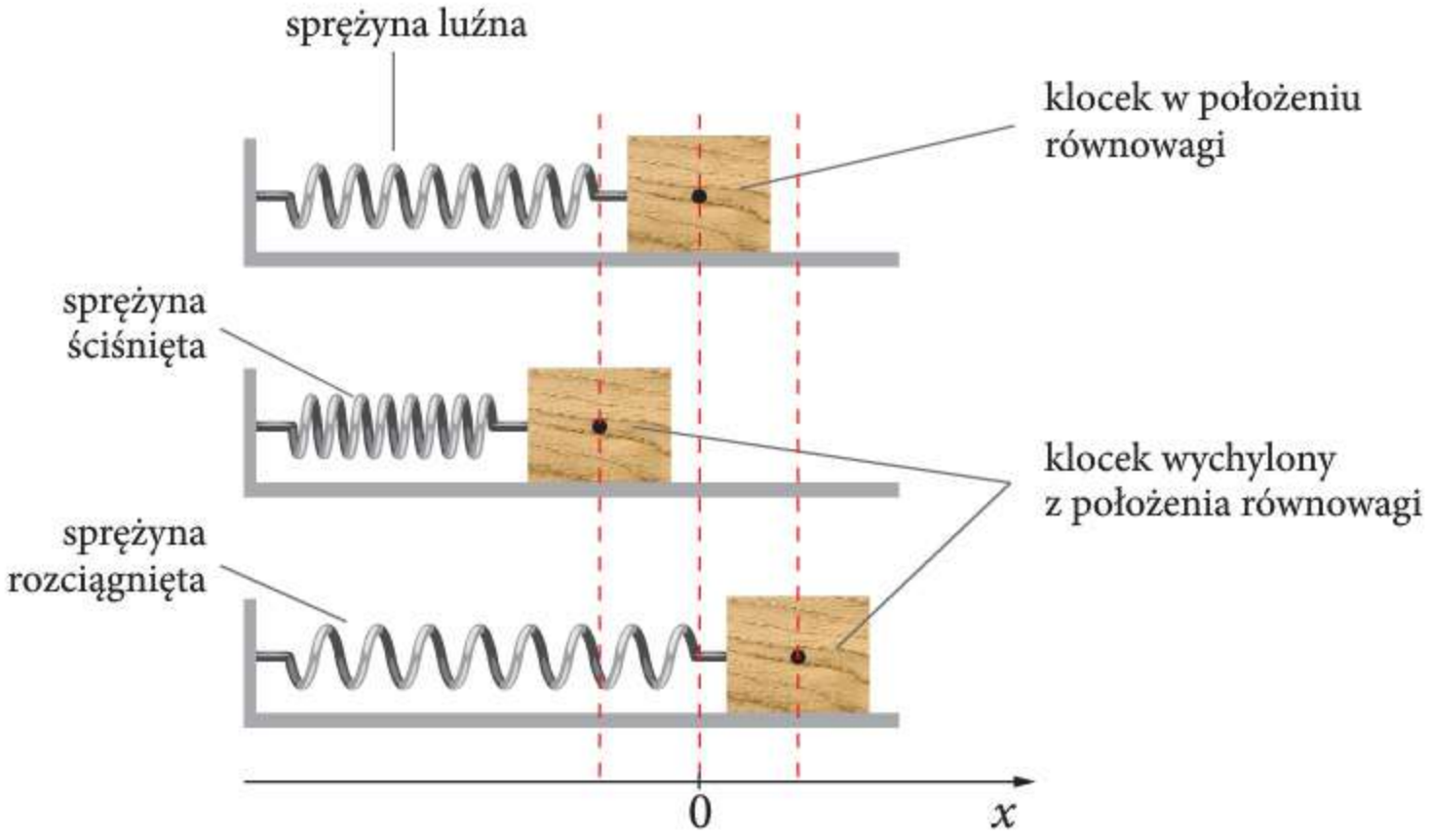


23. Ruch drgający harmoniczny

- Wielkości fizyczne opisujące ruch drgający harmoniczny
- Cechy ruchu harmonicznego
- Rodzaje ruchu składające się na ruch drgający harmoniczny
- Zależność współrzędnej siły sprężystości od wydłużenia sprężyny wykonującej ruch drgający harmoniczny

Przypomnij sobie rodzaje ruchów zmiennych, zasady dynamiki i opis ruchu wahadła.

Ruch drgający jest bardzo powszechny w przyrodzie. Wykonują go np. jony w sieci krystalicznej metalu, struny gitary i nasze serca. Tak porusza się sprężysty pręt metalowy umocowany jednym końcem w imadle, a także odważnik zawieszony na sprężynie lub klocek zaczepiony na końcu poziomo ułożonej sprężyny, przymocowanej drugim końcem do uchwytu, po wprowadzeniu w ruch (rys. 23.1). Klocek porusza się po bardzo śliskiej powierzchni.



Rys. 23.1 Drgania klocka na śliskiej, poziomej powierzchni

Klocek (rys. 23.1) wytrącony z położenia równowagi będzie wykonywał drgania, które po pewnym czasie ustaną z powodu oporów ruchu.

W sytuacji, w której opory ruchu byłyby pomijalnie małe (drgania nie byłyby tłumione), obserwowany ruch drgający byłby **ruchem harmonicznym**.

Badanie ruchu harmonicznego pozwala zauważyć następujące cechy tego ruchu:

- Jest to ruch powtarzający się (okresowy).
- Prędkość ciała drgającego ulega zmianie, zmieniają się jej wartość i zwrot.
- W położeniach maksymalnego wychylenia szybkość ciała drgającego jest równa zeru.

- Podczas przechodzenia przez położenie równowagi ciało ma maksymalną szybkość.
- Ciało drgające zbliża się do położenia równowagi ruchem przyspieszonym, a oddala się od niego ruchem opóźnionym.

Do opisu ruchu drgającego wprowadzono pojęcia opisane w poniższej tabeli.

Tabela 23.1

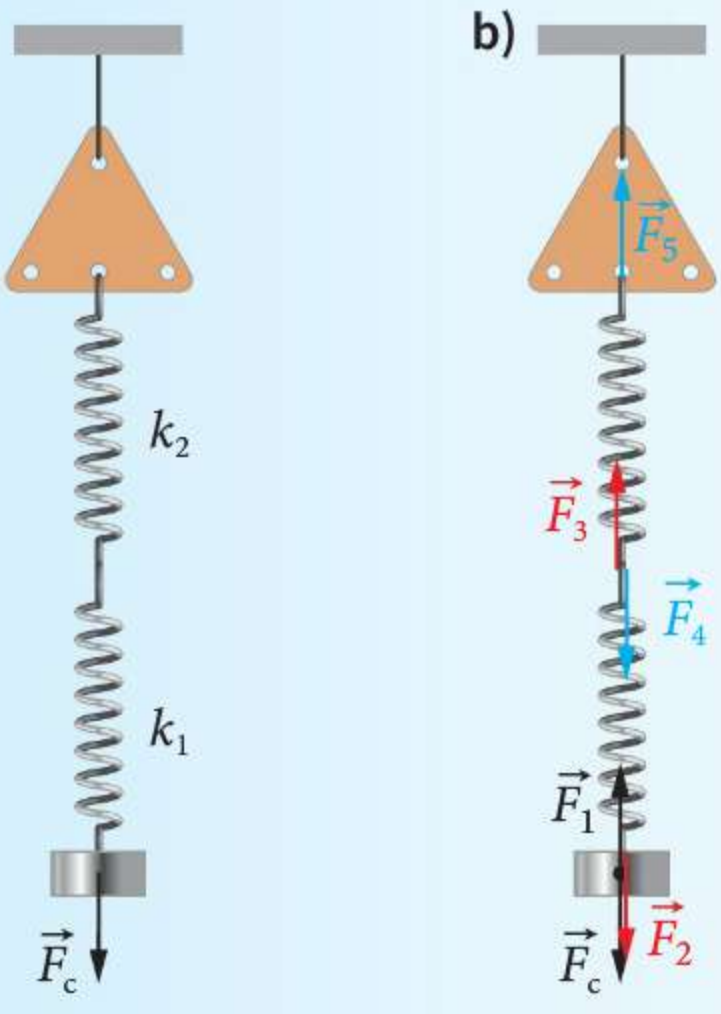
Pojęcie	Symbol	Jednostka	Opis
położenie równowagi	—	—	położenie ciała przed wprawieniem go w ruch drgający
wychylenie (z położenia równowagi) w danej chwili t	x	m, cm	współrzędna położenia ciała drgającego
amplituda	A	m, cm	maksymalne wychylenie z położenia równowagi
okres drgań	T	s	czas wykonywania jednego pełnego drgania
częstotliwość drgań	ν	Hz	wielkość informująca o liczbie drgań w jednostce czasu

Z analizy sił działających na sprężynę i zawieszone na niej ciało wynika, że wartość zwróconej do położenia równowagi siły sprężystości jest wprost proporcjonalna do wydłużenia sprężyny, równego bezwzględnej wartości współrzędnej wychylenia sprężyny z położenia równowagi $F_s \sim |x|$. Jeśli wprowadzimy współczynnik proporcjonalności k charakteryzujący właściwości sprężyste używanej sprężyny (miękka, twarda), możemy zapisać:

$$F_s = k|x|$$

Przykład 23.1

Współczynnik sprężystości układu sprężyn



$\vec{F}_c$ – ciężar odważnika
$\vec{F}_1$ – siła, którą sprężyna 1 działa na odważnik
$\vec{F}_2$ – siła, którą odważnik działa na sprężynę 1
$\vec{F}_3$ – siła, którą sprężyna 2 działa na sprężynę 1
$\vec{F}_4$ – siła, którą sprężyna 1 działa na sprężynę 2
$\vec{F}_5$ – siła, którą uchwyt działa na sprężynę 2

Rys. 23.2

Na dwóch połączonych szeregowo bardzo lekkich sprężynach o współczynnikach sprężystości k_1 i k_2 zawieszono odważnik o ciężarze $\vec{F}_c$ (rys. 23.2a). Układ jest w równowadze i każda sprężyna jest rozciągana siłą o wartości F_c (rys. 23.2b), więc:

$$F_c = k_1 x_1 \qquad \text{i} \qquad F_c = k_2 x_2$$

Odpowiemy na pytanie, jaki współczynnik sprężystości k musiałaby mieć sprężyna, która pod działaniem siły $\vec{F}_c$ wydłużyłaby się o $x = x_1 + x_2$, czyli o tyle, o ile wydłużyły się połączone sprężyny.

Wówczas:

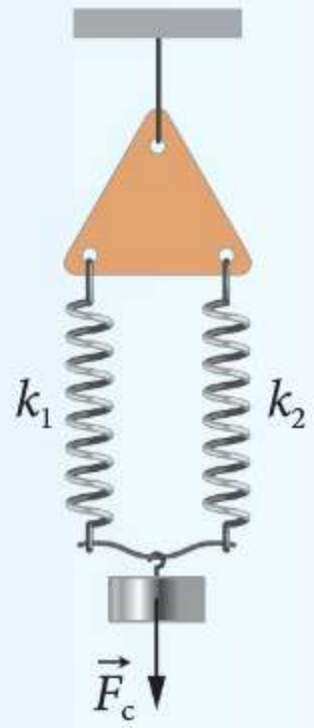
$$F_c = k(x_1 + x_2) = k\left(\frac{F_c}{k_1} + \frac{F_c}{k_2}\right)$$

skąd:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

$$k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

Jeśli sprężyny połączymy równolegle (rys. 23.3), a odważnik zawiesimy w takim miejscu bardzo lekkiego sztywnego pręta, by był on poziomy, to sprężyny będą rozciągane siłami o różnych wartościach F_1 i F_2, a ich wydłużenia x będą jednakowe.



Rys. 23.3

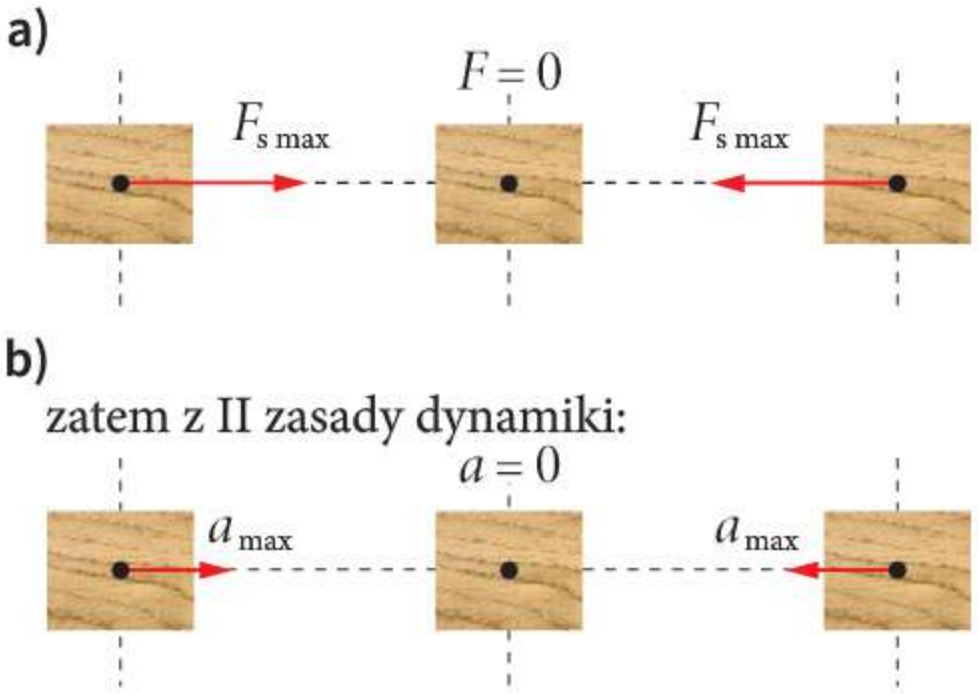
$$F_1 = k_1 x \qquad F_2 = k_2 x$$

Jeśli podobnie jak poprzednio dwie sprężyny zastąpimy jedną, to znowu możemy zapytać, jaki współczynnik sprężystości k ma ta sprężyna, jeśli pod działaniem siły o wartości F_c wydłuża się także o x. Wówczas:

$$F_1 + F_2 = F_c = kx \qquad \text{skąd} \qquad k_1 x + k_2 x = kx \qquad \text{więc} \qquad k = k_1 + k_2$$

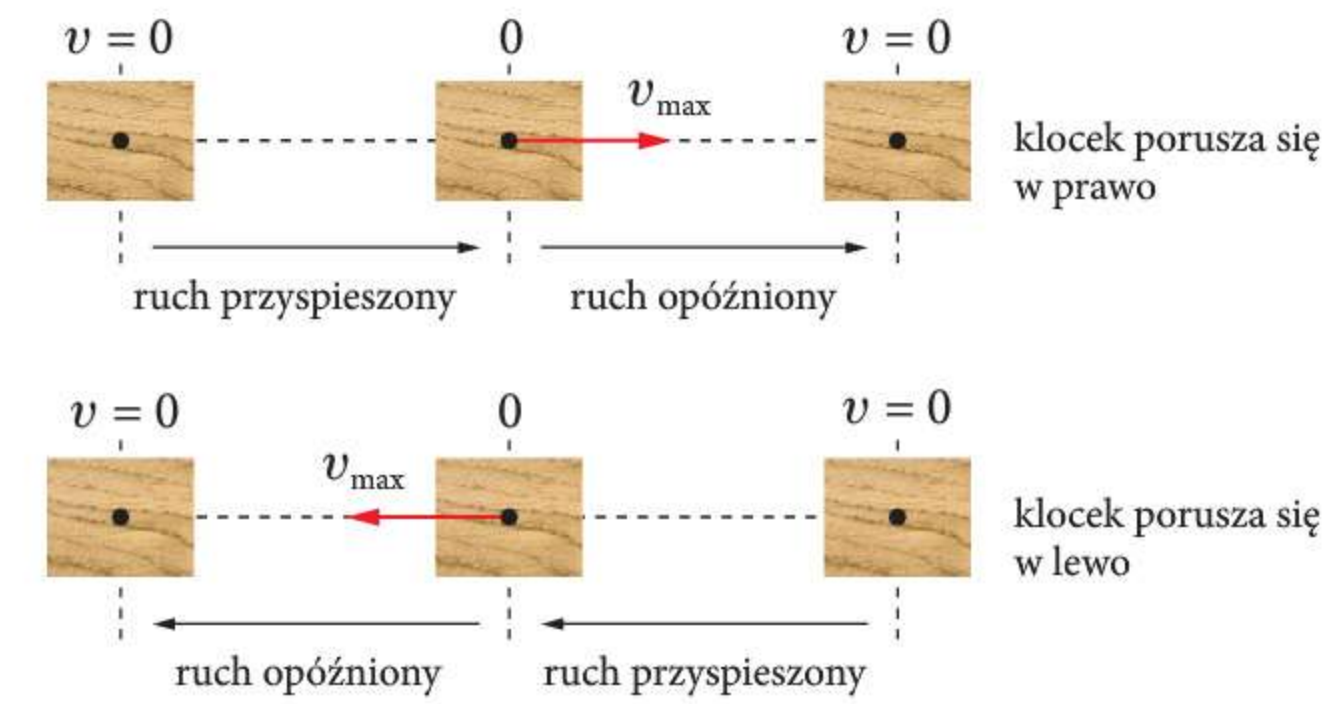
Skoro wartość siły sprężystości rośnie wraz ze wzrostem wychylenia, to podobnie musi rosnąć siła zewnętrzna powodująca wychylenie klocka z położenia równowagi. Gdy puścimy klocek, siła zewnętrzna przestaje działać i dalszy ruch odbywa się tylko pod wpływem siły sprężystości $\vec{F}_s$ (gdy opory są pomijalnie małe). W takim przypadku jest to siła wypadkowa, ponieważ pozostałe siły (ciężar klocka i siła sprężystości podłoża)

równoważą się wzajemnie (rys. 23.4a). Skoro wraz z wychyleniem ulega zmianie wartość siły $\vec{F}_s$, to zgodnie z drugą zasadą dynamiki zmienia się także wartość przyspieszenia (rys. 23.4b).



Rys. 23.4 Zmiany wartości siły i przyspieszenia w ruchu harmonicznym

Ruch klocka jest więc **niejednostajnie zmienny** (rys. 23.5).

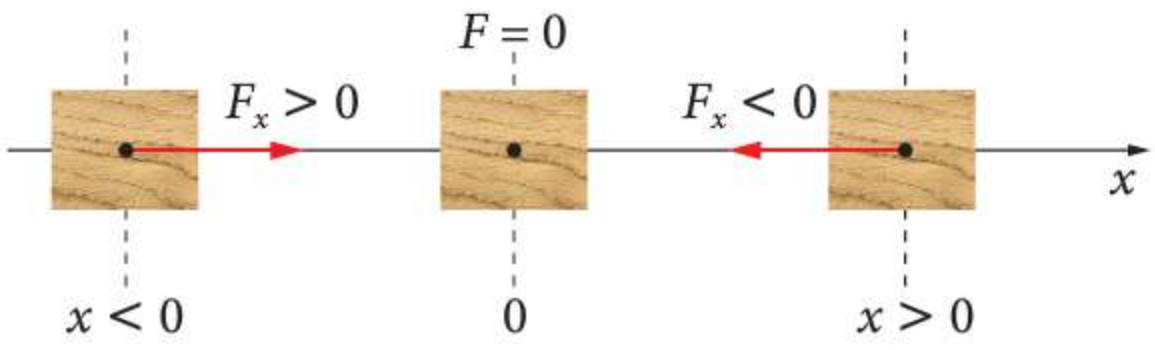


Rys. 23.5 Zmiany szybkości ciała w ruchu harmonicznym

Jeśli przyjmiemy punkt zerowy osi x w położeniu równowagi klocka (rys. 23.6), to współrzędną siły wypadkowej (siły sprężystości pochodzącej od sprężyny i wprost proporcjonalnej do jej wydłużenia x) możemy zapisać następująco:

$$F_x = -kx \tag{23.1}$$

gdzie $k > 0$ jest stałym współczynnikiem proporcjonalności charakteryzującym sprężynę.



Rys. 23.6 Zmiany x-owej współrzędnej siły działającej na ciało drgające

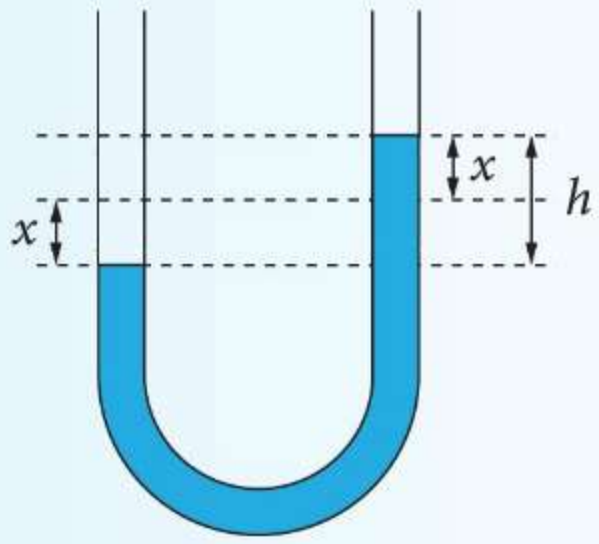
Dla dodatnich wartości x współrzędna siły jest ujemna (siła jest zwrócona przeciwnie do zwrotu osi x), a dla ujemnych – dodatnia (siła jest zwrócona zgodnie ze zwrotem osi x).

Zależność (23.1) charakteryzuje każdy ruch harmoniczny.

Przykład 23.2

Drgania słupa wody w U-rurce

W jedno z ramion U-rurki wypełnionej wodą mocno dmuchnięto, wskutek czego poziom wody w tym ramieniu się obniżył (rys. 23.7).



Rys. 23.7

Ciśnienie słupa wody o wysokości $h = 2x$ to ciśnienie hydrostatyczne wyrażające się wzorem:

$$p = \rho g h$$

(ρ – gęstość wody).

Korzystamy z definicji ciśnienia:

$$p = \frac{F}{S}$$

i obliczamy wartość siły parcia F, którą słup cieczy o wysokości $h = 2x$ działa na pozostałą ciecz (S jest polem przekroju rurki).

$$F = p \cdot S = \rho g h S = 2\rho g S x$$

Jak widać, wartość siły działającej na ciecz jest wprost proporcjonalna do wychylenia x, więc woda w rurce wykonuje ruch drgający harmoniczny.

Współczynnik proporcjonalności k wynosi:

$$k = 2\rho g S$$

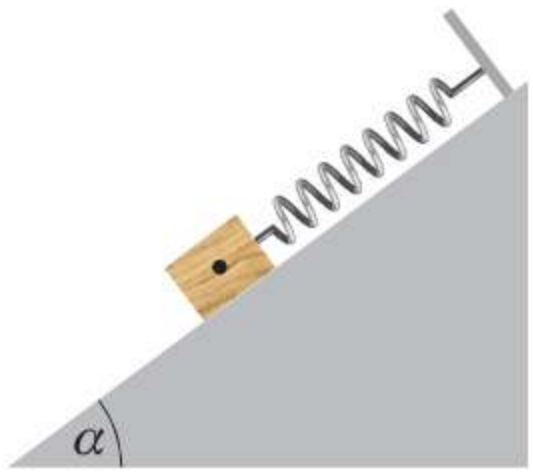
ZADANIA

1. Dysponujemy trzema sprężynami o współczynnikach sprężystości $k_1 = 25\ \mathrm{N/m}$, $k_2 = 100\ \mathrm{N/m}$, $k_3 = 50\ \mathrm{N/m}$.

a) Zaproponuj taki sposób połączenia tych trzech sprężyn, aby współczynnik sprężystości k układu był:
- minimalny,
- maksymalny,
- równy $70\ \mathrm{N/m}$.

b) Ustal, jak połączono sprężyny, jeśli siła o wartości $F_1 = 17{,}5\ \mathrm{N}$ spowodowała wydłużenie układu o $x = 0{,}1\ \mathrm{m}$.

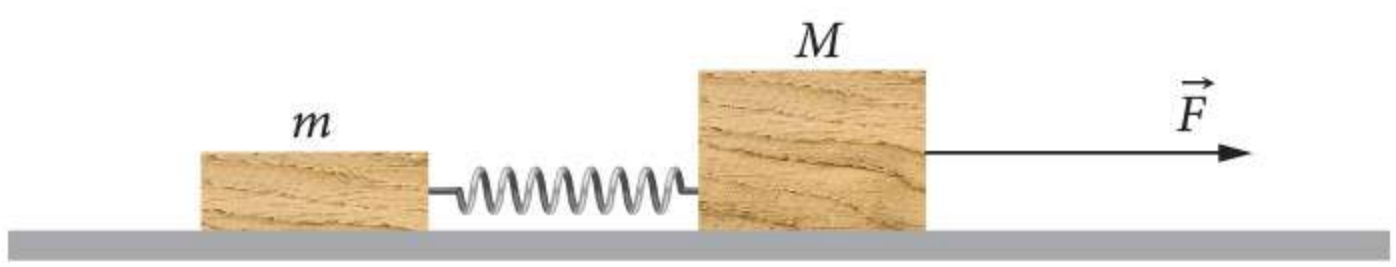
2. Klocek o masie $m = 3{,}5\ \mathrm{kg}$ położony na desce, nachylonej do poziomu pod kątem $\alpha = 37^\circ$, zsunął się z niej ruchem przyspieszonym. Następnie do klocka przymocowano koniec sprężyny o współczynniku sprężystości $k = 15\ \mathrm{N/m}$, a drugi jej koniec przymocowano do uchwytu na górnym końcu deski (rys. 23.8). Współczynnik tarcia statycznego między klockiem a deską $f = 0{,}6$.



Rys. 23.8

a) Oblicz wydłużenie sprężyny.
b) Wyjaśnij, w jakim celu na początku sprawdzono, że przy kącie nachylenia $\alpha = 37^\circ$ klocek zsuwa się z deski.

3. Układ dwóch klocków o masach $M = 1\ \mathrm{kg}$ i $m = 0{,}5\ \mathrm{kg}$ połączonych sprężyną o współczynniku sprężystości $k = 50\ \mathrm{N/m}$ ciągniemy siłą o wartości $F = 6\ \mathrm{N}$ (rys. 23.9). Współczynnik tarcia klocków o podłoże $f = 0{,}1$.



Rys. 23.9

Oblicz:
a) wartość przyspieszenia układu,
b) wydłużenie sprężyny.

4. Dwie równie pochyłe stykają się dolnymi końcami. Na jednej z nich umieszczono stalową kuleczkę. Czy ruch wykonywany przez puszczoną swobodnie kuleczkę jest ruchem harmonicznym?
Uzasadnij odpowiedź.



24. Matematyczny opis ruchu harmonicznego

- Wykorzystanie modelu do matematycznego opisu ruchu drgającego harmonicznego
- Współrzędne położenia, prędkości i przyspieszenia
- Okres drgań w ruchu harmonicznym
- Badanie zależności okresu drgań ciężarka od jego masy i od współczynnika sprężystości sprężyny

Przypomnij sobie wielkości fizyczne służące do opisu ruchu po okręgu oraz funkcje trygonometryczne (możesz skorzystać z *Niezbędnika matematycznego*).

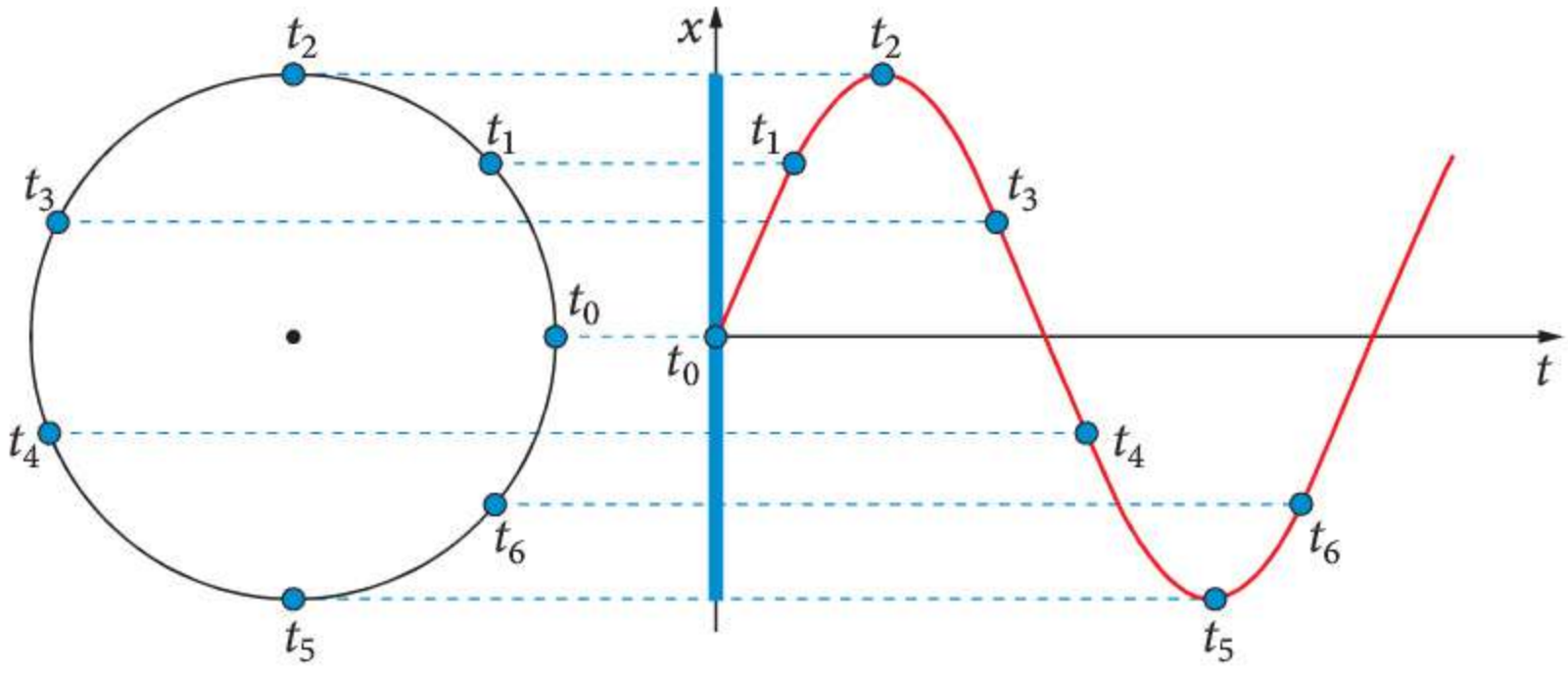
Zanim przystąpimy do matematycznego opisu ruchu harmonicznego, dokonamy następującej obserwacji.

W dowolnym miejscu na oponie rowerowej nawijamy kilka warstw grubego sznurka, tak by powstało wyraźne zgrubienie. W zaciemnionym pokoju ustawiamy koło pionowo w płaszczyźnie prostopadłej do ściany, oświetlamy je i obracając pedałem, wprawiamy w ruch. Na ścianie obserwujemy cień zgrubienia, czyli rzut „punktu" poruszającego się po okręgu.



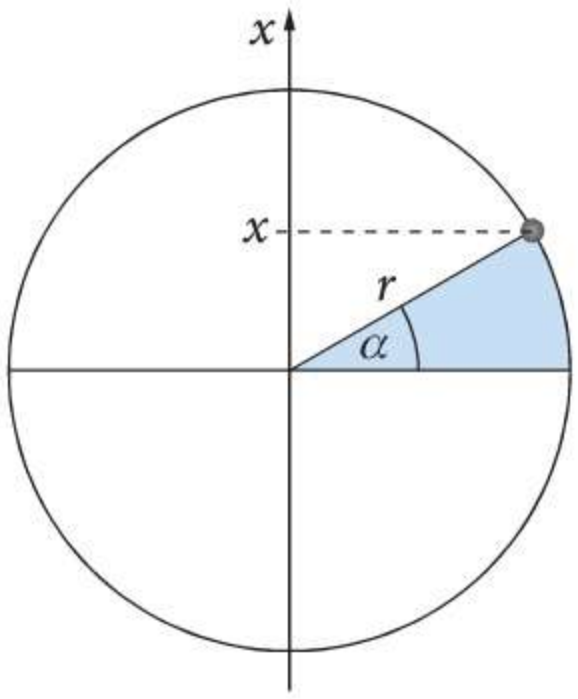
Rys. 24.1 Model do obserwacji ruchu harmonicznego

Zależność położenia zgrubienia na oponie, a więc także jego cienia na ścianie, od czasu przedstawia poniższy wykres (rys. 24.2).



Rys. 24.2 Wykres zależności położenia cienia od czasu

Odcinek, po którym porusza się cień zgrubienia (które jest w naszym modelu ciałem w ruchu po okręgu), leży na płaszczyźnie ściany, na osi x.
Wykażemy, że ruch rzutu na oś x punktu materialnego poruszającego się ze stałą szybkością po okręgu jest ruchem harmonicznym.



Rys. 24.3 Ilustracja wyprowadzenia zależności $x(t)$

Współrzędną rzutu punktu na oś x możemy wyrazić przez promień okręgu r i kąt α, jaki ten promień tworzy z poziomą średnicą okręgu (rys. 24.3).

$$x = r \sin \alpha$$

W ruchu po okręgu z prędkością o stałej wartości:

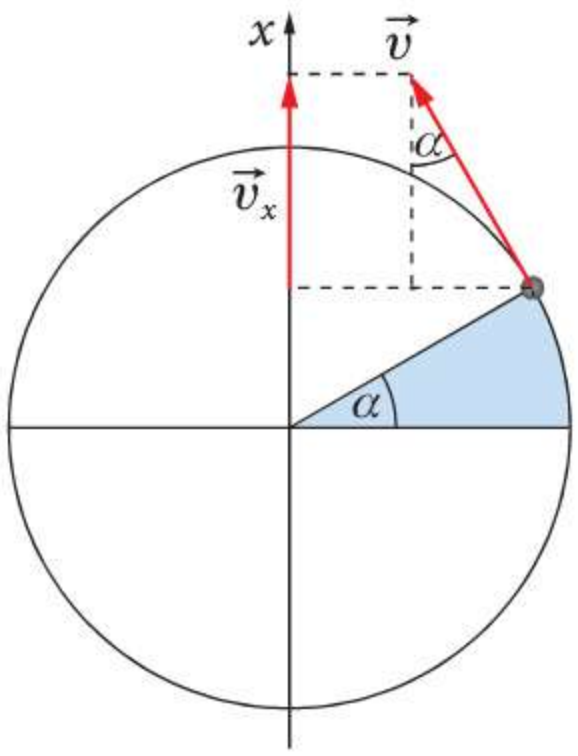
$$\omega = \frac{\alpha}{t}$$

więc:

$$\alpha = \omega t$$

a zatem:

$$x = r \sin \omega t \qquad (24.1)$$



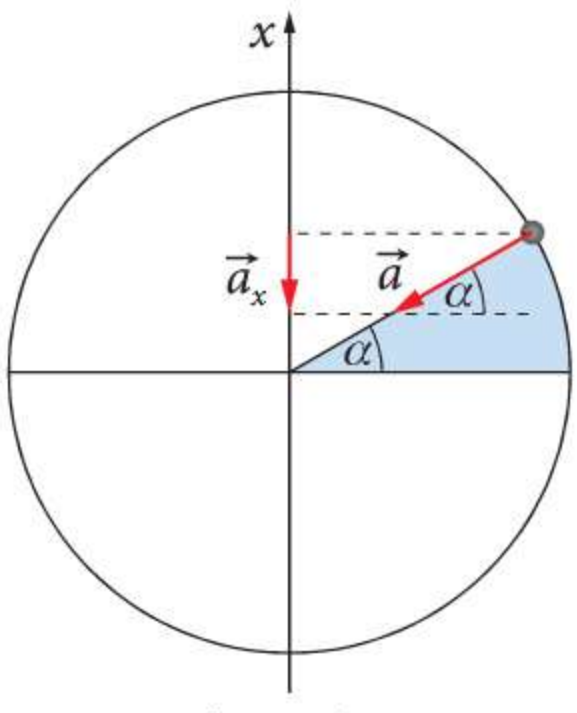
Rys. 24.4 Ilustracja wyprowadzenia zależności $v_x(t)$

Prędkość punktu poruszającego się po okręgu ma składową $\vec{v}_x$ i współrzędną v_x (rys. 24.4); $\vec{v}_x$ jest także prędkością rzutu punktu.

$$v_x = v \cos \alpha$$

Możemy skorzystać ze związku między v i ω ($v = \omega r$) i napisać:

$$v_x = \omega r \cos \omega t \qquad (24.2)$$



Rys. 24.5 Ilustracja wyprowadzenia zależności $a_x(t)$

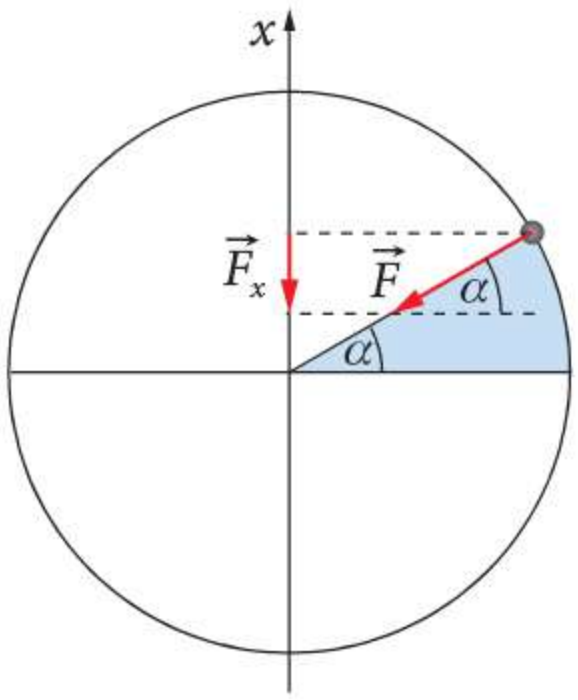
Ze zmianą kierunku prędkości w ruchu po okręgu wiąże się występowanie w tym ruchu przyspieszenia dośrodkowego o wartości $a = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$ i współrzędnej a_x wzdłuż osi x (rys. 24.5):

$$a_x = -a \sin \alpha$$

$$a_x = -\omega^2 r \sin \omega t \qquad (24.3)$$

Zauważ, że w powyższym wyrażeniu jest zawarta współrzędna x położenia punktu (24.1), więc:

$$a_x = -\omega^2 x \qquad (24.4)$$



Rys. 24.6 Ilustracja wyprowadzenia zależności $F_x(t)$

Warunkiem ruchu jednostajnego po okręgu jest działanie na ciało wypadkowej siły zwróconej do środka okręgu – siły dośrodkowej o wartości $F = \frac{mv^2}{r}$.
Jej współrzędna F_x wzdłuż osi x (rys. 24.6) wynosi:

$$F_x = -ma\sin\alpha$$

$$F_x = -m\omega^2 r\sin\omega t \qquad (24.5)$$

gdzie m jest masą ciała poruszającego się po okręgu.
Ponieważ $x = r\sin\omega t$, więc:

$$F_x = -m\omega^2 x$$

Punkt o masie m poruszał się po okręgu ze stałą szybkością kątową, zatem iloczyn $m\omega^2$ jest stałym współczynnikiem proporcjonalności między współrzędną siły i współrzędną położenia, czyli:

$$F_x \sim x$$

Po uwzględnieniu, że $m\omega^2 = k$, otrzymamy:

$$F_x = -kx$$

co oznacza, że **ruch rzutu punktu poruszającego się po okręgu ze stałą szybkością jest ruchem harmonicznym o amplitudzie A równej promieniowi r okręgu.**

Podczas rozważania problemów związanych z ruchem harmonicznym i korzystania z wyprowadzonych wzorów należy zwracać uwagę na położenie ciała w chwili rozpoczęcia pomiaru czasu.
Jeśli w chwili $t = 0$ wychylenie $x = 0$, czyli ciało mijało położenie równowagi, to korzystamy ze wzorów:

$$\begin{aligned} x &= A\sin\omega t \\ v_x &= \omega A\cos\omega t \\ a_x &= -\omega^2 A\sin\omega t \\ F_x &= -m\omega^2 A\sin\omega t \end{aligned} \qquad (24.6)$$

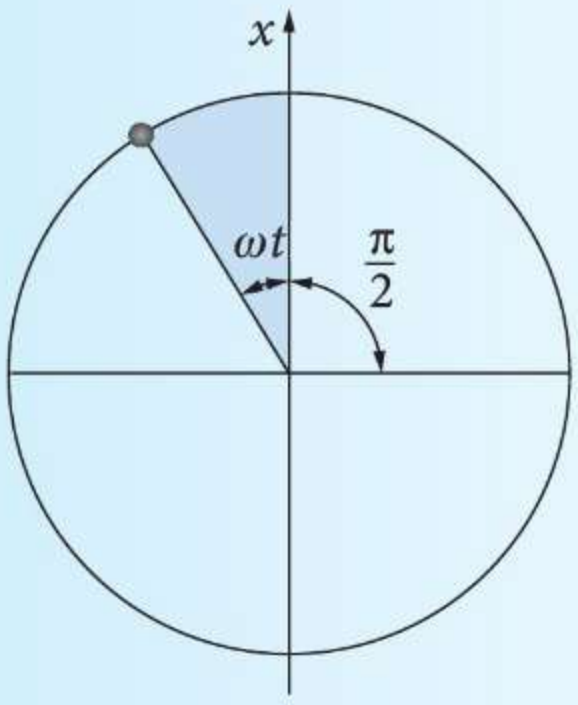
Kąt $\alpha = \omega t$, którego funkcje sinus i cosinus występują w powyższych wzorach, nazywamy **fazą drgań**.

Nie zawsze mierzenie czasu rozpoczynamy w chwili, gdy drgające ciało przechodzi przez położenie równowagi. Inne przypadki, np. gdy mierzenie czasu rozpoczynamy w chwili, kiedy ciało jest maksymalnie wychylone, lub wychylenie jest dowolne, opisano w kolejnych przykładach.

Przykład 24.1

Opis ruchu ciała, które ruch drgający rozpoczyna z położenia $x = A$

Jeśli w chwili $t = 0$ ciało było maksymalnie wychylone z położenia równowagi, czyli $x = A$ (rys. 24.7), to korzystamy ze wzorów:

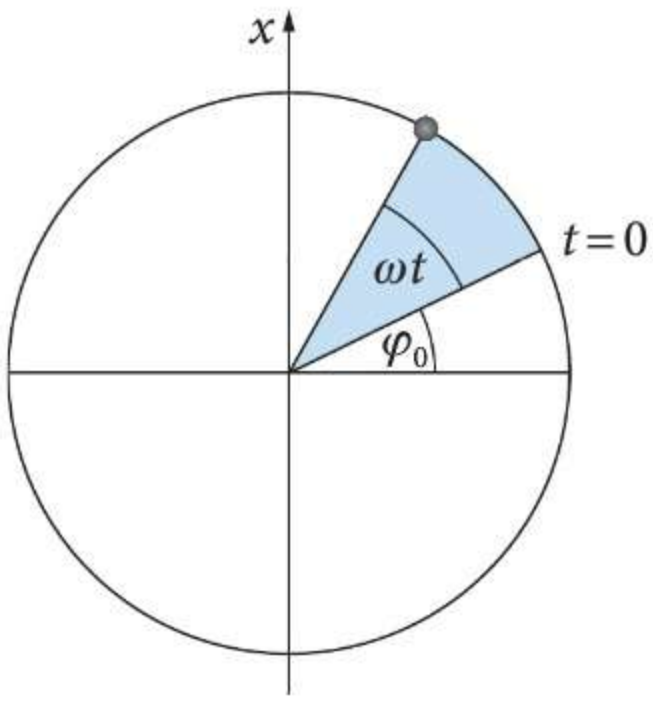


$$x = A\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = A\cos\omega t$$
$$v_x = \omega A\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -\omega A\sin\omega t \qquad (24.7)$$
$$a_x = -\omega^2 A\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -\omega^2 A\cos\omega t$$
$$F_x = -m\omega^2 A\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -m\omega^2 A\cos\omega t$$

Rys. 24.7

Jak widać, wzory (24.7) możemy zapisać za pomocą takich samych funkcji jak (24.6), jeśli powiększymy fazę o $\frac{\pi}{2}$.

Jeśli w ruchu harmonicznym (np. w ruchu wzdłuż osi x) rozpoczęto mierzenie czasu w chwili, w której ciało miało wychylenie $0 < |x| < A$, do iloczynu ωt musimy dodać odpowiedni kąt φ_0, zwany **fazą początkową** (rys. 24.8).



Wówczas w chwili t faza drgań jest równa $\omega t + \varphi_0$, a położenie:

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0)$$

Rys. 24.8 Faza początkowa φ_0 w ruchu harmonicznym

Przykład 24.2

Obliczanie początkowego wychylenia dla początkowej fazy różnej od zera

Obliczymy wychylenie ciała w chwili $t_0 = 0$, jeśli początkowa faza ruchu $\varphi_0 \neq 0$, np. $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$.

$$x = A\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$$

W chwili początkowej $t = 0$ wychylenie $x = A\sin\frac{\pi}{6} = \frac{A}{2}$.

W chwili rozpoczęcia mierzenia czasu rozważane ciało było wychylone z położenia równowagi o połowę amplitudy (zgodnie ze zwrotem osi x).

Przykład 24.3

Obliczanie czasu t, po upływie którego ciało ma dane wychylenie

W chwili $t = 0$ ciało wykonujące drgania o okresie T było maksymalnie wychylone z położenia równowagi ($x = A$). Po jakim najkrótszym czasie jego wychylenie będzie dwukrotnie mniejsze?

Położenie ciała opisujemy w tym przypadku za pomocą wzoru:

$$x = A\cos\omega t$$

Mamy obliczyć czas, po którym $x = \frac{A}{2}$.

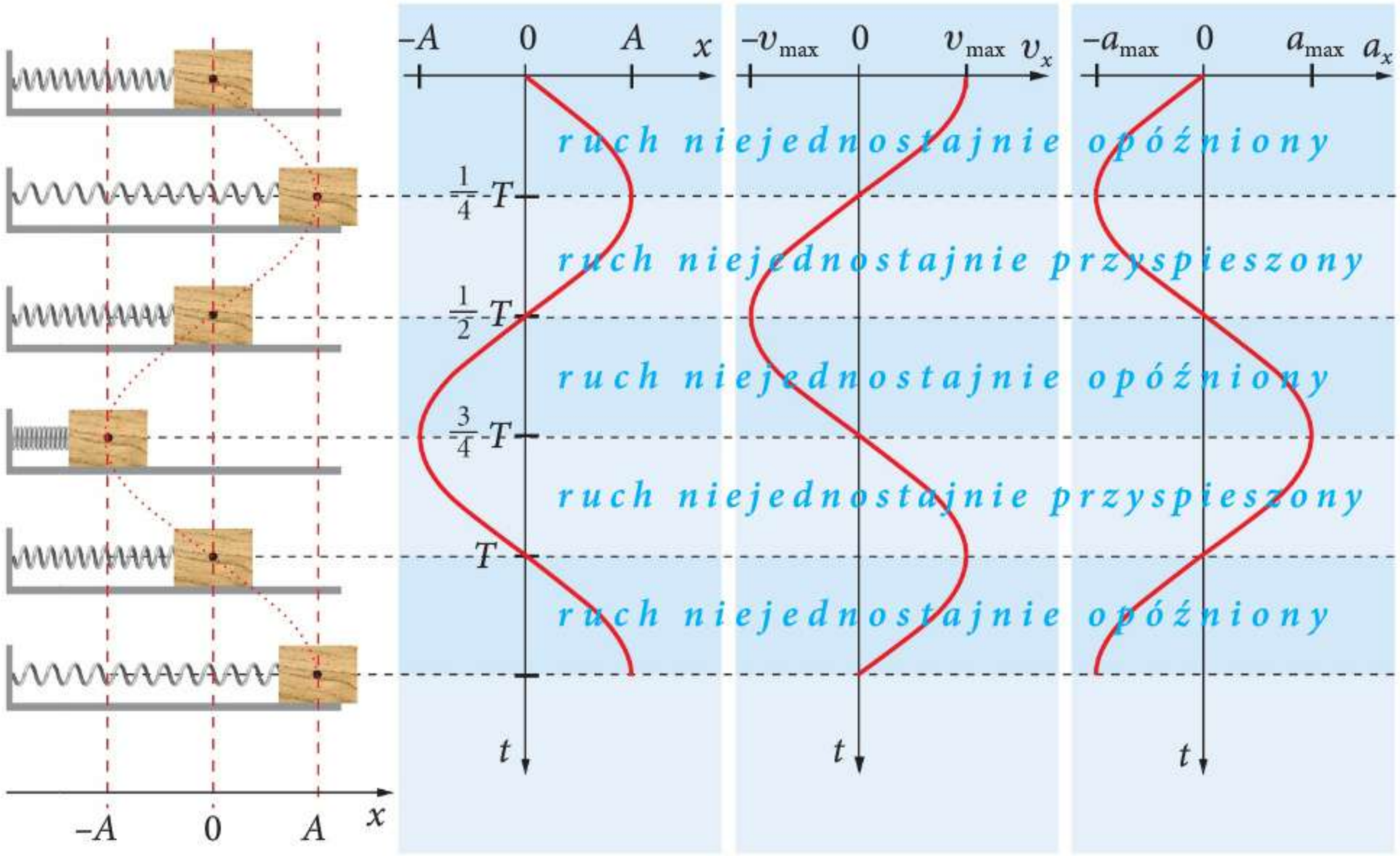
$$\frac{A}{2} = A\cos\frac{2\pi}{T}t \qquad \frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{T}t$$

Ponieważ $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, otrzymujemy:

$$\cos\frac{\pi}{3} = \cos\frac{2\pi}{T}t \qquad \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{T}t$$

$$t = \frac{T}{6}$$

Na rysunku 24.9 przedstawiono wykresy zależności od czasu wielkości opisujących ruch harmoniczny. Zakładamy, że ruch odbywa się wzdłuż osi x i faza początkowa jest równa zeru.



Rys. 24.9 Wykresy zależności: $x(t)$, $v_x(t)$ i $a_x(t)$ dla ruchu harmonicznego

Podczas analizy tych wykresów warto zwrócić uwagę na wychylenie i przyspieszenie w drugiej i trzeciej ćwiartce okresu. W drugiej – ciało wraca do położenia równowagi ruchem przyspieszonym, a współrzędna przyspieszenia jest w tym czasie ujemna

($a_x < 0$). W trzeciej ćwiartce ciało oddala się od położenia równowagi ruchem opóźnionym, a współrzędna przyspieszenia jest dodatnia ($a_x > 0$). Podkreślamy tu jeszcze raz fakt, na który zwracaliśmy już uwagę w podręczniku do klasy pierwszej: **błędne** jest stwierdzenie, że w każdym ruchu przyspieszonym „przyspieszenie" jest dodatnie, a w ruchu opóźnionym – ujemne.

Okres drgań w ruchu harmonicznym

Zgodnie z drugą zasadą dynamiki $F_x = ma_x$. Ponieważ równocześnie $F_x = -kx$, więc:

$$ma_x = -kx$$

skąd:

$$a_x = -\frac{k}{m}x \tag{24.8}$$

Po uwzględnieniu (24.4), zgodnie z którym $a_x = -\omega^2 x$, otrzymujemy:

$$-\omega^2 x = -\frac{k}{m}x$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{24.9}$$

Zauważ, że omawiany ruch odbywa się po linii prostej, więc wielkości opisujące ruch po okręgu, z których korzystaliśmy podczas matematycznego opisu ruchu ciała drgającego ruchem harmonicznym, czyli **oscylatora harmonicznego**, mają w tym ruchu inny sens fizyczny.

Promień okręgu to amplituda drgań w ruchu harmonicznym. Wielkość oznaczaną literą ω, będącą w ruchu po okręgu szybkością kątową, w ruchu harmonicznym nazywamy **częstością kołową**. Jest ona związana z masą ciała i właściwościami drgającego ciała, charakteryzowanymi przez współczynnik k. Natomiast okres T i częstotliwość ν opisujące ruch po okręgu są równe okresowi i częstotliwości drgań w ruchu harmonicznym.

Z powyższego związku (24.9) możemy wyprowadzić wzór na okres drgań oscylatora harmonicznego:

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

skąd:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{24.10}$$

Aby wyznaczyć okres drgań odważnika o masie m, zawieszonego na lekkiej sprężynie, można zmierzyć wydłużenie tej sprężyny po zawieszeniu na niej odważnika i skorzystać ze wzoru $F = k|x|$.

Przykład 24.4

Jak okres drgań ciężarka wiszącego na sprężynie zależy od jego masy?

Na rysunku 24.9 przeanalizowano ruch po bardzo śliskiej powierzchni klocka zaczepionego na końcu poziomo ułożonej sprężyny, przymocowanej drugim końcem do uchwytu. Klocek porusza się ruchem harmonicznym o okresie T:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

gdzie k jest współczynnikiem sprężystości sprężyny.

Ciężarek o masie m, zawieszony na sprężynie o współczynniku sprężystości k, też porusza się ruchem harmonicznym o okresie T, wyrażonym powyższym wzorem. (*Wskazówka*: Wykaż, że na ciężarek działa siła wypadkowa o wartości $F = k|x|$, zwrócona przeciwnie do wychylenia). Po podniesieniu do kwadratu obu stron wzoru wyrażającego okres otrzymamy:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k}m = am = b\frac{1}{k}$$

gdzie: $a = \frac{4\pi^2}{k}$, $b = 4\pi^2 m$.

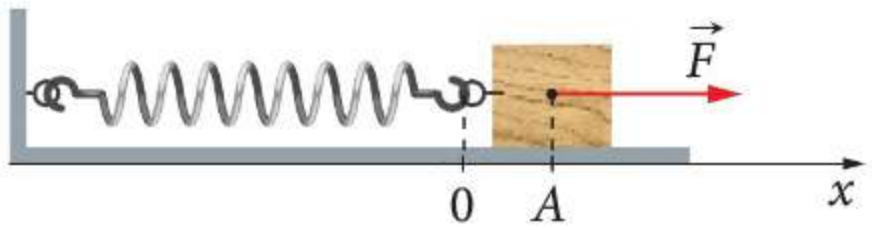
Wobec tego kwadrat okresu drgań w ruchu harmonicznym jest dla stałego k wprost proporcjonalny do masy ciężarka m, a dla ciężarka o stałej masie – odwrotnie proporcjonalny do k.

Aby sprawdzić te zależności, wykonamy doświadczenie 4 opisane na s. 336.

ZADANIA

1. Ciało, które w chwili początkowej ($t_0 = 0$) znajdowało się w położeniu równowagi, wykonuje drgania harmoniczne o okresie $T = 1{,}6\ \mathrm{s}$ i amplitudzie $A = 0{,}2\ \mathrm{m}$. Oblicz współrzędne: wychylenia tego ciała, jego prędkości i przyspieszenia w chwili $t = 2\ \mathrm{s}$.

2. Klocek o masie $m = 1\ \mathrm{kg}$ połączony ze sprężyną wychylono z położenia równowagi o $A = 10\ \mathrm{cm}$ i przytrzymano siłą $\vec{F}$ o wartości $10\ \mathrm{N}$ (rys. 24.10).



Rys. 24.10

Tarcie klocka o podłoże jest pomijalnie małe, więc po usunięciu siły $\vec{F}$ klocek drga ruchem harmonicznym.

a) Oblicz okres drgań klocka.

b) Napisz równanie wychylenia klocka.

3. Drgania harmoniczne opisuje równanie:

$$x(t) = 0{,}1\ \mathrm{m} \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{t}{1\ \mathrm{s}}\right)$$

a) Odczytaj z równania amplitudę drgań.

b) Oblicz okres i częstotliwość drgań.

c) Oblicz wartość maksymalnej prędkości, wartość maksymalnego przyspieszenia i wartość prędkości średniej na drodze od maksymalnego wychylenia z jednej strony położenia równowagi do maksymalnego wychylenia z drugiej.

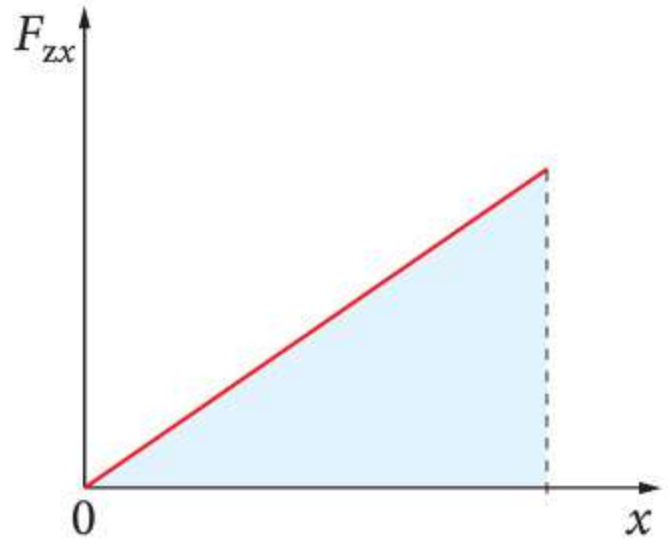


25. Energia w ruchu harmonicznym

- Energia potencjalna sprężystości
- Całkowita energia mechaniczna w ruchu harmonicznym
- Zasada zachowania energii mechanicznej
- Wykresy $E_p(t)$, $E_k(t)$, $E_c(t)$, $E_p(x)$, $E_k(x)$

Przypomnij sobie definicje energii potencjalnej i kinetycznej oraz zasadę zachowania energii mechanicznej.

Wychylenie ciała z położenia równowagi $x = 0$ wymaga wykonania pracy przez siłę zewnętrzną. Jeśli siła zewnętrzna $\vec{F}_z$ w każdym punkcie będzie równoważyć siłę sprężystości $\vec{F}_s$ ($\vec{F}_z = -\vec{F}_s$), to wykona pracę związaną wyłącznie ze zmianą położenia. Praca ta jest równa przyrostowi energii potencjalnej sprężystości. Obliczamy ją jako pole powierzchni pod wykresem zależności współrzędnej siły zewnętrznej F_{zx} od położenia x (rys. 25.1).



Rys. 25.1 Ilustracja wyprowadzenia wzoru na energię potencjalną sprężystości

$$\vec{F}_z = -\vec{F}_s$$

$$F_{zx} = kx$$

$$\Delta E_p = W_z = \frac{1}{2} F_{zx} \cdot x = \frac{1}{2} kx^2$$

Jeśli przyjmiemy, że w położeniu równowagi energia potencjalna sprężystości jest równa zeru, to ciało wychylone o x od tego położenia ma **energię potencjalną** równą:

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2$$

Obliczymy teraz całkowitą energię ciała w ruchu harmonicznym, tj. sumę jego energii kinetycznej i potencjalnej sprężystości w dowolnym położeniu.

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(mA^2\omega^2\cos^2\omega t + kA^2\sin^2\omega t)$$

Wiemy jednak, że $k = m\omega^2$, więc:

$$E_c = \frac{1}{2}kA^2(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t)$$

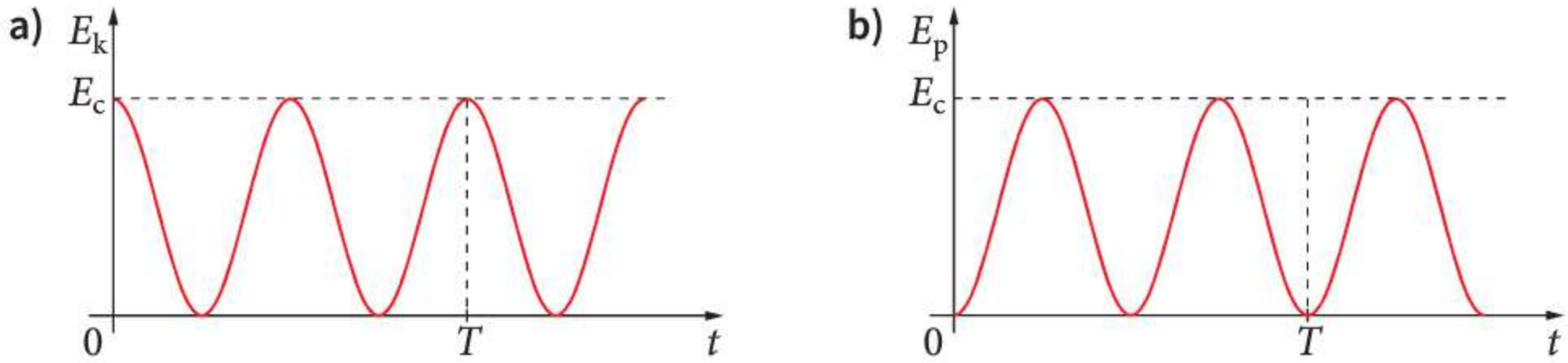
Wyrażenie w nawiasie to jedynka trygonometryczna, zatem:

Całkowita energia ciała w ruchu harmonicznym jest niezależna od czasu, czyli pozostaje stała podczas ruchu.

$$E_c = \frac{1}{2}kA^2 = \text{const}$$

To stwierdzenie stanowi **zasadę zachowania energii mechanicznej** w ruchu drgającym harmonicznym. Energia całkowita to jednocześnie największa energia potencjalna (co jest oczywiste, bo w położeniu maksymalnego wychylenia $E_k = 0$) i największa energia kinetyczna (bo w położeniu równowagi $E_p = 0$).

Zależności energii kinetycznej i potencjalnej sprężystości od czasu przedstawiono na rysunku 25.2 dla przypadku, w którym w chwili $t = 0$ wychylenie $x = 0$.

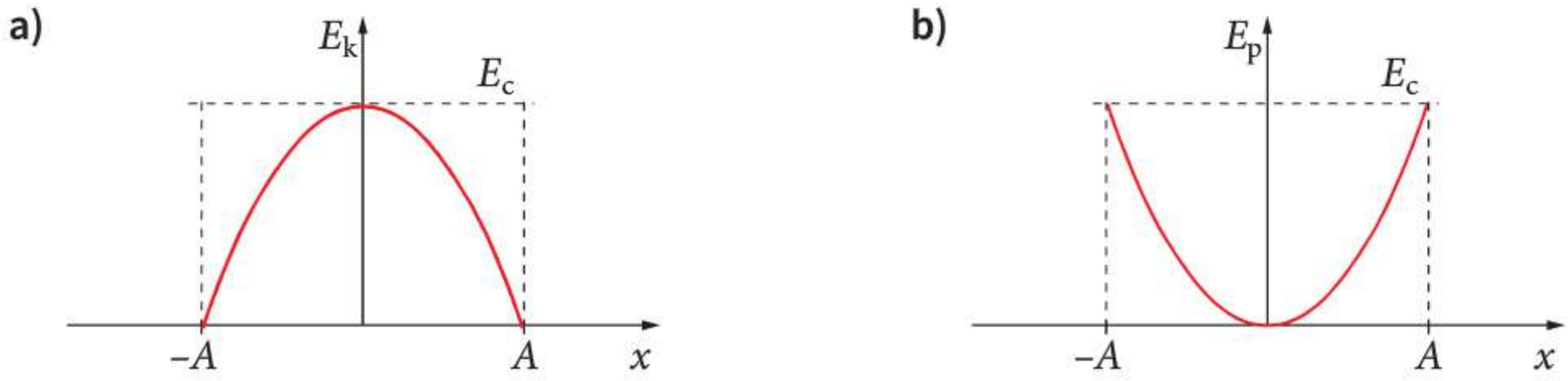


Rys. 25.2 Wykresy zależności: energii kinetycznej (a) i energii potencjalnej sprężystości (b) od czasu

Skorzystamy z zasady zachowania energii mechanicznej i wyrazimy energię kinetyczną ciała jako funkcję wychylenia x z położenia równowagi.

$$E_k = \frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

Zależność obu rodzajów energii od wychylenia przedstawiono na rysunku 25.3.

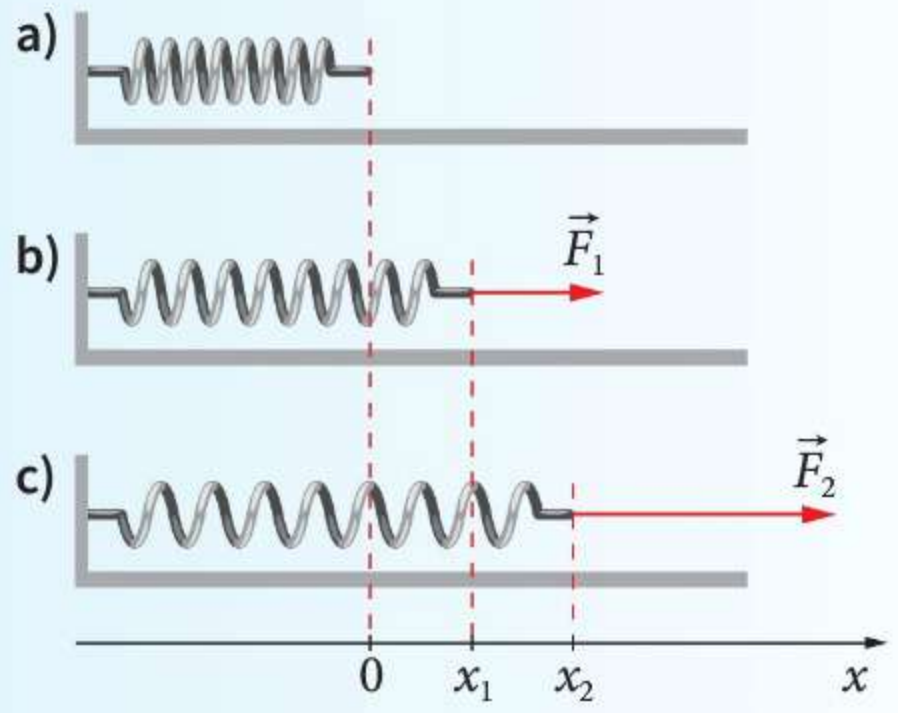


Rys. 25.3 Wykresy zależności: energii kinetycznej (a) i energii potencjalnej sprężystości (b) od wychylenia

Przykład 25.1

Praca wykonana podczas rozciągania sprężyny

Nierozciągniętą sprężynę (rys. 25.4a) o współczynniku sprężystości $k = 100\,\mathrm{N/m}$ wydłużono o $1\ \mathrm{cm}$ (rys. 25.4b).



Rys. 25.4

Dzięki wykonanej pracy W_1 sprężyna uzyskała energię potencjalną E_{p1}. Praca W_1 wykonana podczas rozciągania sprężyny była równa przyrostowi energii potencjalnej ΔE_{p1}.

$$W_1 = \Delta E_{\mathrm{p1}} = E_{\mathrm{p1}} - 0 = \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 100\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \cdot (10^{-2}\ \mathrm{m})^2 = \frac{1}{2} \cdot 10^{-2}\ \mathrm{J}$$

Następnie sprężynę wydłużono o kolejny $1\ \mathrm{cm}$ (rys. 25.4c).

Obliczymy wykonaną przy tym pracę W_2 jako różnicę energii potencjalnej E_{p2} (energii sprężyny wydłużonej o $2\ \mathrm{cm}$) i E_{p1} (energii sprężyny wydłużonej o $1\ \mathrm{cm}$):

$$W_2 = E_{\mathrm{p2}} - E_{\mathrm{p1}} = \frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2) = \frac{1}{2} \cdot 100\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \cdot \left((2 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m})^2 - (1 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m})^2\right) = \frac{3}{2} \cdot 10^{-2}\ \mathrm{J}$$

Zauważ, że $W_2 = 3W_1$.

Wykonaj analogiczne obliczenia dla wydłużeń o kolejne centymetry i zapisz wniosek.

ZADANIA

1. Punkt materialny drga ruchem harmonicznym, w którym $x = 0$ w chwili $t_0 = 0$. Oblicz, w jakiej odległości od położenia równowagi i po upływie jakiego najkrótszego czasu od chwili początkowej energia kinetyczna drgającego punktu materialnego jest równa jego energii potencjalnej sprężystości. Amplituda drgań $A = 10\ \mathrm{cm}$, a ich okres $T = 0{,}16\ \mathrm{s}$.
2. Ciało wykonuje ruch harmoniczny. Znajdź związek między energią kinetyczną i potencjalną sprężystości w chwili, w której wychylenie ciała z położenia równowagi jest równe połowie amplitudy.
3. Wróć do zadania ze s. 154. Sprawdź, że całkowita energia potencjalna (suma energii potencjalnej sprężystości i grawitacyjnej odważnika) w położeniu G jest taka sama jak w położeniu D.

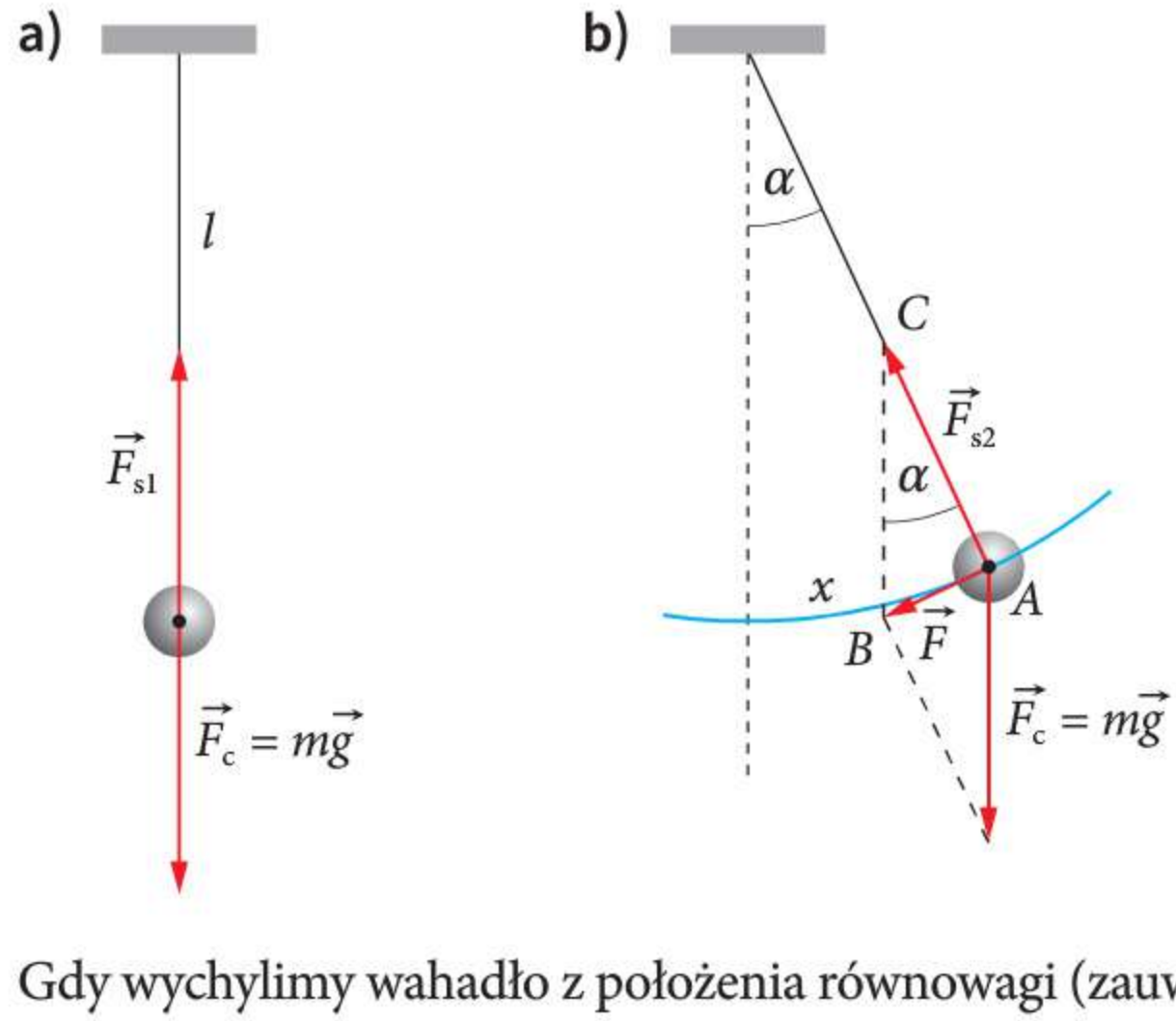


26. Wahadło matematyczne

- Definicja wahadła matematycznego
- Ruch wahadła matematycznego dla małych wychyleń
- Okres drgań wahadła matematycznego
- Izochronizm wahadła

Przypomnij sobie wiadomości o ruchu wahadła.

Wahadłem matematycznym nazywamy ciało o masie m i o niemierzalnie małej objętości (czyli punkt materialny), zawieszone na nieważkiej i nierozciągliwej nici o długości l, umieszczone w jednorodnym polu grawitacyjnym. W praktyce takim wahadłem jest ciało, którego wymiary liniowe są znacznie mniejsze od długości nici (np. mała, ciężka kuleczka zawieszona na jak najmniej rozciągliwej nici).
W położeniu równowagi (rys. 26.1a) ciężar ciała $\vec{F}_c$ jest zrównoważony siłą sprężystości nici $\vec{F}_{s1}$ (reakcji na naciąg).



Rys. 26.1 Siły działające na wahadło matematyczne: w położeniu równowagi (a), wychylone z położenia równowagi (b)

Gdy wychylimy wahadło z położenia równowagi (zauważ, że w tym przypadku wychylenie jest długością łuku!) i puścimy, siły te nie będą się równoważyć. Ich wypadkowa $\vec{F}$ spowoduje ruch w stronę położenia równowagi (rys. 26.1b). Obliczmy wartość siły wypadkowej. Załóżmy, że odchylona nić tworzy z pionem kąt α. Taki sam kąt znajdziemy w trójkącie sił. Kąty ACB i α są równe (kąty o ramionach odpowiednio równoległych), zatem:

$$\frac{F}{mg} = \sin\alpha \quad \Rightarrow \quad F = mg\sin\alpha$$

Jeśli założymy, że kąt α jest kątem małym, to możemy przyjąć, że $\sin\alpha \approx \alpha$ (wyrażonemu w radianach). Wtedy:

$$F = mg\alpha$$

ale $\alpha = \frac{x}{l}$ (miara łukowa kąta), więc:

$$F = mg\frac{x}{l} \qquad \text{lub} \qquad F = \frac{mg}{l}x$$

Obliczyliśmy wartość siły $\vec{F}$ zwróconej w stronę położenia równowagi (w lewo). Współrzędna F_x tej siły jest więc ujemna.

$$F_x = -F = -\frac{mg}{l}x$$

Ułamek $\frac{mg}{l}$ jest stały dla danego wahadła, ponieważ nić jest z założenia nierozciągliwa. Stwierdzamy zatem, że ruch wahadła jest dla małych wychyleń ruchem harmonicznym, przy czym $\frac{mg}{l} = k$.

Korzystamy ze wzoru $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ i otrzymujemy wzór na **okres drgań wahadła matematycznego**:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (26.1)$$

Zależność okresu drgań wahadła od jego długości sprawdzamy w doświadczeniu (patrz doświadczenie 6 na s. 341).

Przykład 26.1

Ruch kulki wahadła a siła dośrodkowa

Zapewne zaniepokoiło cię, że zgodnie z rysunkiem 26.1 rozważamy tylko ruch odbywający się pod działaniem siły $\vec{F}$ stycznej do toru, traktując ją jako siłę wypadkową. A przecież wahadło porusza się po łuku. Do zakrzywienia toru ruchu konieczne jest działanie siły dośrodkowej. Wynika stąd, że siła działająca wzdłuż nici w stronę punktu zawieszenia wahadła ma większą wartość niż składowa ciężaru działająca wzdłuż nici (o wartości $mg\cos\alpha$).

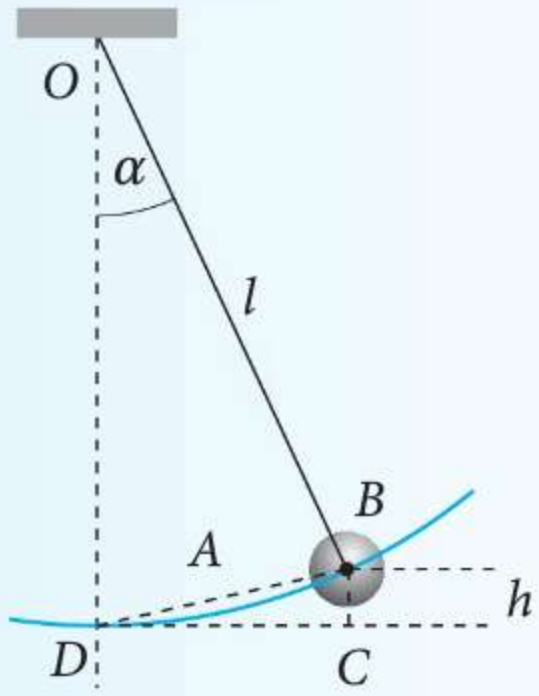
$$F_{s2} > mg\cos\alpha$$

a różnica to wartość siły dośrodkowej $\vec{F}_r$.

$$F_{s2} - mg\cos\alpha = \frac{mv^2}{l} = F_r$$

Zbadajmy, jaka jest wartość tej siły dla bardzo małych kątów α. Przyjmijmy np. $\alpha = 5^\circ$ oraz masę wahadła $m = 0{,}1\ \text{kg}$ i jego długość $l = 1\ \text{m}$.

Przedstawienie takiej sytuacji na rysunku byłoby nieczytelne, dlatego rysunek 26.2 wykonujemy dla większego kąta wychylenia wahadła.



Rys. 26.2

Dla bardzo małych kątów α łuk DB można zastąpić odcinkiem DB. Wówczas trójkąt ODB jest równoramienny ($|OD| = |OB| = l$) i podobny do trójkąta DCB, w którym $|DB| = |DC| = A$ (A to amplituda drgań).

Z trójkątów podobnych:

$$\frac{h}{A} = \frac{A}{l} \qquad h = \frac{A^2}{l}$$

$$\frac{A}{l} = \sin\alpha \qquad A = l\sin\alpha$$

$$h = \frac{l^2\sin^2\alpha}{l} = l\sin^2\alpha$$

Korzystamy z zasady zachowania energii:

$$mgh = \frac{mv^2}{2}$$

$$v^2 = 2gh = 2gl\sin^2\alpha$$

$$F_r = \frac{mv^2}{l} = \frac{2mgl\sin^2\alpha}{l} = 2mg\sin^2\alpha$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymamy:

$$F_r \approx 2 \cdot 0{,}1\,\text{kg} \cdot 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}0076 = 0{,}0152\,\text{N}$$

Wartość siły dośrodkowej w ruchu harmonicznym wahadła jest rzędu 10^{-2} N i stanowi zaledwie 1,5% wartości siły sprężystości. Dlatego została pominięta na rysunku 26.1.

Przy dużych kątach wychylenia wahadło matematyczne nie porusza się ruchem harmonicznym, gdyż $\sin\alpha \approx \alpha$ tylko dla małych kątów.

Ze wzoru 26.1 wynika, że okres drgań wahadła nie zależy od amplitudy. Tę cechę ruchu harmonicznego wahadła nazywamy **izochronizmem**. Można to sprawdzić w prostym doświadczeniu polegającym na zmierzeniu okresu drgań wahadła wychylonego od pionu najpierw np. o 4°, a następnie o 8°.

Za pomocą takiego wahadła możemy także wyznaczyć wartość przyspieszenia ziemskiego w miejscu, w którym się znajdujemy (patrz doświadczenie 5 na s. 340).

WIEDZIEĆ WIĘCEJ

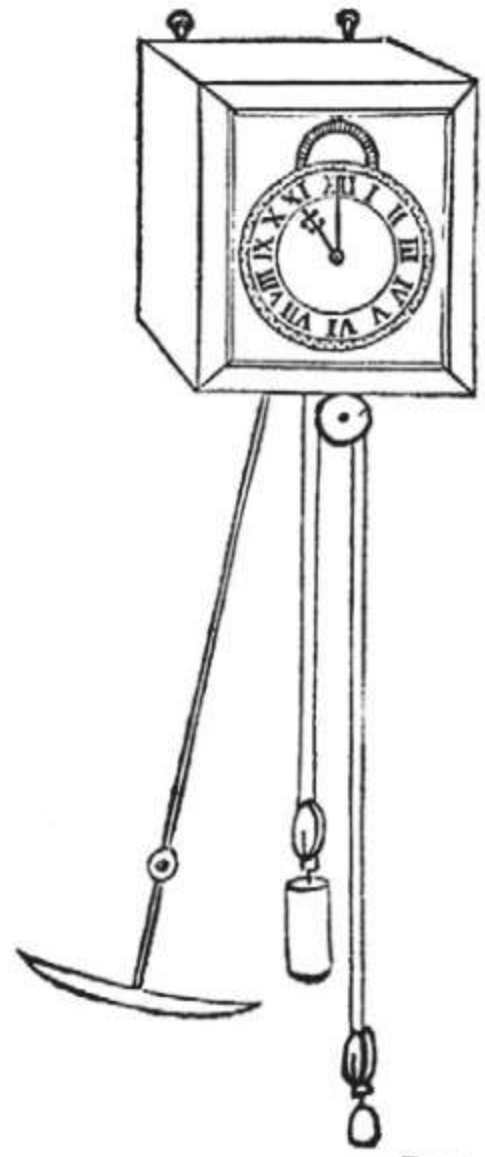
Wahadło Huygensa

Regularność ruchu wahadła została zauważona przez Galileusza jako potencjalnie użyteczna w konstrukcji precyzyjnych zegarów na przełomie XVI i XVII wieku. Pierwszy zegar wahadłowy został jednak skonstruowany w 1656 roku na podstawie projektu Christiaana Huygensa (rys. 26.3 pochodzi z jego dzieła).

Jednym z problemów, z którym musiał się zmierzyć Huygens, była nieduża, acz systematyczna niedokładność wskazań zegara – okres drgań wahadła matematycznego wzrasta wraz ze wzrostem amplitudy zgodnie ze wzorem:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{16}\alpha^2 + \ldots\right)$$

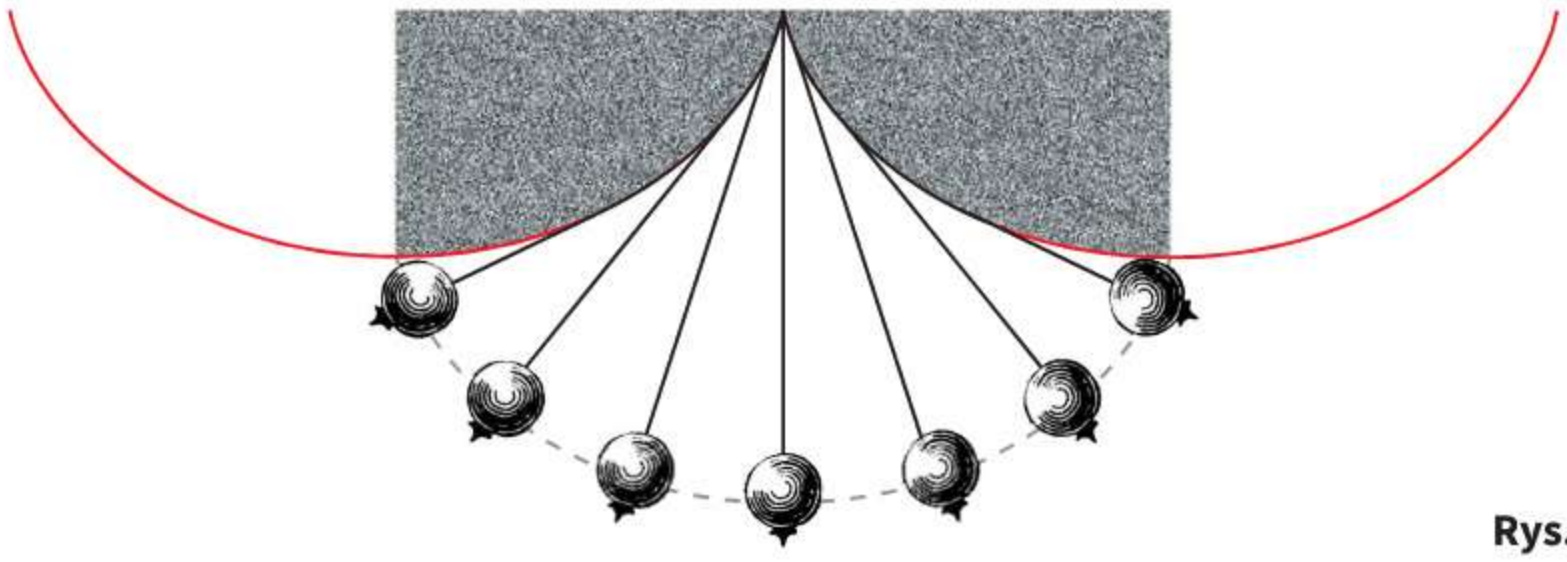
gdzie: l – długość wahadła, g – wartość przyspieszenia ziemskiego, α – kąt maksymalnego odchylenia od pionu (w radianach).



Rys. 26.3

W praktyce taka niedokładność nie przekracza kilku procent, jednak błąd wskazania zegara regulowanego takim wahadłem kumulowałby się i zegar wymagałby ustawiania nawet kilka razy dziennie. Poza tym zegar, który dobrze wskazywał czas na lądzie, stawał się mało dokładny, gdy używano go na statku, a przecież pomiar czasu wykorzystywano w nawigacji.

Pomysł Huygensa był dość prosty – skoro wahadło ma nieco zbyt długi okres, to należy odrobinę je skrócić przy dużych wychyleniach. Można to osiągnąć, gdy koniec wahadła zamocuje się między odpowiednio ukształtowanymi krzywkami. Co to znaczy odpowiednio? Huygens obliczył, że krzywki muszą mieć kształt cykloidy, czyli krzywej zakreślanej przez punkt na toczącym się kole, przy czym dla zachowania izochroniczności wahadła koło to musi mieć średnicę równą połowie długości wahadła (rys. 26.4).



Rys. 26.4

Pierwszy zegar wahadłowy mierzył czas z dokładnością 1 minuty na dobę. Zegary wahadłowe były ulepszane i używane przez niemal 300 lat. Uznawano je za najpewniejsze narzędzie pomiaru czasu. Dopiero w XX wieku w precyzyjnych zegarach wahadło izochroniczne zostało zastąpione elektronicznym oscylatorem kwarcowym.

ZADANIA

1. Odszukaj w internecie *Aplikacje fizyka* Waltera Fendta (www.walter-fendt.de/html5/phpl). Otwórz program *Wahadło*. Przeczytaj instrukcję i uruchom symulację.

a) Sprawdź, jak zmieni się okres drgań, gdy kąt wychylenia wahadła będzie wynosił kolejno: $5°$, $10°$ i $15°$. Odczyty zapisz w zeszycie.

b) Sprawdź, jak zmieni się okres drgań, gdy masa wahadła będzie wynosiła kolejno: $1\ \mathrm{kg}, 2\ \mathrm{kg}, 5\ \mathrm{kg}$. Odczyty zapisz w zeszycie.

c) Odczytaj okres drgań wahadła dla nici o następujących długościach: $l_1 = 1\ \mathrm{m}$, $l_2 = 2\ \mathrm{m}, l_3 = 4\ \mathrm{m}, l_4 = 5\ \mathrm{m}$. Sprawdź, czy spełniona jest zależność $T \sim \sqrt{l}$.

d) Zaobserwuj na rysunku i wykresie zmiany współrzędnych prędkości, przyspieszenia stycznego oraz energii potencjalnej i kinetycznej w ruchu wahadła. Wykaż za pomocą apletu, że całkowita energia wahadła zależy od kąta wychylenia i długości wahadła.

2. Masa Księżyca jest równa $1/81$ masy Ziemi, a promień Księżyca stanowi $0{,}27$ promienia Ziemi. Oblicz długość wahadła matematycznego wykonującego na Księżycu drgania o okresie $T = 2\ \mathrm{s}$. Przyjmij, że $g_{\mathrm{Ziemi}} = 10\ \mathrm{m/s^2}$, a $\pi^2 = 10$.

3. W windzie poruszającej się w dół ruchem jednostajnym znajduje się wahadło wykonujące drgania o okresie T. Jak zmieniłby się okres drgań tego wahadła, gdyby winda poruszała się ruchem:

a) jednostajnie opóźnionym,

b) jednostajnie przyspieszonym?

Uzasadnij odpowiedzi.

4. Niedawno fizyków z całego świata poproszono o wytypowanie 10 najsłynniejszych i najpiękniejszych eksperymentów fizycznych, jakie kiedykolwiek wykonano. Na liście sporządzonej na tej podstawie znalazło się doświadczenie Foucaulta (rys. 26.5), którego autor wykorzystał wahadło do potwierdzenia ruchu obrotowego Ziemi.



Rys. 26.5

Obszerną wiedzę o tym doświadczeniu możesz uzyskać z książki Amira D. Aczela *Wahadło. Léon Foucault i tryumf nauki*, wydanej w 2007 roku przez wydawnictwo Prószyński i S-ka. Możesz także skorzystać z informacji zamieszczonych w internecie, np.:

- www.youtube.com/watch?v=_LtIRwaeV_w
- www.youtube.com/watch?v=xdZynJPUK_I
- www.naukatolubie.pl/wahadla-foucaulta-w-polsce

Wyszukaj możliwie dużo informacji i przygotuj prezentację wyjaśniającą ideę tego doświadczenia. Na liście miast, w których w Polsce jest prezentowane doświadczenie Foucaulta, znajdź położone najbliżej twojego miejsca zamieszkania i wybierz się tam, by obejrzeć doświadczenie.



27. Drgania wymuszone, rezonansowe i tłumione

- Okres i częstotliwość drgań własnych
- Drgania wymuszone
- Demonstracja zjawiska rezonansu mechanicznego
- Cechy drgań tłumionych

Przypomnij sobie różnicę między częstością kołową i częstotliwością.

Dotychczas omawialiśmy jedynie naturalne drgania ciała, tzn. drgania, które pojawiają się wtedy, gdy ciało zostaje (nieznacznie) wychylone z położenia równowagi, a następnie puszczone **swobodnie**. Pokazaliśmy, że częstość kołowa drgań ciała o masie m wyraża się wzorem:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

a częstotliwość:

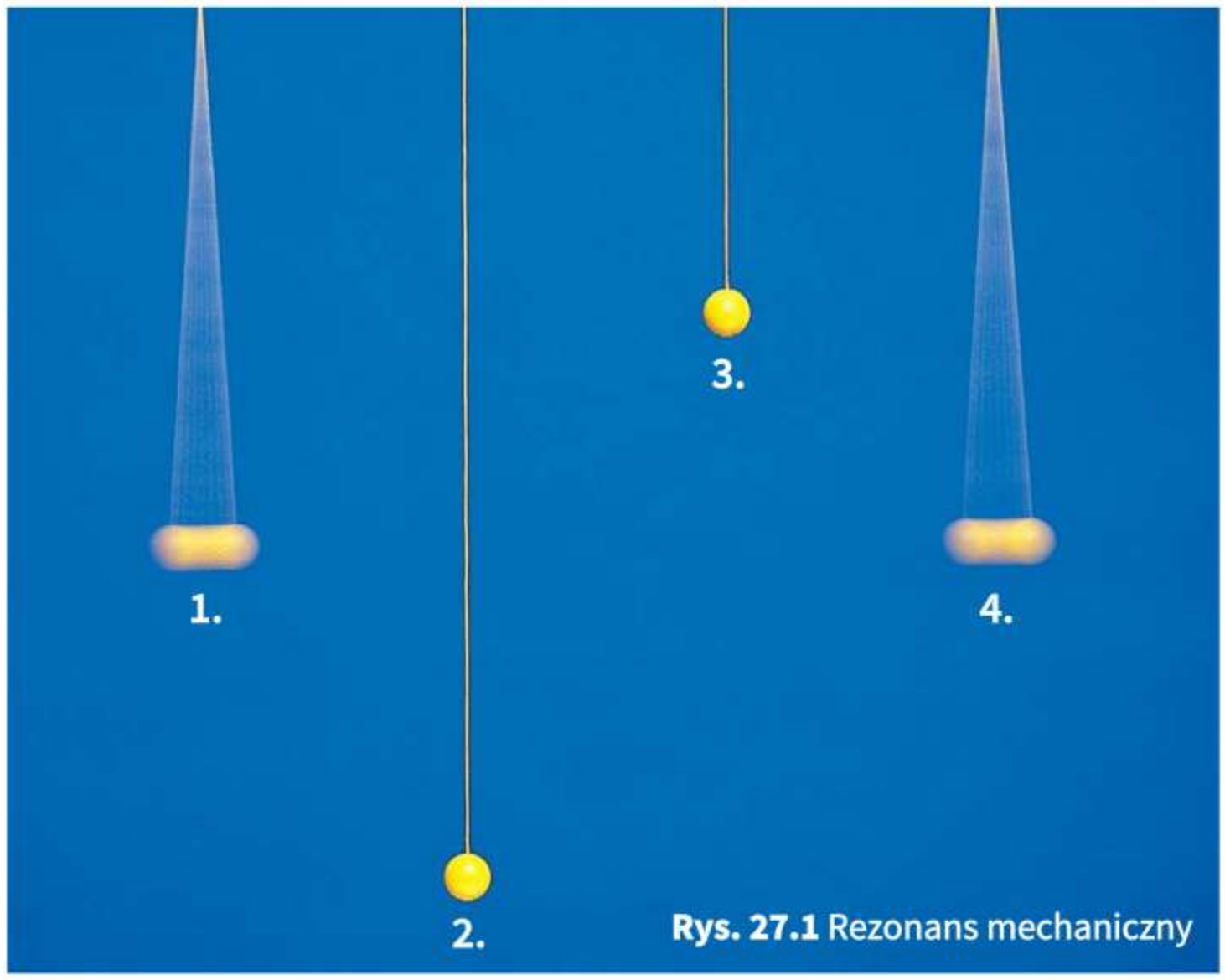
$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Będziemy tę częstotliwość nazywać **częstotliwością własną** lub **częstotliwością drgań własnych** ciała i oznaczać ν_0.

Odmienna sytuacja zachodzi wtedy, gdy drgania ciała wywołuje zewnętrzna siła okresowo zmieniająca się z czasem. Przykładem może być most, który drga pod wpływem maszerującej po nim kolumny żołnierzy, lub obudowa silnika drgająca na skutek niedokładnego wyważenia wału. Takie drgania nazywamy **drganiami wymuszonymi**.
Drgania wymuszone mają częstotliwość taką samą jak zmienna siła zewnętrzna, ale na ogół różną od częstotliwości własnej ciała. Ruch ciała zależy od relacji, jaka zachodzi pomiędzy częstotliwością wymuszoną a częstotliwością własną.
W celu lepszego zrozumienia tego zjawiska wykonamy proste doświadczenie. Na cienkim sznurku zawieszamy cztery wahadła o różnej długości (rys. 27.1).
Jeśli wyprowadzimy z położenia równowagi wahadło 1, to zaobserwujemy, że po pewnym czasie amplituda drgań tego wahadła zmaleje, natomiast zacznie drgać wahadło 4, a amplituda jego drgań wzrośnie. Prawie nie zaobserwujemy drgań wahadła 2, mimo że jest ono zawieszone bliżej wahadła 1 niż wahadło 4.
Wahadło 1 wprawia sznurek w drgania o okresie:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}}$$

Sznurek przekazuje drgania trzem pozostałym wahadłom, ale drgania o znacznej amplitudzie uzyskuje tylko wahadło 4, którego częstotliwość drgań własnych jest taka sama jak częstotliwość drgań wymuszających.



Rys. 27.1 Rezonans mechaniczny

Jeżeli częstotliwość siły wymuszającej i częstotliwość drgań własnych są równe lub dostatecznie zbliżone, to amplituda osiąga wartość maksymalną. Takie zjawisko nazywa się **rezonansem**, a częstotliwość wymuszającą drgania rezonansowe – **częstotliwością rezonansową**.

Kolumna żołnierzy maszerująca przez most równym krokiem może doprowadzić do jego drgań. Jeżeli zdarzy się, że częstotliwość drgań wymuszona krokiem żołnierzy będzie równa częstotliwości własnej mostu, to amplituda powstałych drgań może stać się niebezpiecznie duża i doprowadzić (obrazowo mówiąc) do jego rozkołysania i w konsekwencji – do zawalenia. Aby tego uniknąć, żołnierze otrzymują przed mostem komendę marszu swobodnym krokiem.

Drgania tłumione

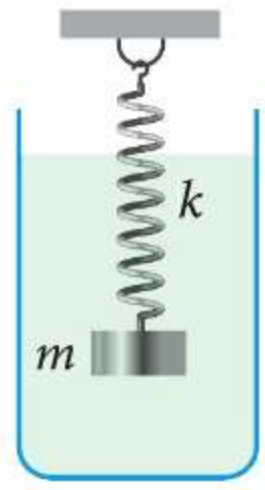
Na ciała drgające, tak jak na wszystkie ciała poruszające się w gazach i cieczach (w powietrzu, wodzie, oleju itp.), działają siły oporu. Jeśli maksymalna szybkość ruchu jest niewielka, to siłę oporu wyrażamy wzorem:

$$\vec{F}_{\text{op}} = -b\vec{v}$$

gdzie b jest współczynnikiem charakteryzującym drgające ciało oraz ośrodek, w którym odbywa się ruch.

Wartość siły oporu jest wprost proporcjonalna do szybkości, z którą porusza się ciało, a zwroty siły oporu i prędkości ciała są przeciwne.

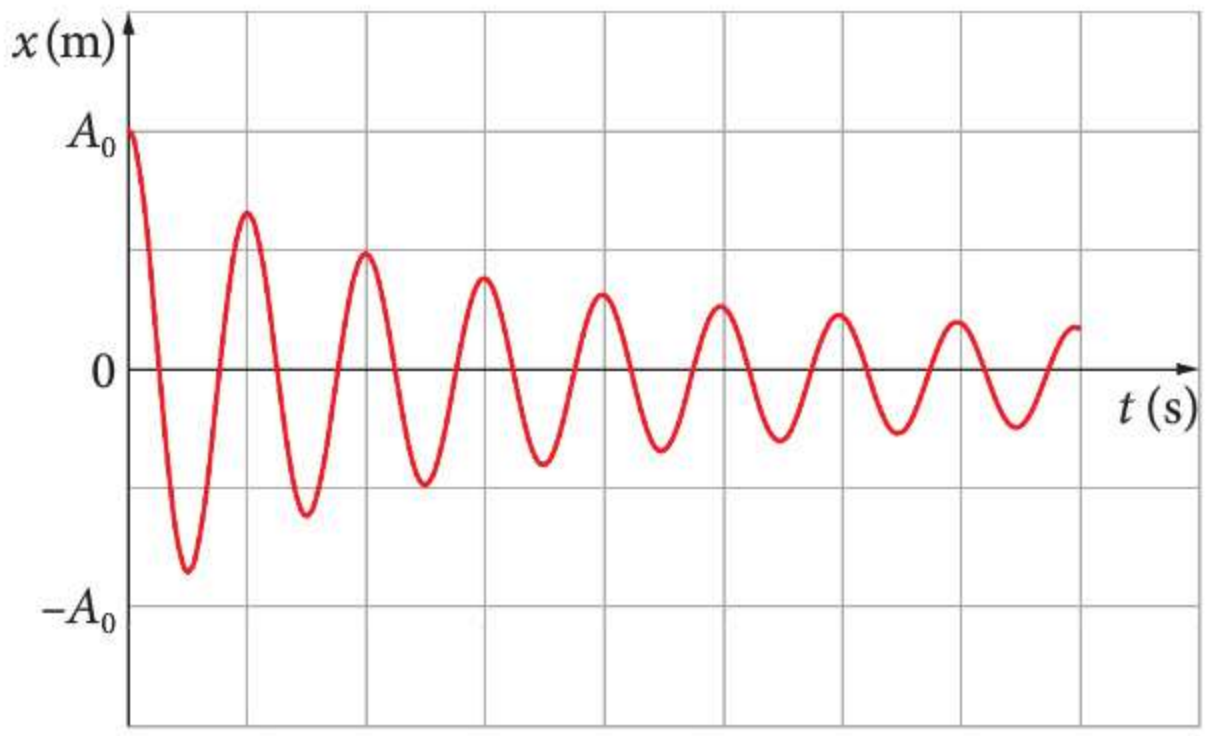
Działanie siły oporu na drgające ciało jest przyczyną zmniejszania się amplitudy drgań i ich wygaszenia, jeśli nie będzie działać na ciało siła podtrzymująca drgania. Mówimy, że siły oporu powodują tłumienie drgań. Zjawisko to obserwujemy po wprawieniu w drgania wahadła, strun gitary lub fortepianu, odważnika zawieszonego na sprężynie i drgającego w powietrzu lub cieczy (rys. 27.2).



Rys. 27.2 Tłumiony ruch drgającego ciężarka

Siłą tłumiącą może być także siła tarcia. Siły tłumiące powodują zamianę energii mechanicznej ciała drgającego w energię wewnętrzną tego ciała i jego otoczenia.
W przypadku drgającego odważnika (rys. 27.2) siłą wypadkową jest suma siły ciężkości $\vec{F}_c$ działającej na odważnik, siły sprężystości sprężyny $\vec{F}_s$ i siły oporu ośrodka $\vec{F}_{op}$.

Zależność wychylenia od czasu w takim przypadku przedstawia wykres (rys. 27.3).



Rys. 27.3 Wykres $x(t)$ dla ruchu drgającego tłumionego

Okres drgań tłumionych pozostaje stały, ale ich amplituda zmniejsza się na skutek tłumienia.
Szczegółowe obliczenia, wymagające użycia metod matematyki wyższej, pokazują, że okres drgań tłumionych wyraża się wzorem:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}}$$

Można z niego odczytać, że:

- dla danego współczynnika b, danej sprężyny (o stałym współczynniku k) i danego odważnika (o stałej masie m) okres drgań tłumionych jest stały i niezależny od malejącej amplitudy drgań;
- im większy będzie współczynnik b, tym okres drgań tłumionych również będzie większy.

WIEDZIEĆ WIĘCEJ

Wpływ drgań na organizm człowieka

Drgania oddziałujące na organizm ludzki wskutek jego bezpośredniego kontaktu z ciałem drgającym (urządzeniem, elementem maszyny lub narzędziem) nazywamy **wibracjami**. Źródłem wibracji mogą być m.in. podłogi, podesty i pomosty w halach produkcyjnych, siedziska i podłogi w środkach transportu i maszynach budowlanych, a także ręczne narzędzia. Wibracje mogą spowodować obrażenia mechaniczne organów wewnętrznych, polegające na uszkodzeniu elastycznych powiązań między narządami.

Szczególnie przykrych subiektywnych doznań człowiek doświadcza wtedy, gdy oddziaływaniu wibracji na jego ciało towarzyszy zjawisko rezonansu. Ciało wpada w rezonans, gdy wibracje mają częstotliwości charakterystyczne dla pewnych narządów człowieka. I tak drgania rezonansowe gałek ocznych powodują zamazanie obrazu obserwowanych przedmiotów, rezonans głowy zaburza działania błędnika i wywołuje tzw. chorobę morską, a rezonans szczęki i tchawicy powoduje trudności w oddychaniu i porozumiewaniu się. Najsilniejsze skutki oddziaływania wibracji na organizm człowieka występują przy częstotliwościach drgań do 35 Hz.

Dłuższe przebywanie człowieka pod wpływem wibracji prowadzi do jego zmęczenia. Pracownik narażony na wibracje ma problemy ze skoncentrowaniem uwagi na wykonywanych czynnościach i trudności w odczytywaniu wskazań aparatury pomiarowej, a także zaczyna coraz wolniej reagować na bodźce świetlne i dźwiękowe. To wszystko może doprowadzić do groźnego w skutkach wypadku. Długotrwałe oddziaływanie wibracji na człowieka prowadzi do tzw. choroby wibracyjnej. W organizmie chorego zachodzą nieodwracalne zmiany. Objawy chorobowe mają charakter indywidualny i najczęściej związane są ze specyfiką wykonywanego zawodu. Mogą one polegać na zaburzeniach czucia dłoni i końców palców, bólach rąk, głowy i klatki piersiowej, bólach mięśni przy ucisku. Mogą też wystąpić inne zmiany chorobowe w układzie krwionośnym, nerwowym i kostno-stawowym.

Wibracje są dla człowieka czynnikiem bardzo szkodliwym, dlatego wciąż podejmuje się wysiłki, aby je eliminować lub przynajmniej ograniczać, np. przez konstruowanie i używanie takich narzędzi, które podczas pracy wytwarzają drgania o parametrach nieprzekraczających dopuszczalnych norm. Dobre efekty uzyskuje się dzięki stosowaniu materiałów oraz układów izolujących i tłumiących drgania. Takie materiały i układy wykorzystuje się m.in. do produkcji amortyzowanych siedzisk oraz uchwytów narzędzi i rękawic.

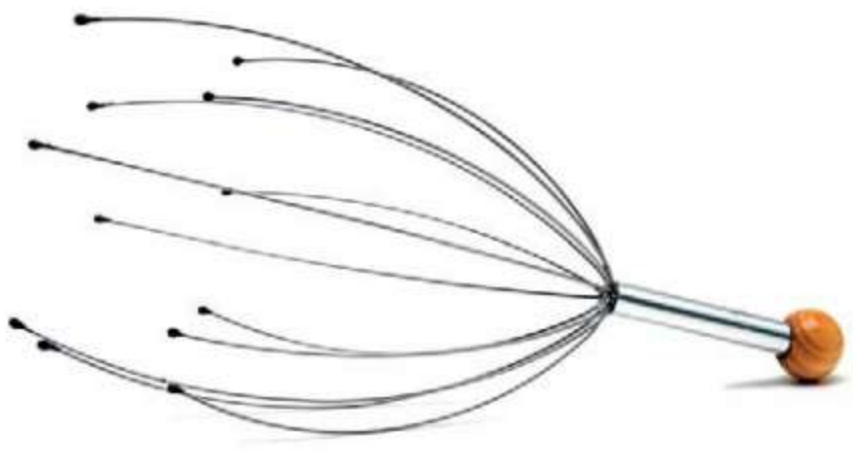


ZADANIA

1. Obejrzyj doświadczenia przedstawione na filmie pod adresem www.youtube.com/watch?v=JbRd_VUfqfs. Sporządź notatkę wyjaśniającą zachowanie lizaków i deski, do której przymocowano silnik.

2. Oblicz współczynnik sprężystości układu sprężyn resorów wagonu o masie $m = 40\ \mathrm{t}$, który przy szybkości $v = 15\ \mathrm{m/s}$ zaczyna silnie drgać wskutek uderzania kół o złącza szyn. Długość szyny $l = 12\ \mathrm{m}$.

3. Do badania drgań można wykorzystać przyrząd do masażu głowy (rys. 27.4). Wychyl z położenia równowagi i następnie puść jeden z krótszych prętów i obserwuj zachowanie pozostałych prętów. Powtórz obserwację, lecz tym razem wychyl dłuższy pręt. Wyjaśnij obserwowane zjawisko.



Rys. 27.4

4. Wahadło wychylono z położenia równowagi o A. W pierwszym cyklu drgań amplituda zmniejszyła się o 4%. Oblicz i wyraź w procentach względny ubytek energii mechanicznej wahadła w tym cyklu.



Sprężystość jako makroskopowy efekt oddziaływań mikroskopowych

Siły sprężystości są to siły występujące przy odkształcaniu ciał. Dążą one do przywrócenia ciałom ich pierwotnych kształtów i rozmiarów. Efekty sprężyste występują tylko w ciałach stałych – ciecze i gazy nie wykazują tzw. sprężystości postaci.

Występowanie sił sprężystości jest spowodowane elektromagnetycznymi oddziaływaniami między cząsteczkami ciała i ich składnikami. Stabilny kształt ciał stałych jest efektem tych oddziaływań.

Gdy odkształcenie jest niewielkie, po usunięciu siły zewnętrznej ciało wraca do pierwotnego kształtu – mówimy wówczas o **odkształceniu sprężystym**. Natomiast gdy wskutek działania sił zewnętrznych następuje trwała zmiana położeń cząsteczek w sieci krystalicznej, a więc nieodwracalna zmiana kształtu ciała – mówimy o **odkształceniu niesprężystym**, inaczej plastycznym.



Ruch drgający harmoniczny

Wielkości fizyczne opisujące ruch drgający to:

- **wychylenie z położenia równowagi** w danej chwili (opisane współrzędną położenia x w wybranym układzie współrzędnych);
- **amplituda drgań** A (maksymalne wychylenie z położenia równowagi);
- **okres** T (czas, w którym ciało wykonuje jedno pełne drganie);
- **częstotliwość** ν (informująca o liczbie drgań w jednostce czasu).

Każdy ruch drgający, w którym wartość wypadkowej siły działającej na ciało jest proporcjonalna do wychylenia, nazywa się ruchem harmonicznym.

$$F = k|x|$$

Współczynnik proporcjonalności k, zwany **współczynnikiem sprężystości**, charakteryzuje właściwości sprężyste drgającego ciała.

Cechy ruchu harmonicznego:

- okresowość;
- zmiana wartości i zwrotu prędkości (w położeniach maksymalnego wychylenia szybkość ciała drgającego jest równa zeru, a podczas przechodzenia przez położenie równowagi ciało ma maksymalną szybkość);
- ciało drgające zbliża się do położenia równowagi ruchem niejednostajnie przyspieszonym, a oddala się od niego ruchem niejednostajnie opóźnionym.



Matematyczny opis ruchu harmonicznego

W matematycznym opisie ruchu harmonicznego należy zwracać uwagę na to, gdzie znajdowało się ciało drgające w chwili rozpoczęcia obserwacji i mierzenia czasu.

Jeśli w chwili $t = 0$ wychylenie $x = 0$, czyli ciało mijało położenie równowagi, korzystamy ze wzorów:

$$x = A \sin \omega t$$

$$v_x = \omega A \cos \omega t$$

$$a_x = -\omega^2 A \sin\omega t$$

$$F_x = -m\omega^2 A \sin\omega t$$

Kąt $\alpha = \omega t$, którego funkcje sinus i cosinus występują w powyższych wzorach, nazywamy **fazą drgań**.

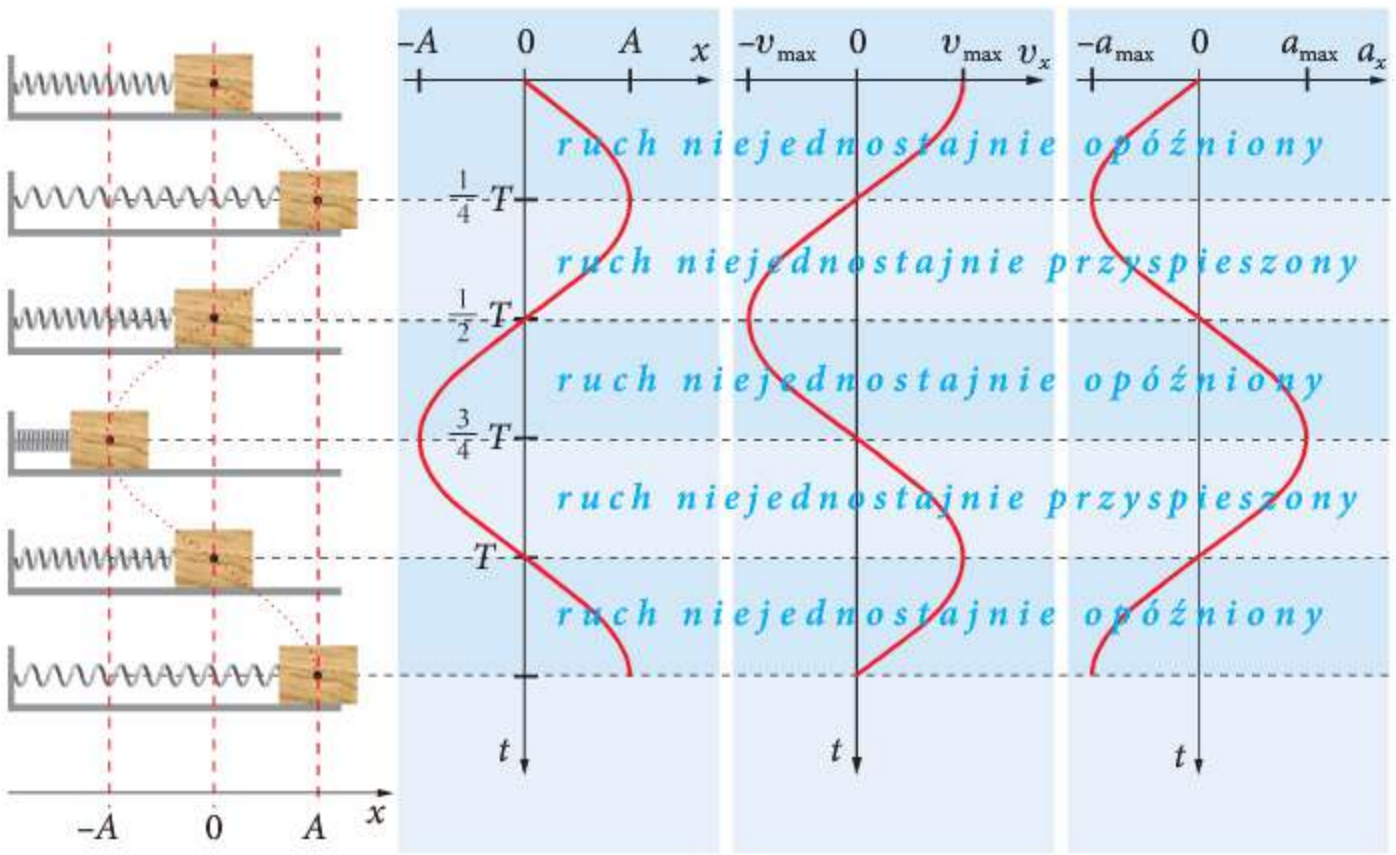
Jeśli w ruchu harmonicznym (np. w ruchu wzdłuż osi x) rozpoczęto mierzenie czasu w chwili, gdy ciało miało wychylenie $0 < |x| < A$, do iloczynu ωt musimy dodać odpowiedni kąt φ_0, który nazywamy **fazą początkową**. Wówczas w chwili t faza drgań jest równa $\omega t + \varphi_0$, a:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Okres drgań w ruchu drgającym harmonicznym wyraża się wzorem:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Na rysunku poniżej przedstawiono wykresy zależności od czasu wielkości opisujących ruch harmoniczny (ruch wzdłuż osi x, $\varphi_0 = 0$).





Energia w ruchu harmonicznym

Jeśli przyjmiemy, że w położeniu równowagi energia potencjalna sprężystości jest równa zeru, to ciało drgające wychylone o x z położenia równowagi ma **energię potencjalną** równą:

$$E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}kx^2$$

Całkowita energia mechaniczna ciała drgającego ruchem harmonicznym jest równa sumie energii potencjalnej i kinetycznej ciała w danej chwili:

$$E_\mathrm{c} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 = \mathrm{const}$$

Całkowita energia ciała w ruchu harmonicznym jest niezależna od czasu, więc pozostaje stała podczas ruchu. To stwierdzenie stanowi **zasadę zachowania energii mechanicznej** w ruchu drgającym harmonicznym.



Wahadło matematyczne

Wahadłem matematycznym nazywamy ciało o masie m i niemierzalnie małej objętości (czyli punkt materialny), zawieszone na nieważkiej i nierozciągliwej nici o długości l, umieszczone w jednorodnym polu grawitacyjnym. W praktyce takim wahadłem jest ciało, którego wymiary liniowe są znacznie mniejsze od długości nici.
Ruch wahadła jest dla małych wychyleń ruchem harmonicznym, a okres drgań wahadła wyraża się wzorem:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$



Drgania wymuszone, rezonansowe i tłumione

Drgania, które pojawiają się wtedy, gdy ciało zostaje (nieznacznie) wychylone z położenia równowagi, a następnie puszczone swobodnie, to **drgania własne** ciała.
Częstość kołowa drgań własnych ciała o masie m wyraża się wzorem:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

a **częstotliwość drgań własnych** (**częstotliwość własna**):

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Drgania ciała wywołane przez zewnętrzną siłę okresowo zmieniającą się z czasem nazywamy **drganiami wymuszonymi**. Ich częstotliwość jest równa częstotliwości sinusoidalnie zmiennej siły zewnętrznej (na ogół różnej od częstotliwości własnej ciała).

Jeżeli częstotliwość siły wymuszającej i częstotliwość drgań własnych ciała są równe lub dostatecznie zbliżone, to amplituda drgań osiąga wartość maksymalną. Takie zjawisko nazywa się **rezonansem**, a częstotliwość wymuszającą drgania rezonansowe – **częstotliwością rezonansową**.

Jeśli na drgające ciało działa siła oporu, której wartość jest wprost proporcjonalna do szybkości tego ciała ($F_{op} = bv$), to amplituda drgań maleje. Taki ruch nazywamy **drganiami tłumionymi**. Okres drgań tłumionych wyraża się wzorem:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}}$$

Dla danego współczynnika b, danej sprężyny i danego odważnika okres drgań tłumionych jest stały i niezależny od malejącej amplitudy drgań.

ZADANIA POWTÓRZENIOWE

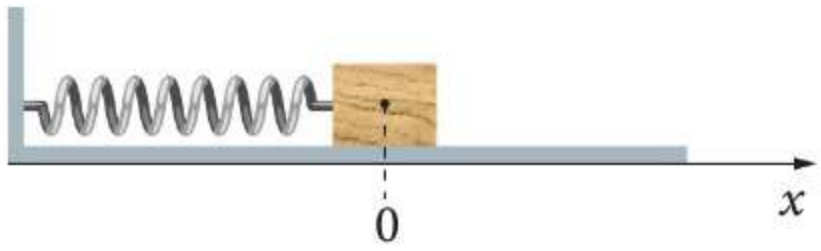
1. Na końcu długiej, wiotkiej sprężyny zawieszono obciążnik i wprawiono go w pionowe drgania o nieznanej amplitudzie.

Oceń prawdziwość poniższych zdań odnoszących się do zwrotu siły, którą sprężyna działa na drgający obciążnik w jego najwyższym położeniu. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F, jeśli jest fałszywe.

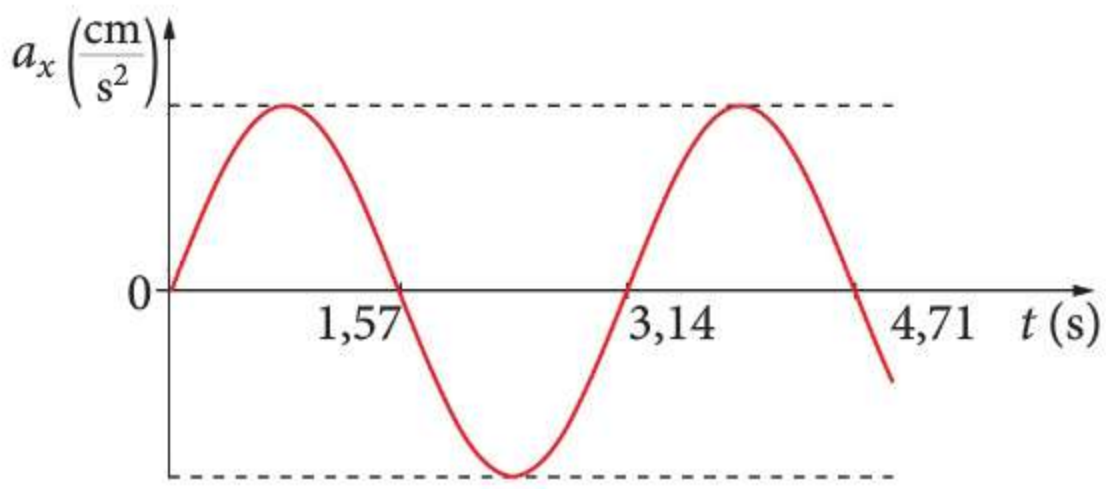
1.	Niezależnie od wartości amplitudy drgań w najwyższym położeniu sprężyna działa na obciążnik siłą zwróconą w dół.	**P**	**F**
2.	Jeśli amplituda drgań jest większa od wydłużenia sprężyny w położeniu równowagi, to w najwyższym położeniu sprężyna działa na obciążnik siłą zwróconą w dół.	**P**	**F**
3.	Jeśli amplituda drgań jest mniejsza od wydłużenia sprężyny w położeniu równowagi, to w najwyższym położeniu sprężyna działa na obciążnik siłą zwróconą w górę.	**P**	**F**
4.	Jeśli amplituda drgań jest równa wydłużeniu sprężyny w położeniu równowagi, to w najwyższym położeniu sprężyna nie działa na obciążnik żadną siłą.	**P**	**F**

2. Klocek leżący na gładkiej poziomej powierzchni i przyczepiony do końca sprężyny wykonuje drgania harmoniczne o amplitudzie $5\ \mathrm{cm}$ (rys. 1). Wykres na rysunku 2 przedstawia zależność współrzędnej przyspieszenia klocka od czasu, mierzonego od chwili rozpoczęcia obserwacji.

1.



2.



a) W jakim położeniu znajdował się klocek i w którą stronę się poruszał w chwili rozpoczęcia obserwacji? Odpowiedz na pytanie i uzasadnij odpowiedź.

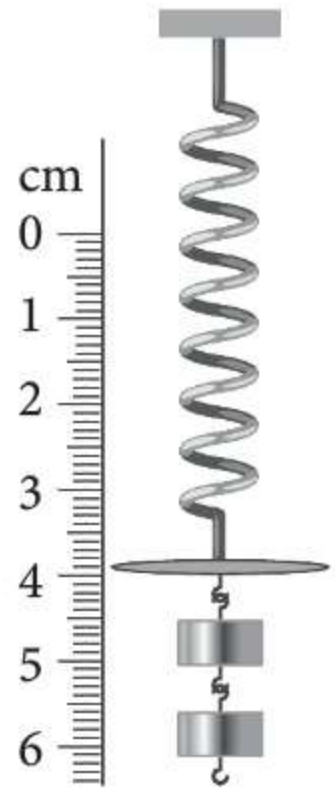
b) Odczytaj z wykresu okres drgań. Oblicz i wyraź w jednostkach SI częstość kołową ω oraz wartość maksymalnej prędkości klocka.

c) Narysuj wykresy zależności:
- **$x(t)$ – współrzędnej położenia od czasu, od chwili rozpoczęcia obserwacji;**
- **$v_x(t)$ – współrzędnej prędkości od czasu, od chwili rozpoczęcia obserwacji.**

d) Napisz równanie $x(t)$ opisujące ruch klocka. Odpowiednie wartości A, ω i φ wstaw do równania w jednostkach SI.

3. Na rysunku przedstawiono schemat doświadczenia, w którym zwiększano liczbę jednakowych obciążników (każdy o masie 50 g) zawieszanych na sprężynie i mierzono w każdym przypadku jej wydłużenie x. W tabeli podano wyniki pomiarów.

Nr	m (g)	x (cm)	F (N)
1.	50	2,0 ± 0,1	
2.	100	3,9 ± 0,1	
3.	150	6,1 ± 0,1	
4.	200	8,1 ± 0,1	
5.	250	9,9 ± 0,1	



a) Oblicz kolejne wartości sił $\vec{F}$ rozciągających sprężynę i wypełnij w zeszycie ostatnią kolumnę tabeli. Przyjmij, że wartość przyspieszenia ziemskiego $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$.

b) Na papierze milimetrowym sporządź wykres zależności wydłużenia sprężyny od wartości działającej siły.
Uwaga: Nanieś punkty pomiarowe wraz z niepewnościami. Przyjmij, że niepewność pomiarową, z jaką wyznaczono masy obciążników, można pominąć.

c) Na podstawie wykresu oblicz współczynnik sprężystości k sprężyny.

d) Skorzystaj z wykresu i oblicz energię potencjalną maksymalnie rozciągniętej sprężyny.

4. Droga przebyta przez ciało poruszające się ruchem jednostajnie przyspieszonym, w którym $v_0 = 0$, jest następującą funkcją czasu:

$$s = \frac{at^2}{2}$$

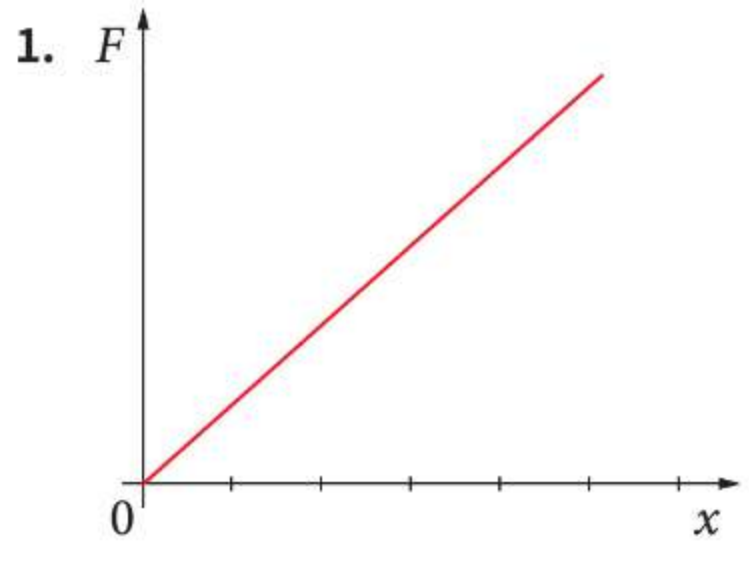
z czego wynika, że drogi przebyte tym ruchem w kolejnych, jednakowych odstępach pozostają w stosunku $1 : 3 : 5 : 7\ldots$
Praca wykonana podczas sprężystego wydłużenia nierozciągniętej początkowo sprężyny jest następującą funkcją wydłużenia:

$$W = \frac{kx^2}{2}$$

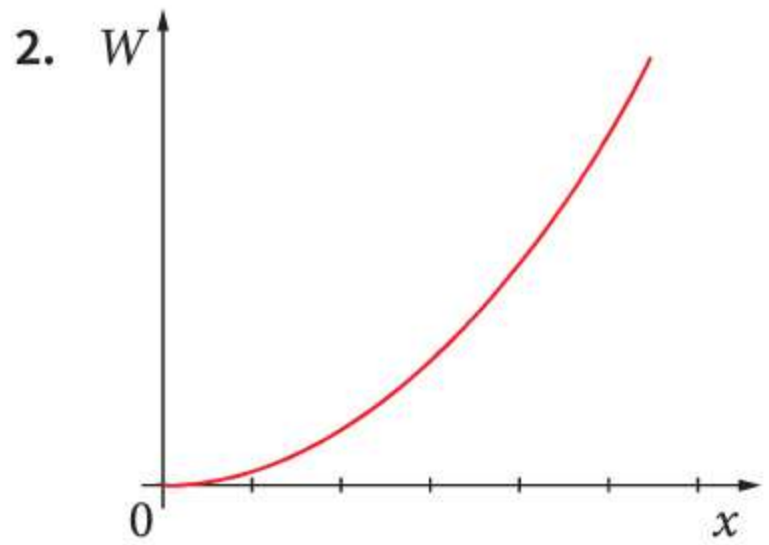
a) Nazwij wielkości, które w tym przypadku będą tworzyły stosunek $1 : 3 : 5 : 7\ldots$

b) Zilustruj w zeszycie te wielkości na wykresie przedstawiającym zależność wartości siły rozciągającej sprężynę od jej wydłużenia (rys. 1).

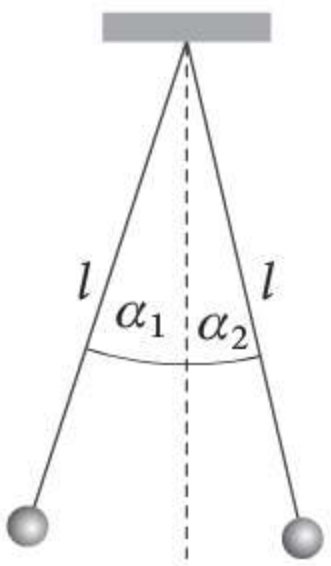
1.



c) Zilustruj w zeszycie te wielkości na wykresie przedstawiającym zależność pracy wykonanej podczas rozciągania sprężyny od jej wydłużenia (rys. 2).

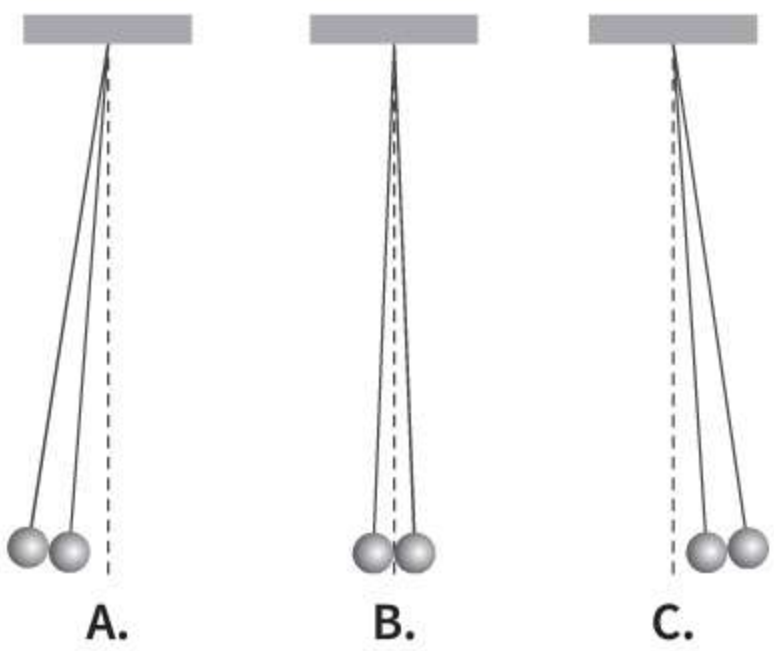


5. Dwa długie wahadła zaczepione w jednym punkcie wychylono z położenia równowagi o różne (małe) kąty: α_1 i α_2 (patrz rysunek) i równocześnie puszczono.



Wskaż poprawne dokończenie zdania wybrane spośród A–C.

Wahadła zderzą się w położeniu **A** / **B** / **C**.



ZJAWISKA TERMODYNAMICZNE

- Przemiany gazu doskonałego
- Energia wewnętrzna
- Zasady termodynamiki
- Silniki cieplne
- Przejścia fazowe
- Rozszerzalność temperaturowa ciał



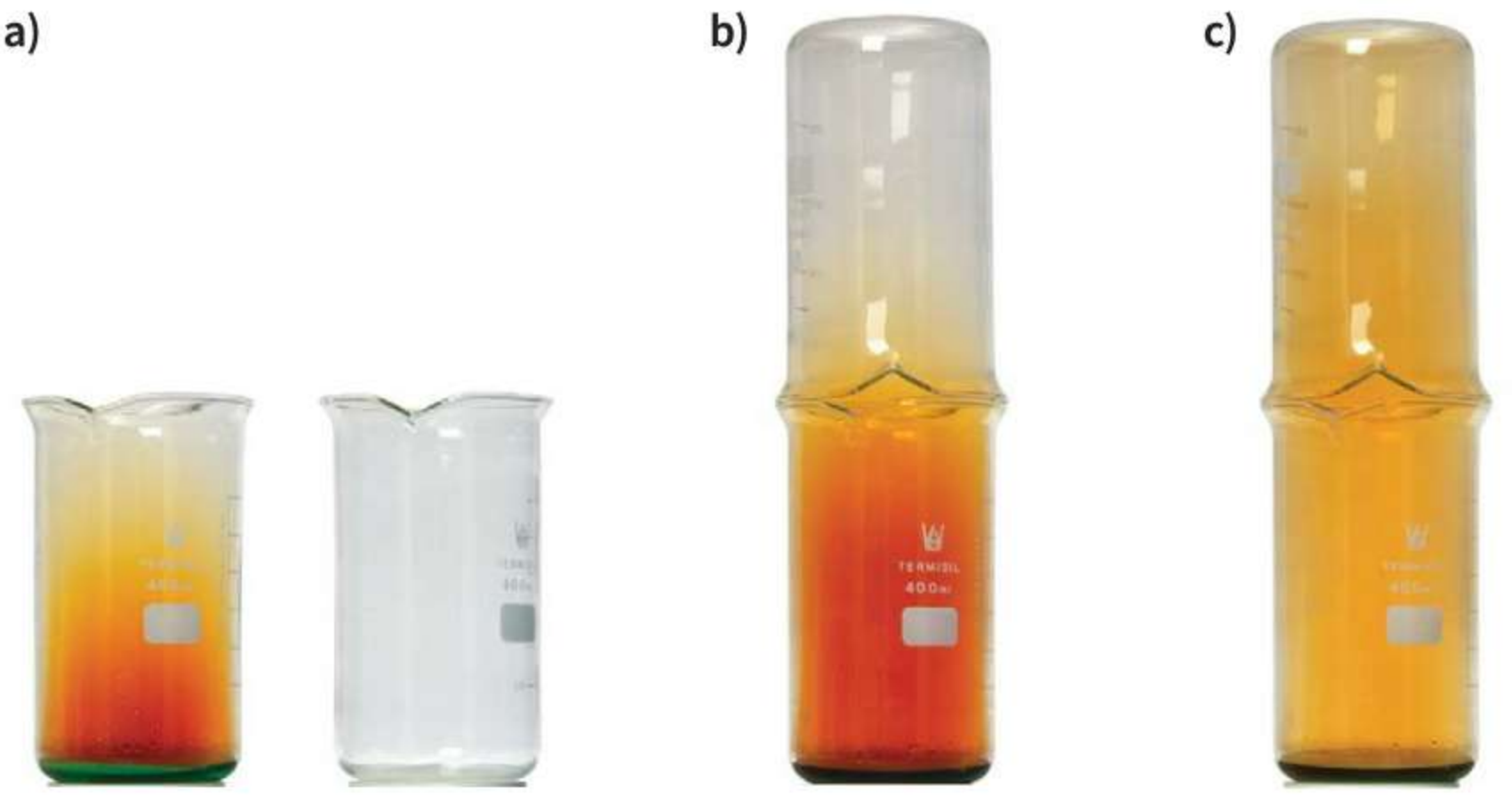
28. Równowaga termodynamiczna. Zerowa zasada termodynamiki

- Zjawiska makroskopowe wynikające z mikroskopowej budowy materii
- Stan równowagi termodynamicznej, pomiar temperatury
- Zerowa zasada termodynamiki

Przypomnij sobie, co wiesz o trzech stanach skupienia i własnościach ciał w tych stanach oraz o cząsteczkowej budowie ciał (siłach i odległościach międzycząsteczkowych).

W połowie XIX wieku dzięki pracom wielu uczonych (J.P. Joule'a, R.E. Clausiusa, J.C. Maxwella, L. Boltzmanna, a także polskiego fizyka Mariana Smoluchowskiego) teoria kinetyczno-molekularna budowy materii ugruntowała się w nauce. Miało to wielki wpływ na rozwój fizyki, chemii i biologii. Teoria ta tłumaczy wiele zjawisk, jakie każdy z nas obserwuje w życiu codziennym.

Substancje w różnych stanach skupienia mają różne własności, które wynikają z ich budowy cząsteczkowej. Gazy są ściśliwe, nawet niewielkie siły mogą zmienić ich objętość, bo odległości między cząsteczkami gazów są znacznie większe niż rozmiary samych cząsteczek. Z tego powodu w gazach łatwo zachodzi **dyfuzja** (rys. 28.1), czyli przenikanie cząsteczek jednego gazu pomiędzy cząsteczki drugiego (samorzutne mieszanie się). Szybkość dyfuzji rośnie ze wzrostem temperatury, co świadczy o tym, że w wyższej temperaturze cząsteczki poruszają się szybciej. Siły działające między cząsteczkami gazu są tak niewielkie, że często je pomijamy; działają one tylko podczas zderzeń, a między kolejnymi zderzeniami cząsteczki poruszają się ruchem jednostajnym.



Rys. 28.1 Kolejne etapy dyfuzji w gazie

Oddziaływań międzycząsteczkowych nie można natomiast pominąć w przypadku cieczy. Zachowują one swoją objętość i są znacznie mniej ściśliwe niż gazy, a to znaczy, że cząsteczki cieczy są dość „gęsto upakowane", trudno je do siebie zbliżyć. Dyfuzja w cieczach zachodzi znacznie wolniej niż w gazach.
Ciała stałe mają określony kształt i określoną objętość. Wiele ciał stałych ma budowę krystaliczną, w której jony tworzą regularną sieć. Sieć krystaliczną metali stanowią jony dodatnie, pomiędzy którymi chaotycznie poruszają się uwolnione z atomów elektrony swobodne.

W tym dziale będziemy się zajmować ciałami makroskopowymi, składającymi się z bardzo wielu cząsteczek. W pierwszej kolejności zajmiemy się gazami zawartymi w zbiornikach zamkniętych. Pokażemy, w jaki sposób z teorii kinetyczno-molekularnej gazów wynikają ich własności makroskopowe, takie jak wywieranie przez gaz siły parcia na ścianki zbiornika. Z teorii tej wyprowadzimy prawa, którym podlegają gazy, a wynikające z tych praw zależności można sprawdzić doświadczalnie.

Podczas formułowania praw dla gazów (czy innych układów makroskopowych[16]) będziemy zakładać, że znajdują się one w stanie **równowagi termodynamicznej (cieplnej)**. Oznacza to, że jeśli zmierzylibyśmy np. ciśnienie czy temperaturę w różnych chwilach i w różnych miejscach układu makroskopowego, to otrzymalibyśmy zawsze takie same wyniki. Jeśli układ jest oddzielony od otoczenia ściankami mogącymi przewodzić ciepło, a mimo to pozostaje w równowadze termodynamicznej, to jest on także w równowadze z otoczeniem.

W życiu codziennym często posługujemy się pojęciem temperatury, gdy chcemy przekazać informację, jak bardzo „nagrzane" jest ciało. Aby zmierzyć temperaturę, korzystamy z faktu, że wpływa ona na wiele różnych własności ciał, jak objętość, ciśnienie, opór elektryczny itd. Często korzystamy z zależności objętości cieczy, np. rtęci, od temperatury (w klasie siódmej była mowa o termometrze cieczowym, w którym wykorzystuje się zjawisko rozszerzalności temperaturowej cieczy). Wprowadzamy umowę, na mocy której termometr będący w równowadze z topniejącym lodem wskazuje 0°, a jeśli doprowadzimy go do równowagi cieplnej z wrzącą wodą, to wskazaną temperaturę uznajemy za 100°. Zakładamy, że obrana cecha termometryczna (w tym przypadku objętość) jest liniową funkcją temperatury, zatem po zaznaczeniu kresek w odpowiednich miejscach dzielimy odstęp między nimi na sto równych części. W ten sposób określa się empiryczną (doświadczalną) skalę Celsjusza. Tak wycechowanym termometrem możemy mierzyć temperaturę dowolnego ciała, jeśli doprowadzimy przedtem do stanu równowagi termodynamicznej między tym ciałem i termometrem.

[16] Układ to wycinek (fragment) materii, który wyodrębniamy z otaczającego świata. Wszystko poza układem, co ma lub może mieć jakiś wpływ na jego zachowanie, nazywamy otoczeniem tego układu.

Stany równowagi spełniają **zerową zasadę termodynamiki**, którą formułujemy następująco:

> Jeśli pewne ciało A jest w równowadze termodynamicznej z ciałem C i równocześnie ciało B jest w równowadze termodynamicznej z ciałem C, to wówczas ciała A i B także są ze sobą w równowadze termodynamicznej.

W tym przypadku rolę ciała C spełnia oczywiście termometr. Nie musimy doprowadzać do bezpośredniego kontaktu ciał A i B, aby stwierdzić, że ciała te mają taką samą temperaturę.

W dalszej części działu wprowadzimy tzw. temperaturę bezwzględną T (wyrażaną w kelwinach), związaną z ruchem postępowym cząsteczek ciała.

Omawiane w tym dziale zagadnienia nie są dla ciebie całkowicie nowe. O wielu własnościach ciał i zjawiskach w nich zachodzących, które wyjaśniamy na podstawie teorii kinetyczno-molekularnej, była mowa w siódmej i ósmej klasie. Tutaj uzupełnimy tę wiedzę (np. wyrazimy sformułowane prawa w postaci matematycznej) oraz usystematyzujemy ją tak, aby tworzyła uporządkowaną strukturę.

Aby uniknąć nieporozumień, w rozważaniach dotyczących gazów będziemy w tym rozdziale konsekwentnie używać symboli przedstawionych poniżej.
m – masa całego gazu w zbiorniku
m_{cz} – masa pojedynczej cząsteczki gazu
M – masa mola gazu (tzw. masa molowa)
n – liczba moli gazu w zbiorniku
N – liczba cząsteczek gazu w zbiorniku
N_A – liczba Avogadra – liczba cząsteczek w jednym molu substancji

Często podczas wyprowadzania wzorów lub przy rozwiązywaniu zadań konieczne będzie stosowanie oczywistych związków:

$$m = n \cdot M \qquad m = N \cdot m_{cz} \qquad N = n \cdot N_A$$

ZADANIA

1. Aby zmierzyć swoją temperaturę termometrem cieczowym, musisz go przez kilka minut stykać ze swoim ciałem. Wyjaśnij, jaki proces zachodzi podczas tych kilku minut; weź pod uwagę teorię kinetyczno-cząsteczkowej budowy ciał.
2. Odczytaj głośno, z uwzględnieniem pełnych nazw kryjących się pod symbolami, każdy z trzech związków zapisanych tuż przed *Zadaniami*.
3. W zbiorniku znajduje się $n = 0{,}25$ mola tlenu, którego masa molowa $M = 32\ \mathrm{g/mol}$. Oblicz masę jednej cząsteczki tlenu i liczbę cząsteczek zawartych w zbiorniku. Przybliżona wartość liczby Avogadra $N_A = 6 \cdot 10^{23} \frac{1}{\mathrm{mol}}$.



29. Ciśnienie gazu w naczyniu zamkniętym

- Podstawowy wzór teorii kinetyczno-molekularnej gazu doskonałego
- Średni kwadrat szybkości cząsteczek i średnia szybkość kwadratowa

Przypomnij sobie związek między siłą wypadkową a zmianą pędu ciała oraz sposoby zmiany ciśnienia gazu w zbiorniku.

Załóżmy, że w zamkniętym naczyniu znajduje się N cząsteczek gazu, które nie oddziałują ze sobą ani ze ściankami naczynia siłami międzycząsteczkowymi, a ściślej mówiąc, działają na siebie i na ścianki tylko w chwilach wzajemnych zderzeń, podczas których zachowują się jak doskonale sprężyste kulki o bardzo małych rozmiarach. Gaz spełniający takie warunki nazywamy **gazem doskonałym**.

Gaz działa siłą parcia na ścianki naczynia. Siła ta pochodzi od ciągłych uderzeń cząsteczek. Podczas zderzenia ze ścianką pęd cząsteczki zmienia się o $\Delta\vec{\mathfrak{p}}$ (używamy tu innej niż zwykle litery „$\mathfrak{p}$” na oznaczenie pędu, gdyż literą „p” oznaczamy w dalszym tekście ciśnienie), zatem ścianka działa na nią siłą:

$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{\mathfrak{p}}}{\Delta t}$$

gdzie Δt jest czasem zderzenia. Z trzeciej zasady dynamiki wynika, że cząsteczka działa na ściankę siłą o takiej samej wartości. W naczyniu znajduje się bardzo duża liczba cząsteczek, więc także liczba uderzeń w ściankę w ciągu 1 sekundy jest olbrzymia. Ścianka nie odczuwa każdego uderzenia oddzielnie. Działa na nią w sposób ciągły siła parcia gazu, który znajduje się w naczyniu. Po podzieleniu wartości tej całkowitej siły przez powierzchnię ścianki otrzymujemy ciśnienie gazu. Nie będziemy tutaj dokładnie wyprowadzać tego wzoru. Intuicyjnie łatwo przewidzieć, że ciśnienie gazu na ścianki naczynia jest tym większe, im więcej cząsteczek je bombarduje, a więc im większa jest ich liczba w jednostce objętości $\left(\frac{N}{V}\right)$ oraz im większa jest ich średnia energia kinetyczna.

$$p = \frac{2}{3} \cdot \frac{N}{V} \cdot \bar{E}_{\mathrm{k}} \qquad (29.1)$$

Wzór ten jest podstawowym wzorem teorii kinetyczno-molekularnej gazu doskonałego. $\bar{E}_{\mathrm{k}}$ oznacza średnią energię kinetyczną **ruchu postępowego** cząsteczek względem

ścianek naczynia. Wiadomo, że różne cząsteczki mają różne szybkości, dlatego mówimy także o ich średniej energii kinetycznej.

$$\bar{E}_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2} m_{\mathrm{cz}} \overline{v^2}$$

gdzie $\overline{v^2}$ to tzw. **średni kwadrat szybkości** cząsteczek.
Jeżeli znamy wzór (29.1), możemy łatwo otrzymać inne jego postaci, np. związek ciśnienia z masą gazu:

$$p = \frac{2}{3} \cdot \frac{N}{V} \cdot \frac{m_{\mathrm{cz}} \overline{v^2}}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{m}{V} \cdot \overline{v^2}$$

lub z jego gęstością:

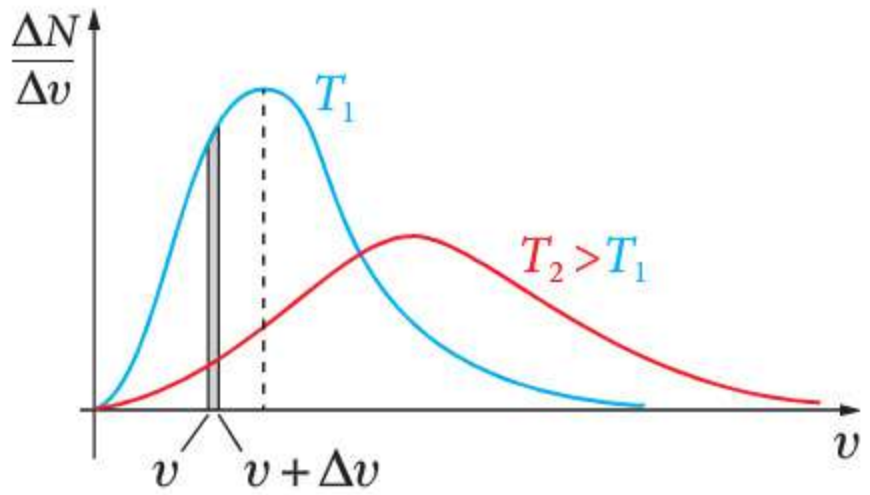
$$p = \frac{1}{3} \rho \cdot \overline{v^2}$$

Pierwiastek ze średniego kwadratu szybkości $\left(\sqrt{\overline{v^2}}\right)$ nazywamy **średnią szybkością kwadratową** cząsteczek.

WIEDZIEĆ WIĘCEJ

Rozkład prędkości cząsteczek

W stałej temperaturze liczba cząsteczek o szybkościach zawartych w przedziale $(v,\ v + \Delta v)$ jest z bardzo dobrym przybliżeniem stała (przybliżenie to jest tym lepsze, im więcej jest cząsteczek), tzn. nie zmienia się tzw. **rozkład Maxwella szybkości cząsteczek**, przedstawiony na wykresie. Pole zakreślonej figury jest równe liczbie cząsteczek ΔN, których szybkości są zawarte w przedziale $(v,\ v + \Delta v)$. Gdy temperatura gazu wzrasta, to kształt krzywej rozkładu zmienia się – staje się ona bardziej „spłaszczona".



Na przykład największa liczba cząsteczek tlenu o temperaturze $300\ \mathrm{K}$ (czyli nieco wyższej od tzw. temperatury pokojowej) posiada szybkość równą ok. $400\ \mathrm{m/s}$, tzn. krzywa ma maksimum dla takiej szybkości.

ZADANIA

1. Wyraź ciśnienie gazu w zamkniętym naczyniu przez liczbę jego moli n i liczbę Avogadra N_{A}, a także przez liczbę moli n i masę molową gazu M.

2. W jednym z dwóch naczyń o takich samych objętościach znajduje się $1\ \mathrm{mol}$ wodoru (w postaci cząsteczek H_2), w drugim – $1\ \mathrm{mol}$ helu (w postaci atomów He). Ciśnienia obu gazów są jednakowe. Co możemy powiedzieć o średnich szybkościach kwadratowych ruchu postępowego tych cząsteczek i atomów? Zapisz związek między nimi.

3. W zbiorniku o objętości $V = 5$ litrów znajdują się $n = 3\ \mathrm{mole}$ tlenu pod ciśnieniem $p = 4 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa}$. Masa molowa tlenu wynosi $M = 32\ \mathrm{g/mol}$. Oblicz:
a) średnią energię kinetyczną,
b) średnią szybkość kwadratową ruchu postępowego cząsteczki tlenu w zbiorniku.



30. Równanie stanu gazu doskonałego. Równanie Clapeyrona

- Równanie stanu gazu doskonałego (stała gazowa)
- Równanie Clapeyrona (stała Boltzmanna)
- Mikroskopowa interpretacja temperatury bezwzględnej gazu

Przypomnij sobie, co wiesz o bezwzględnej skali temperatury i jej związku ze skalą Celsjusza.

W dwóch poprzednich rozdziałach mówiliśmy o tym, że wielkości makroskopowe, charakteryzujące ciało jako całość, są powiązane z wielkościami mikroskopowymi dotyczącymi jego cząsteczek. Już w klasie siódmej omówiono zjawiska, które świadczą o tym, że istnieje związek między temperaturą ciała (wielkość makroskopowa) a średnią szybkością chaotycznego ruchu jego cząsteczek (wielkość mikroskopowa). Do takich zjawisk należy np. dyfuzja gazów lub cieczy, tzn. wzajemne (samorzutne) przenikanie cząsteczek jednej substancji pomiędzy cząsteczki drugiej (prosta obserwacja wskazuje, że w wyższej temperaturze dyfuzja zachodzi szybciej).

Gdy usuniemy przegrodę między zbiornikami, w których znajdują się gazy o różnych temperaturach, to wkrótce ich temperatury się wyrównają. Nawet gdy cząsteczki gazów mają różne masy, to (w stanie równowagi termodynamicznej) ich średnie energie kinetyczne staną się jednakowe na skutek wzajemnych zderzeń. Wobec tego:

Równość temperatur oznacza równość średnich energii kinetycznych ruchu postępowego cząsteczek obu gazów.

Przyjmujemy, że **temperatura bezwzględna** T gazu jest wielkością wprost proporcjonalną do średniej energii kinetycznej ruchu postępowego jego cząsteczek:

$$T \sim \bar{E}_\mathrm{k} \qquad \text{lub} \qquad \bar{E}_\mathrm{k} = aT$$

Współczynnik proporcjonalności a jest pewną stałą większą od zera. Później pokażemy, że jest on jednakowy dla wszystkich gazów. Ponieważ $\bar{E}_\mathrm{k} > 0$, więc także $T > 0$. Tak zdefiniowana temperatura nosi nazwę **temperatury bezwzględnej**.

Po podstawieniu aT zamiast średniej energii kinetycznej do wzoru (29.1) otrzymamy prawo, w którym wystąpią tylko wielkości makroskopowe p, V, T, charakteryzujące stan fizyczny gazu jako całości:

$$p = \frac{2}{3} \cdot \frac{N}{V} \cdot aT \qquad \text{lub} \qquad \frac{pV}{T} = \frac{2}{3}Na \tag{30.1}$$

Prawa strona ostatniego wzoru jest stała dla danej, niezmiennej liczby cząsteczek gazu N, a więc także dla stałej masy gazu. Możemy więc napisać:

$$\frac{pV}{T} = \text{const} \qquad \text{lub} \qquad \frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2} \tag{30.2}$$

Wzór (30.2), zwany **równaniem stanu gazu doskonałego**, można stosować do dowolnej przemiany tego gazu, w której każda wielkość p, V, T może ulegać zmianie, ale masa gazu $m = \text{const}$. Iloraz $\frac{pV}{T}$ pozostaje wówczas stały. Ile wynosi jego wartość? Możemy go obliczyć dla 1 mola gazu w tzw. warunkach normalnych, tzn. w temperaturze $T_0 = 273{,}15$ K i pod ciśnieniem $p_0 = 101\,325$ Pa, bo wiemy, że 1 mol każdego gazu w tych warunkach zajmuje objętość $V_0 = 22{,}4 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3$.

$$\frac{p_0V_0}{T_0} = \frac{101\,325\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 22{,}4 \cdot 10^{-3}\,\frac{\text{m}^3}{\text{mol}}}{273{,}15\,\text{K}} \approx 8{,}31\,\frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

Wielkość tę nazywamy **stałą gazową** i oznaczamy literą R.

$$R = 8{,}31\,\frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

Objętość n moli gazu w tych samych warunkach będzie n razy większa, zatem i prawa strona wzoru (30.2) będzie równa nR.

Można więc napisać:

$$\frac{pV}{T} = nR \qquad \text{lub} \qquad pV = nRT \tag{30.3}$$

Liczbę moli n można wyrazić przez liczbę cząsteczek: $n = \frac{N}{N_\text{A}}$, zatem:

$$pV = \frac{N}{N_\text{A}}RT$$

Iloraz $\frac{R}{N_\text{A}}$ jest także stałą – oznaczamy ją literą k i nazywamy **stałą Boltzmanna** ($k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\frac{\text{J}}{\text{K}}$). Wzór (30.3) da się więc zapisać następująco:

$$pV = NkT \tag{30.4}$$

Równanie to, zapisane w postaci (30.3) lub (30.4), nosi nazwę **równania Clapeyrona**. Można z niego obliczyć jeden z parametrów stanu gazu, gdy są znane pozostałe.

Z porównania prawych stron wzorów (30.1) i (30.4) obliczymy wartość stałego współczynnika a:

$$\frac{2}{3}Na = Nk \qquad \text{więc} \qquad a = \frac{3}{2}k$$

A zatem średnią energię kinetyczną ruchu postępowego cząsteczek gazu doskonałego można wyrazić wzorem:

$$\bar{E}_{\mathrm{k}} = \frac{3}{2}kT \tag{30.5}$$

ZADANIA

Uwaga: W zadaniach będziemy przyjmować przybliżoną wartość: $0^{\circ}\mathrm{C} = 273\,\mathrm{K}$.

1. Kulisty zbiornik o promieniu $r = 10\,\mathrm{cm}$ napełniono tlenem o ciśnieniu $p = 10\,\mathrm{hPa}$ i temperaturze $t = 27^{\circ}\mathrm{C}$.
   a) Oblicz liczbę cząsteczek tlenu znajdujących się w zbiorniku. Jaka to część mola tlenu?
   b) Oblicz, ile razy wzrośnie ciśnienie tlenu, gdy temperatura wzrośnie do $t' = 100^{\circ}\mathrm{C}$. Pomiń rozszerzalność temperaturową naczynia.
2. Oblicz $\sqrt{\overline{v^2}}$, czyli średnią szybkość kwadratową cząsteczek tlenu w zbiorniku, o którym mowa w poprzednim zadaniu, w temperaturach $t = 27^{\circ}\mathrm{C}$ i $t' = 100^{\circ}\mathrm{C}$. Masa molowa tlenu wynosi $M = 32\,\mathrm{g/mol}$.
3. Butlę o objętości $V = 20\,\mathrm{dm}^3$ napełniono tlenem o temperaturze $t_1 = 17^{\circ}\mathrm{C}$. Ciśnienie tlenu wynosiło $p = 2 \cdot 10^6\,\mathrm{Pa}$. Na skutek nieszczelności zaworu tlen ulatniał się z butli. Po pewnym czasie wykonano pomiar ciśnienia w temperaturze $t_2 = 37^{\circ}\mathrm{C}$ i stwierdzono, że mimo wzrostu temperatury nie uległo ono zmianie. Oblicz masę gazu, który ulotnił się z butli.
4. Dwa identyczne naczynia połączone cienką rurką zawierają gaz w temperaturze T_0 i pod ciśnieniem p. Wyprowadź wzór na:
   a) ciśnienie gazu, które ustali się w obu naczyniach, jeśli jedno z nich będziemy utrzymywać w temperaturze T_1, a drugie – w temperaturze $T_2 > T_1$; załóż, że warunki pozwalają na wyrównanie ciśnień, a uniemożliwiają wyrównanie się temperatur gazu w obu naczyniach;
   b) część masy gazu, która znajdzie się w naczyniu o wyższej temperaturze.



31. Szczególne przemiany gazu doskonałego

- Przemiana izotermiczna (prawo Boyle'a)
- Przemiana izochoryczna (prawo Charles'a)
- Przemiana izobaryczna (prawo Gay-Lussaca)

Przypomnij sobie równanie Clapeyrona.

Stan równowagi danej masy gazu jest określony przez zespół zmiennych termodynamicznych (tzw. parametrów stanu): p, V, T. Wiadomo, że w procesach termodynamicznych wszystkie lub tylko niektóre zmienne ulegają zmianie.

Gdy mówimy o **dowolnej** przemianie gazu, musimy jednak uczynić pewne zastrzeżenie. Będziemy zawsze zakładać, że wielkości charakteryzujące stan gazu zmieniają się w każdym procesie tak powoli, iż cały proces może być rozpatrywany jako ciąg kolejnych, następujących po sobie stanów równowagi, więc da się go przedstawić na wykresie w odpowiednim układzie współrzędnych (każdy punkt wykresu przedstawia stan równowagi). Taki proces nazywamy **kwazistatycznym**[17].

W tzw. szczególnych przemianach gazu doskonałego jedna z trzech wielkości, które charakteryzują stan fizyczny gazu zamkniętego w naczyniu (m = const), pozostaje stała. Są trzy takie przemiany. Prawa rządzące każdą z nich to szczególne przypadki równania stanu gazu lub równania Clapeyrona.

1. Przemiana izotermiczna

$$T = \text{const},\ p \text{ i } V \text{ ulegają zmianie.}$$

Wiemy, że $\frac{pV}{T} = nR$, ale T = const, więc

$$pV = nRT = \text{const}$$

zatem funkcja $p(V)$ ma postać:

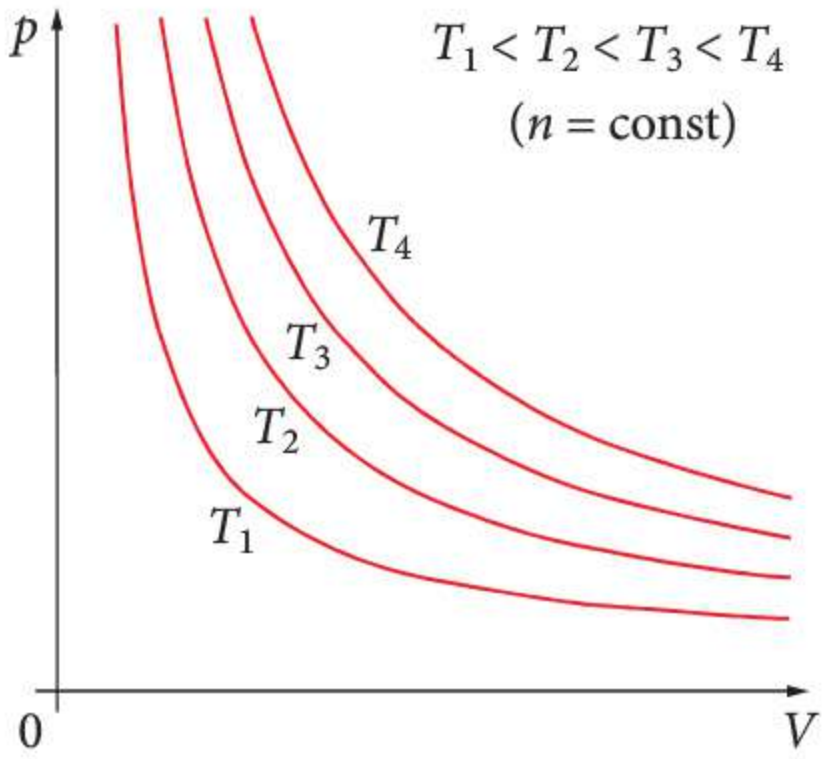
$$p = \frac{nRT}{V} \qquad \text{lub} \qquad p(V) = \frac{\text{const}}{V} \qquad \text{(prawo R. Boyle'a}^{18}\text{)} \qquad (31.1)$$

W przemianie izotermicznej gazu doskonałego ciśnienie jest odwrotnie proporcjonalne do objętości.

[17] Z łaciny *quasi* – niemal.

[18] Prawo to podał Anglik R. Boyle w roku 1662. Kilkanaście lat później ogłosił je Francuz E. Mariotte, lecz nie wiadomo, czy odkrył je niezależnie. W rzeczywistości jednak prawo to było znane już dwa lata przed opublikowaniem go przez Boyle'a (patrz: A.K. Wróblewski, *Prawda i mity w fizyce*, Iskry, Warszawa 1987).

Wartość stałej równa iloczynowi nRT jest tym większa, im wyższa jest temperatura gazu i im większa jest liczba moli gazu mieszczącego się w zbiorniku.
Na rysunku 31.1 przedstawiono kilka izoterm (tj. wykresów zależności $p(V)$ w stałej temperaturze) gazu doskonałego dla kilku różnych temperatur.



Rys. 31.1 Izotermy gazu doskonałego dla różnych temperatur

Na podstawie wzoru (29.1), wynikającego z założeń teorii kinetyczno-molekularnej gazu, możemy odpowiedzieć na pytanie, dlaczego ciśnienie gazu w stałej temperaturze maleje podczas zwiększania jego objętości. Dzieje się tak dlatego, że maleje liczba cząsteczek zawartych w jednostce objętości – średnia częstość uderzeń w ścianki naczynia jest mniejsza, maleje więc wartość siły parcia gazu na ścianki.

2. Przemiana izochoryczna

$$V = \text{const}, \; p \text{ i } T \text{ ulegają zmianie.}$$

Funkcja $p(T)$ ma postać:

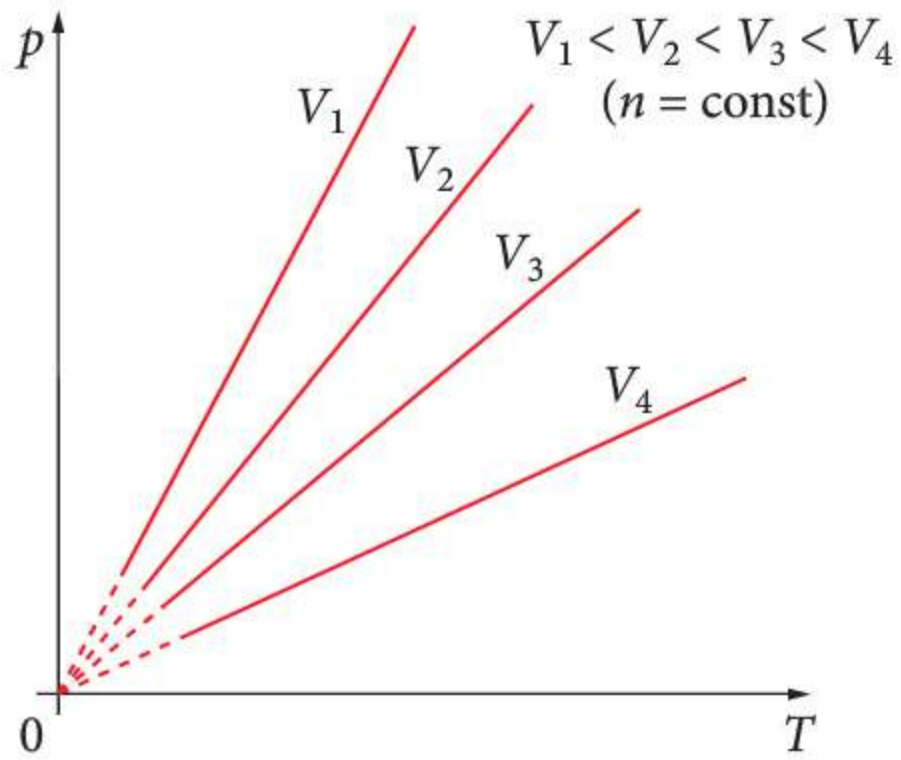
$$p = \frac{nR}{V}T \qquad \text{ale} \qquad V = \text{const}$$

więc:

$$p(T) = \text{const} \cdot T \qquad \text{(prawo J.A. Charles'a)} \tag{31.2}$$

W przemianie izochorycznej gazu doskonałego ciśnienie gazu jest wprost proporcjonalne do jego temperatury bezwzględnej T.

Stały współczynnik proporcjonalności (równy $\frac{nR}{V}$) jest tym większy, im większa jest liczba moli gazu zawartego w zbiorniku i im mniejsza jest jego objętość. Wykres funkcji $p(T)$ nazywamy izochorą.
Na rysunku 31.2 przedstawiono kilka izochor. Każdy z tych wykresów został sporządzony dla tej samej liczby moli n, ale stała objętość była za każdym razem inna.
Zwróć uwagę, że w pobliżu zera bezwzględnego izochory narysowano liniami przerywanymi. W niskiej temperaturze gazy rzeczywiste nie zachowują się jak gaz doskonały.



Rys. 31.2 Izochory gazu doskonałego dla różnych objętości

Pozostaje odpowiedzieć na pytanie, dlaczego ciśnienie gazu w stałej objętości rośnie wraz ze wzrostem jego temperatury. Przyczyną jest oczywiście wzrost średniej energii kinetycznej ruchu postępowego cząsteczek – podczas zderzeń cząsteczki o większej szybkości działają na ścianki zbiornika większą siłą.

3. Przemiana izobaryczna

$p = \text{const}$, V i T ulegają zmianie.

Funkcja $V(T)$ ma postać:

$$V = \frac{nR}{p}T \qquad \text{ale} \qquad p = \text{const}$$

więc:

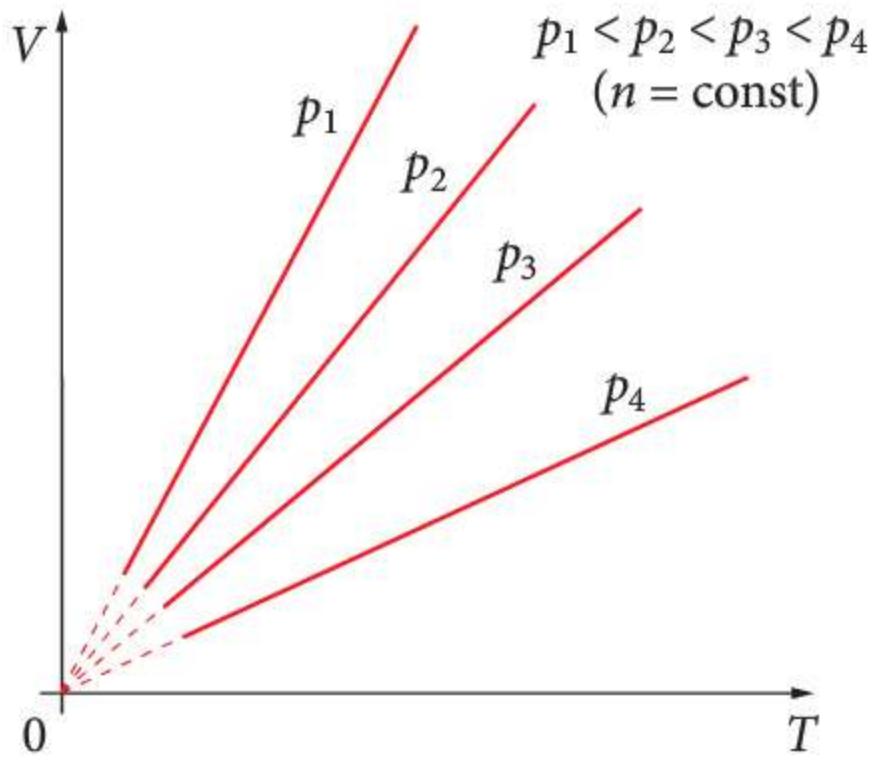
$$V(T) = \text{const} \cdot T \qquad \text{(prawo J.L. Gay-Lussaca)} \tag{31.3}$$

W przemianie izobarycznej objętość gazu doskonałego jest wprost proporcjonalna do jego temperatury bezwzględnej T.

Stały współczynnik proporcjonalności (równy $\frac{nR}{p}$) jest tym większy, im większa jest liczba moli gazu w zbiorniku i im mniejsze jest ciśnienie gazu.

Rysunek 31.3 przedstawia kilka izobar gazu. Wszystkie zostały wykreślone dla tej samej liczby moli n, ale każda dla innego ciśnienia.

Porównajmy fakt, który wynika z prawa Gay-Lussaca, ze wzorem (29.1) na ciśnienie gazu, wyprowadzonym z założeń teorii kinetyczno-molekularnej gazów. Jeśli ciśnienie gazu nie ulega zmianie, a temperatura wzrasta (czyli siła wywierana przez cząsteczki na ścianki naczynia podczas zderzeń ma coraz większą wartość), to liczba cząsteczek w jednostce objętości musi maleć, czyli objętość musi rosnąć. Wówczas częstotliwość uderzeń o ścianki maleje. Dwa czynniki wpływające na ciśnienie gazu kompensują się, w wyniku czego ciśnienie jest stałe.



Rys. 31.3 Izobary gazu doskonałego dla różnych ciśnień

Uwaga: W dalszej części podręcznika będziemy konsekwentnie stosować dwie nazwy: **rozprężanie** – wzrost objętości gazu, **ogrzewanie** – wzrost jego temperatury. Przemiana izobaryczna gazu to inaczej jego **rozszerzanie (rozprężanie) termiczne** lub kurczenie się; wraz ze wzrostem temperatury wzrasta objętość gazu (a z jej obniżaniem się objętość gazu maleje). Tutaj prawo rządzące tą przemianą zostało zapisane za pomocą temperatury bezwzględnej; można je także wyrazić poprzez temperaturę t w skali Celsjusza (patrz rozdział 41).
Wszystkie wyprowadzone prawa dotyczą gazu doskonałego. Dla gazów rzeczywistych stosują się z tym lepszym przybliżeniem, im mniejsze są ich cząsteczki, im niższe są ciśnienia i wyższe temperatury (wówczas gaz rzeczywisty lepiej spełnia założenia przyjęte dla gazu doskonałego). Hel i wodór w tych warunkach najbardziej przypominają gaz doskonały – wykazują najmniejsze odstępstwa od sformułowanych tutaj praw. Zgodność praw wydedukowanych z podstawowych praw teorii kinetyczno-molekularnej gazów z wynikami doświadczeń jest doskonałym potwierdzeniem słuszności tej teorii.

ZADANIA

1. Jeden zbiornik o objętości $V_1 = 5\,\text{dm}^3$ jest wypełniony tlenem pod ciśnieniem $p_1 = 2 \cdot 10^5\,\text{Pa}$, a drugi o objętości $V_2 = 10\,\text{dm}^3$ – azotem pod ciśnieniem $p_2 = 5 \cdot 10^5\,\text{Pa}$. Temperatury gazów są jednakowe. Oblicz ciśnienie, które będzie miała mieszanina tych gazów po połączeniu zbiorników. Zakładamy, że temperatura podczas mieszania się gazów nie ulegnie zmianie.
2. Oblicz temperaturę, w której gaz znajdujący się pod stałym ciśnieniem zajmie $2/3$ tej objętości, jaką zajmował w temperaturze 0°C, oraz temperaturę, w której ciśnienie gazu zajmującego stałą objętość wzrośnie $l = 2$ razy w stosunku do ciśnienia, jakie miał w temperaturze 0°C.
3. Wyprowadź wzór na gęstość gazu w zależności od jego temperatury i ciśnienia: $\rho\,(T, p)$. Na podstawie otrzymanego wzoru odpowiedz na poniższe pytania.
   Czy i jak zmienia się gęstość gazu podczas:
   a) izotermicznego rozprężania,
   b) izochorycznego ogrzewania,
   c) izobarycznego ochładzania?



32. Energia wewnętrzna gazu. Stopnie swobody

- Energia wewnętrzna ciała
- Energia wewnętrzna gazu doskonałego
- Stopnie swobody

Przypomnij sobie, jak określamy energię wewnętrzną ciała.

Już w klasie ósmej była mowa o tym, że energia wewnętrzna ciała (będziemy ją oznaczać literą U) to suma wszystkich rodzajów energii wszystkich cząsteczek tego ciała. Cząsteczki mają energie różnego rodzaju:

- kinetyczną, ponieważ są w nieustannym, chaotycznym ruchu (chaotyczne ruchy cząsteczek nazywamy także ruchami cieplnymi lub termicznymi);
- potencjalną, jeśli oddziałują ze sobą siłami międzycząsteczkowymi.

Do energii wewnętrznej należy zaliczyć energię kinetyczną wszystkich rodzajów ruchów cząsteczek, a więc także ruchów obrotowych. Składnikami energii wewnętrznej ciała są także: energia elektronów w atomach i energia nukleonów w jądrach atomów. Nie musimy wymieniać wszystkich składników energii wewnętrznej, bowiem w procesach termodynamicznych, którymi zajmujemy się w fizyce, tylko niektóre z tych składników ulegają zmianie. W omawianych tutaj procesach może zmieniać się tylko suma energii kinetycznych i potencjalnych cząsteczek[19].

W przypadku gazu doskonałego, którego cząsteczki nie oddziałują ze sobą (z wyjątkiem chwil, w których się zderzają), za energię wewnętrzną uważamy tylko energię kinetyczną wszystkich rodzajów ruchu cząsteczek. W rozdziale 30 został wyprowadzony wzór na średnią energię kinetyczną ruchu postępowego cząsteczek gazu doskonałego:

$$\frac{m\overline{v^2}}{2} = \frac{3}{2}kT \qquad (32.1)$$

Jednoatomowe cząsteczki gazu o bardzo małych rozmiarach mają jedynie energię ruchu postępowego. Wzór (32.1) można napisać w postaci:

$$\frac{m}{2}\left(\overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}\right) = \frac{3}{2}kT$$

[19] W skład energii wewnętrznej nie wchodzą oczywiście energia kinetyczna i energia potencjalna (np. grawitacyjna) ciała jako całości. Dlatego gdy mówimy o energii kinetycznej cząsteczek, która jest jednym ze składników energii wewnętrznej, myślimy wyłącznie o tej energii, którą mają one w układzie środka masy ciała (w przypadku gazów – w układzie odniesienia związanym ze ściankami zbiornika).

gdzie $\overline{v_x^2}$, $\overline{v_y^2}$, $\overline{v_z^2}$ są średnimi kwadratami współrzędnych wektora prędkości cząsteczek w trójwymiarowym kartezjańskim układzie współrzędnych.
Wszystkie kierunki ruchu (x, y, z) są równouprawnione, zatem:

$$\frac{m\overline{v_x^2}}{2} = \frac{m\overline{v_y^2}}{2} = \frac{m\overline{v_z^2}}{2} = \frac{1}{2}kT \tag{32.2}$$

Najmniejsza liczba współrzędnych, którą należy podać, aby określić położenie ciała w przestrzeni, nosi nazwę **liczby stopni swobody *i***. Jednoatomowa cząsteczka gazu poruszająca się w przestrzeni swobodnie (bez żadnych ograniczeń) ma 3 stopnie swobody (współrzędne x, y, z).
Wzór (32.2) wyraża tzw. **zasadę ekwipartycji energii**[20], czyli równego podziału energii pomiędzy stopnie swobody: na każdy stopień swobody przypada taka sama średnia energia kinetyczna $\frac{1}{2}kT$.

Dwuatomowej cząsteczki gazu (np. H_2, O_2, N_2) nie można uważać za punkt materialny, lecz za układ dwóch sztywno związanych atomów znajdujących się we wzajemnej odległości d. Aby określić położenie dwuatomowej cząsteczki w przestrzeni, należy – prócz współrzędnych x_0, y_0, z_0 jej środka masy – podać dodatkowo jeszcze dwie współrzędne, np. x_1, y_1 jednego z atomów (przy znanej odległości atomów d trzecia współrzędna nie jest potrzebna), lub dwa kąty, jakie odcinek o długości d tworzy z wybranymi płaszczyznami. Dwuatomowa cząsteczka gazu ma więc 5 stopni swobody. Ze względu na swoją budowę może ona wykonywać obroty. Jej energia kinetyczna składa się z energii kinetycznej ruchu postępowego (której średnia wartość jest związana – jak wiadomo – z temperaturą gazu) i energii kinetycznej ruchu obrotowego.
Możemy więc stwierdzić, że dla gazu o cząsteczkach dwuatomowych całkowita średnia energia kinetyczna jednej cząsteczki wynosi $\frac{5}{2}kT$.

Zasadę ekwipartycji energii stosujemy także dla liczby stopni swobody większej od 5. Innymi słowy, cząsteczka mająca *i* stopni swobody posiada całkowitą energię kinetyczną:

$$\bar{E}_\mathrm{k} = \frac{i}{2}kT$$

z czego zawsze $\frac{3}{2}kT$ to średnia energia kinetyczna ruchu postępowego.

Wieloatomową (3 i więcej atomów w cząsteczce) cząsteczkę gazu należy traktować w przybliżeniu jako układ sztywny o 6 stopniach swobody. Aby określić położenie takiego układu w przestrzeni, trzeba podać 6 współrzędnych.

[20] Z łaciny *aequus* – równy, *pars* – część.

Zgodnie z zasadą ekwipartycji energii energia wewnętrzna gazu doskonałego zawartego w zamkniętym zbiorniku wynosi:

$$U = N \cdot \frac{ik}{2} T$$

a zmiana energii wewnętrznej tego gazu to:

$$\Delta U = \frac{Nik}{2} \Delta T \qquad (32.3)$$

Z tych wzorów wynika, że:

Zmiana energii wewnętrznej gazu doskonałego o określonej i stałej masie (a więc także o stałej liczbie cząsteczek) jest jednoznacznie związana ze zmianą temperatury gazu.

Powyższy wniosek to podstawowy fakt we wszystkich rozważaniach na temat przemian (procesów) termodynamicznych gazu doskonałego. Wzrost temperatury gazu oznacza wzrost jego energii wewnętrznej, z kolei spadek temperatury – zmniejszanie się tej energii. W procesach izotermicznych gazu doskonałego $U = \text{const}$ (bo $T = \text{const}$).

Odmiennie przedstawia się sprawa w przypadku gazów rzeczywistych oraz ciał stałych i cieczy, w których suma energii potencjalnych wzajemnego oddziaływania cząsteczek jest niezerowym składnikiem energii wewnętrznej. Zmiana energii wewnętrznej tych ciał nie wiąże się w tak prosty sposób ze zmianą ich temperatury. W szczególności charakterystyczne są dla tych ciał zjawiska, w których temperatura jest stała, a energia wewnętrzna zmienia się głównie poprzez zmianę energii potencjalnej cząsteczek. O takich przypadkach będzie mowa w dalszych rozdziałach tego podręcznika.

ZADANIA

1. Potraktuj azot i hel jako gazy doskonałe.
   a) Oblicz zmianę energii wewnętrznej 1 mola azotu przy wzroście jego temperatury o $\Delta T = 200\ \text{K}$. Ile wynosiłaby w tych warunkach zmiana energii wewnętrznej 1 mola helu?
   b) Oblicz, o ile wzrośnie wówczas średnia energia kinetyczna jednej cząsteczki azotu, a o ile – jednej cząsteczki helu.
   c) Oblicz, o ile wzrośnie średnia energia kinetyczna ruchu postępowego cząsteczki każdego z tych gazów.

2. Na podstawie wzoru (32.3) i równania Clapeyrona wyprowadź związek między zmianą energii wewnętrznej gazu doskonałego a zmianą:
   a) objętości gazu przy stałym ciśnieniu,
   b) ciśnienia gazu przy stałej objętości.



33. Pierwsza zasada termodynamiki

- Wymiana ciepła między ciałem (układem) a otoczeniem
- Wykonywanie pracy
- Pierwsza zasada termodynamiki
- Wzór na pracę objętościową siły zewnętrznej

Przypomnij sobie, jak można zmienić energię wewnętrzną ciała.

W życiu codziennym obserwujemy przypadki rozgrzewania się ciał wskutek hamowania. Pytamy na przykład, co się stało z energią kinetyczną hamującego samochodu. Obserwujemy wzrost temperatury hamulców. Świadczy to o wzroście ich energii wewnętrznej. Spadający z pewnej wysokości młot kowalski uderza w metalową podkowę, przy czym temperatura zarówno podkowy, jak i młota wzrasta. W tych przypadkach energia wewnętrzna ciał wzrasta kosztem energii mechanicznej. Kiedy wiercimy otwory wiertarką elektryczną, co chwilę musimy tę czynność przerywać, aby wiertło zbytnio się nie rozgrzało (rys. 33.1). Podczas pompowania dętki rowerowej temperatura powietrza w pompce wzrasta wskutek wykonania nad nim pracy. Powyższe przykłady świadczą o tym, że przez wykonywanie pracy mechanicznej możemy zwiększyć energię wewnętrzną ciał, co objawia się wzrostem ich temperatury.

Nie jest to jedyny sposób dokonywania zmiany energii wewnętrznej. Może ona ulegać zmianie np. przez zetknięcie ciała z drugim ciałem o innej temperaturze. Po pewnym czasie temperatury ciał się wyrównają. Proces przekazywania energii z jednego ciała do drugiego – spowodowany różnicą temperatur – nie jest związany z wykonywaniem pracy. Ściśle mówiąc, nie jest wówczas wykonywana **praca makroskopowa**. Cząsteczki obu ciał się jednak zderzają, a gdy cząsteczka o większej prędkości zderza się z cząsteczką poruszającą się wolniej, to powoduje zmianę jej prędkości – wykonuje pracę.





Rys. 33.1 Wzrost temperatury układu podczas wykonywania pracy mechanicznej

Prace wykonane przez poszczególne cząsteczki są tzw. **pracami mikroskopowymi**. Jeśli przekazywanie energii następuje w taki sposób, mówimy, że **ciału jest dostarczane ciepło**. „Ciepło" jest nazwą historyczną. Dawniej fizycy uważali, że ciała zawierają fluid zwany cieplikiem, który przy zetknięciu ciał o różnych temperaturach przepływa z ciała o wyższej do ciała o niższej temperaturze. Obecnie wiemy, że taki fluid nie istnieje, a między ciałami zachodzi przekaz energii. Jednak nazwa „ciepło" dla tej części energii wewnętrznej, która jest przekazywana, pozostała.
Proces przekazywania energii odbywa się dopóty, dopóki średnie energie kinetyczne ruchu postępowego cząsteczek się nie wyrównają, co – by ująć rzecz makroskopowo – oznacza wyrównanie się temperatur tych ciał.
Z powyższych rozważań wynika, że zmiana energii wewnętrznej ciała może zachodzić przez wykonanie pracy lub na skutek przekazania ciepła albo przez jedno i drugie. O sposobach zmiany energii wewnętrznej mówi **pierwsza zasada termodynamiki**.

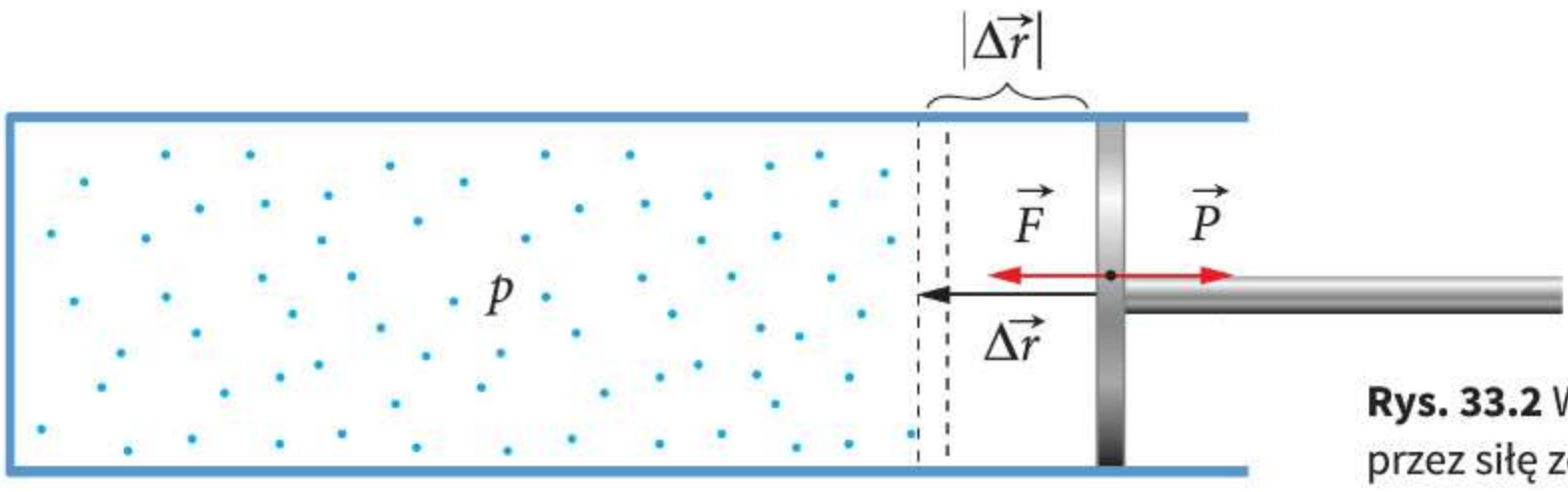
Zmiana energii wewnętrznej ciała jest równa sumie ciepła wymienionego z otoczeniem i pracy wykonanej nad ciałem przez siłę zewnętrzną.

$$\Delta U = Q + W \tag{33.1}$$

U – energia wewnętrzna (ΔU – jej zmiana)
Q – ciepło wymienione między ciałem a otoczeniem
W – praca wykonana nad ciałem przez siłę zewnętrzną

Zwróć uwagę, że **pierwsza zasada termodynamiki jest zasadą zachowania energii układu**, obejmującą także jego energię wewnętrzną.

Prawa strona wzoru (33.1) jest sumą algebraiczną, zarówno bowiem W, jak i Q może mieć znak dodatni lub ujemny. Zajmiemy się bliżej tymi wielkościami.
Ciepło Q ma znak dodatni, gdy ciało, którego zmianę energii obliczamy, pobiera to ciepło. Natomiast gdy ciało oddaje ciepło, Q ma znak ujemny.
Praca W to praca **siły zewnętrznej** wykonana nad ciałem lub układem, dla którego obliczamy zmianę energii wewnętrznej (nie chodzi tu o pracę zmieniającą energię mechaniczną układu jako całości). W przypadku gazu (ale nie tylko) jest to tzw. **praca objętościowa**, jaką wykonuje siła zewnętrzna podczas zmiany jego objętości.
Wyprowadzimy wzór na pracę tej siły. Rysunek 33.2 przedstawia cylinder z gazem, którego ciśnienie wynosi p.



Rys. 33.2 Wykonywanie pracy przez siłę zewnętrzną

Wciskamy tłok, działając siłą zewnętrzną $\vec{F}$, aby w ruchu jednostajnym zrównoważyć siłę parcia gazu o wartości $P = pS$ (S – powierzchnia tłoka stykająca się z gazem). Zakładamy, że przesunięcie tłoka jest niewielkie, aby podczas zmiany objętości gazu jego ciśnienie można było uważać za stałe. **Praca wykonana przez siłę zewnętrzną** jest równa:

$$W = |\vec{F}| \cdot |\Delta\vec{r}| = pS|\Delta\vec{r}| = p|\Delta V|$$

Oczywiście obliczana tutaj praca jest dodatnia, bo zwroty siły zewnętrznej i przemieszczenia są zgodne. Jednak przy wsuwaniu tłoka $\Delta V < 0$, więc $|\Delta V| = -\Delta V$. Ostatecznie:

$$W = -p\Delta V \qquad (33.2)$$

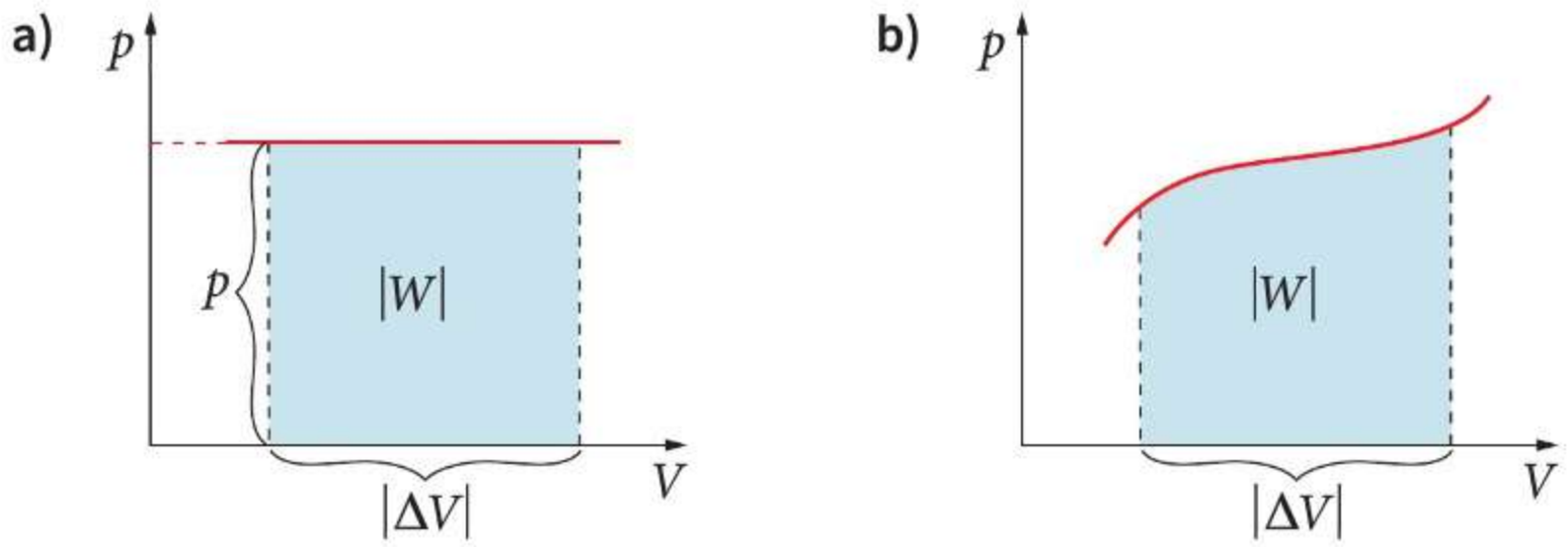
Gdy tłok będzie wypychany z cylindra, to $\Delta V > 0$, ale siła zewnętrzna wykonuje wtedy pracę ujemną, ponieważ jest zwrócona przeciwnie do wektora przemieszczenia (siła zewnętrzna $\vec{F}$ też będzie wówczas zwrócona w lewo, gdyż musi równoważyć siłę parcia gazu). Wobec tego wyprowadzony wzór na pracę siły zewnętrznej jest słuszny w każdym z tych przypadków. Jest sprawą oczywistą, że gdy siła zewnętrzna wykonuje pracę dodatnią, to gaz wykonuje pracę ujemną – i odwrotnie. **Praca siły zewnętrznej różni się od pracy gazu tylko znakiem**, ponieważ siła zewnętrzna i siła parcia gazu są wektorami przeciwnymi. Pracę gazu można więc (gdy p = const) obliczyć ze wzoru:

$$W_{\text{gazu}} = p\Delta V$$

(przypominamy, że $\Delta V = V_{\text{końcowa}} - V_{\text{początkowa}}$).

	Znak +	Znak –
Q	Gdy ciało pobiera ciepło.	Gdy ciało oddaje ciepło.
W	Gdy siła zewnętrzna jest zgodna z przemieszczeniem tłoka.	Gdy siła zewnętrzna jest przeciwna do przemieszczenia tłoka.
	Praca siły zewnętrznej różni się od pracy gazu tylko znakiem, ponieważ siła zewnętrzna i siła parcia gazu są wektorami przeciwnymi.	

Wzór (33.2) stosuje się tylko przy tak małych zmianach objętości, dla których ciśnienie może być uważane za stałe. Jedynie w przypadku procesu izobarycznego wzór można wykorzystać przy dowolnie dużych zmianach objętości. Łatwo zauważyć, że w przypadku przemiany izobarycznej gazu doskonałego figura pod wykresem zależności $p(V)$ ma kształt prostokąta ograniczonego objętościami: początkową i końcową (rys. 33.3a). Miarą wartości bezwzględnej wykonanej pracy $|W| = p|\Delta V|$ jest pole tego prostokąta. Nietrudno udowodnić (patrz zadanie 1 na s. 207), że w dowolnej przemianie gazu wartość bezwzględną pracy objętościowej obliczamy również jako pole powierzchni figury zawartej pod wykresem $p(V)$ dla tej przemiany (rys. 33.3b).

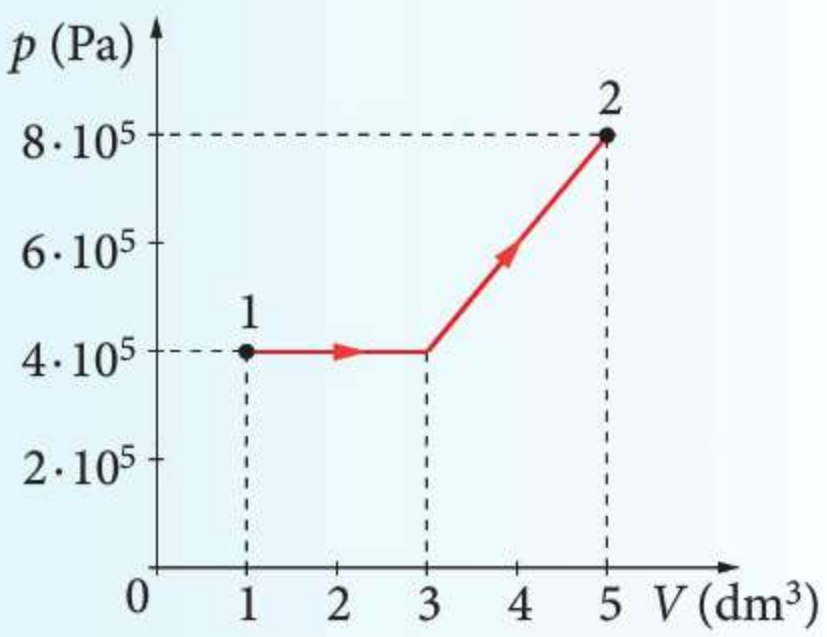


Rys. 33.3 Praca objętościowa: w przemianie izobarycznej (a), w dowolnej przemianie gazu (b)

Mamy zatem łatwy sposób obliczania pracy wykonanej nad gazem (lub przez gaz) w takich przemianach, w których ciśnienie się zmienia, a pole figury umiemy obliczyć z któregoś ze znanych wzorów.
Przykład 33.1 pokazuje, jak obliczyć pracę siły zewnętrznej na podstawie wykresu $p(V)$.

Przykład 33.1
Praca siły zewnętrznej

Obliczymy pracę wykonaną przez siłę zewnętrzną przy przejściu gazu ze stanu 1 do stanu 2 – skorzystamy z wykresu $p(V)$ na rysunku 33.4.



Rys. 33.4

$$|W| = 4 \cdot 10^5\,\text{Pa} \cdot 2 \cdot 10^{-3}\,\text{m}^3 + \frac{1}{2}(4 \cdot 10^5 + 8 \cdot 10^5)\,\text{Pa} \cdot 2 \cdot 10^{-3}\,\text{m}^3 =$$

$$= 8 \cdot 10^2\,\text{J} + 12 \cdot 10^2\,\text{J} = 2 \cdot 10^3\,\text{J} = 2\,\text{kJ}$$

Objętość gazu wzrasta, więc gaz wykonuje pracę dodatnią ($W_{\text{gazu}} = 2\,\text{kJ}$), a siła zewnętrzna – ujemną:

$$W = -2\,\text{kJ}$$

Pamiętaj, że każdy punkt wykresu przedstawia stan równowagi, proces nie może więc odbywać się burzliwie (jest kwazistatyczny). Siła zewnętrzna w każdej chwili musi równoważyć siłę parcia gazu, więc np. na tłok w cylindrze działa stale siła zewnętrzna o przeciwnym zwrocie.

Praca wykonana w różnych procesach – przeprowadzających układ między dwoma stanami – jest na ogół różna. Gdybyśmy w przypadku przedstawionym na rysunku 33.4 przeprowadzili układ od stanu 1 do stanu 2 wzdłuż jednego odcinka prostej, to praca

byłaby inna. Praca jest więc **funkcją procesu fizycznego**, w którym charakteryzujące układ parametry (wszystkie lub tylko niektóre z nich) ulegają zmianie.

Wykonanie nad ciałem pracy nie jest jedynym sposobem zmiany jego energii wewnętrznej. Jeśli ścianki cylindra zawierającego gaz będą wykonane z bardzo dobrego izolatora (tzw. ścianki adiabatyczne), to podczas ruchu tłoka energia wewnętrzna gazu zmieni się tylko o tyle, ile pracy wykonała siła zewnętrzna. Możemy zmienić ścianki adiabatyczne na doskonale przewodzące i zanurzyć cylinder z gazem w zimnej lub gorącej wodzie. Aby się upewnić, że nie zostanie wykonana praca, mocujemy tłok i uniemożliwiamy mu przesuwanie się ($V = \text{const}$). W tych warunkach zachodzi **przekaz energii** między gazem a wodą, w wyniku którego energia wewnętrzna gazu może maleć lub wzrastać bez wykonywania pracy. Taką zmianę energii wewnętrznej nazywamy **ilością ciepła** wymienionego między dwoma ciałami (układami) lub krótko: **ciepłem**.

$$Q = \Delta U \qquad \text{gdy} \qquad W = 0$$

Jeśli woda ma wyższą temperaturę niż zanurzony w niej cylinder z gazem, a ścianki przewodzą ciepło, to ciepło jest przekazywane przez wodę gazowi, energia wewnętrzna wody maleje ($\Delta U < 0$), a gazu rośnie o taką samą wartość ($\Delta U > 0$).

Ciepło jest również zależne od rodzaju procesu fizycznego, podczas którego dochodzi do jego wymiany; mówimy, że ciepło (podobnie jak praca) **jest funkcją procesu**. Można więc mówić o cieple **wymienianym** między ciałami w danym procesie fizycznym, ale nigdy o cieple, które ma ciało w danym stanie. Na następnych stronach wielokrotnie będziemy wracać do tego zagadnienia.

ZADANIA

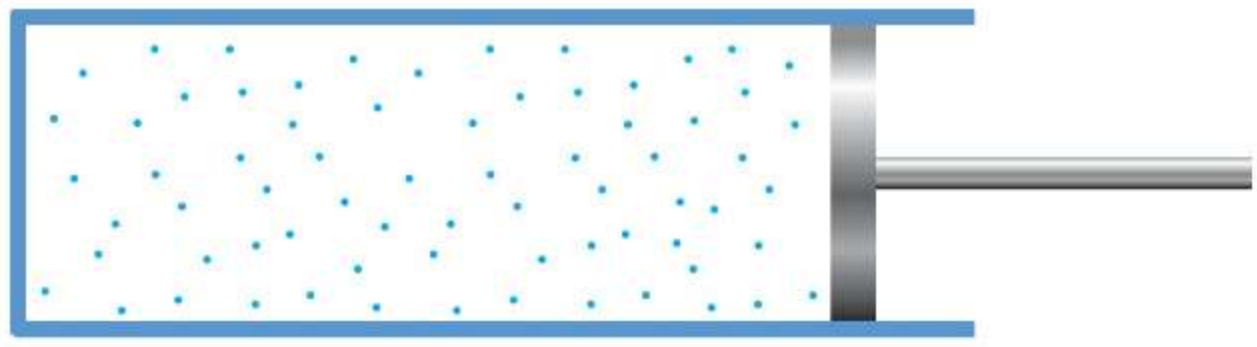
1. W podręczniku dla klasy pierwszej (s. 33) przeprowadziliśmy rozumowanie prowadzące do wniosku, że droga w każdym ruchu jest równa polu figury zawartej pod wykresem funkcji $v_x(t)$. W podobny sposób można wykazać, że wartość bezwzględna pracy wykonanej podczas przemiany gazowej, w której funkcja $p(V)$ ma dowolny przebieg, jest równa polu figury pod wykresem tej funkcji. Opisz takie rozumowanie.

2. Wylot strzykawki z luźno poruszającym się tłokiem zatkano kawałkiem plasteliny, po czym strzykawkę zanurzono w ciepłej wodzie (rys. 33.5). Czy przyrost energii wewnętrznej powietrza w strzykawce jest równy pobranemu ciepłu? Uzasadnij odpowiedź.



Rys. 33.5

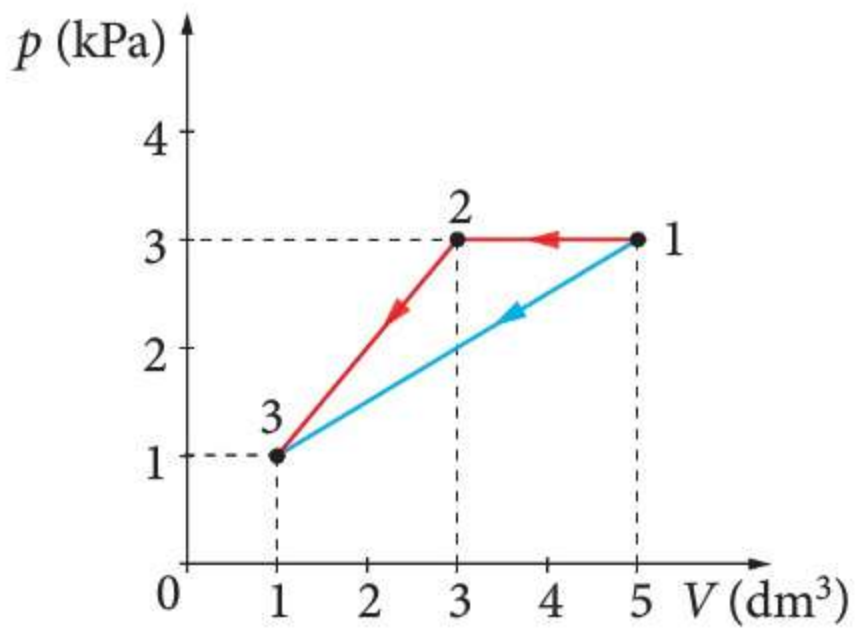
3. W cylindrycznym naczyniu z tłokiem (rys. 33.6) znajduje się gaz.



Rys. 33.6

Oblicz pracę wykonaną przez siłę zewnętrzną przy wysuwaniu tłoka, jeśli równocześnie do układu dostarczono 10^3 J ciepła, a ubytek energii wewnętrznej gazu wyniósł 10^5 J. Jaką pracę wykonał gaz?

4. Gaz doskonały przechodzi od stanu 1 przez stan 2 do stanu 3, jak pokazano na wykresie zależności $p(V)$.



Rys. 33.7

a) Oblicz łączną pracę siły zewnętrznej wykonaną podczas tych procesów.
b) Oblicz pracę siły zewnętrznej wykonaną podczas bezpośredniego przejścia gazu ze stanu 1 do 3, jak pokazano na wykresie.
c) Odpowiedz na pytanie: *Jak zmieniła się energia wewnętrzna gazu podczas przejścia od stanu 1 do 2 i od stanu 2 do 3?* W uzasadnieniu odpowiedzi powołaj się na prawa gazów.



34. Szczególne przemiany gazu doskonałego a pierwsza zasada termodynamiki

- Przemiany: izotermiczna, izochoryczna, izobaryczna, adiabatyczna

Przypomnij sobie prawa rządzące szczególnymi przemianami gazu doskonałego.

Dogłębne rozumienie procesów termodynamicznych polega m.in. na umiejętności rozstrzygania, czy w danej przemianie gazu jest wykonywana praca objętościowa, czy jest wymieniane ciepło między gazem a otoczeniem oraz czy (i jak) zmienia się energia wewnętrzna gazu.

Przemiana izotermiczna

Ze stałości temperatury wynika stałość energii wewnętrznej.

$$T = \text{const} \quad \Leftrightarrow \quad U = \text{const}$$

Oznacza to, że $Q + W = 0$, tzn. że znaki ciepła i pracy siły zewnętrznej są przeciwne, a wartości bezwzględne tych wielkości są jednakowe. Mogą zajść dwa przypadki:

- Rozprężanie izotermiczne: V wzrasta, zatem $\Delta V > 0$, z czego wynika, że $W < 0$, więc $Q > 0$. Oznacza to, że podczas izotermicznego rozprężania gaz pobiera z otoczenia tyle ciepła, ile wykonuje pracy.
- Sprężanie izotermiczne: V maleje, zatem $\Delta V < 0$, a $W > 0$, więc $Q < 0$. Oznacza to, że podczas izotermicznego sprężania siła zewnętrzna wykonuje pracę dodatnią i cała ta praca jest zużyta na ciepło oddane otoczeniu.

Zwróć uwagę na fakt, że oddawanie ciepła otoczeniu nie zawsze jest związane z obniżaniem się temperatury ciała, a pobieranie ciepła – z jej wzrostem.

Przemiana izochoryczna

Ze stałości objętości ($\Delta V = 0$) wynika, że $W = 0$, zatem $\Delta U = Q$. Zauważ, że w tym przypadku (w przeciwieństwie do przemiany izotermicznej!) wymiana ciepła z otoczeniem wiąże się ze zmianą temperatury gazu. Mogą zajść dwa przypadki:

- Gaz pobiera ciepło z otoczenia, czyli $Q > 0$, wówczas oczywiście $\Delta U > 0$, a więc temperatura gazu wzrasta. Oznacza to, że energia wewnętrzna gazu wzrasta kosztem pobranego ciepła.
- Gaz oddaje ciepło chłodniejszemu otoczeniu (patrz zadanie 1 na s. 211).

Przemiana izobaryczna

W tym przypadku żadna z wielkości występujących w pierwszej zasadzie termodynamiki (ΔU, Q, W) nie jest równa zeru. Aby ustalić, jakie są znaki ciepła, pracy i zmiany energii wewnętrznej w tym procesie, będziemy musieli dodatkowo powołać się na prawo nim rządzące, z którego wynika, że:

$$\frac{\Delta V}{\Delta T} > 0$$

Mogą zajść dwa przypadki:

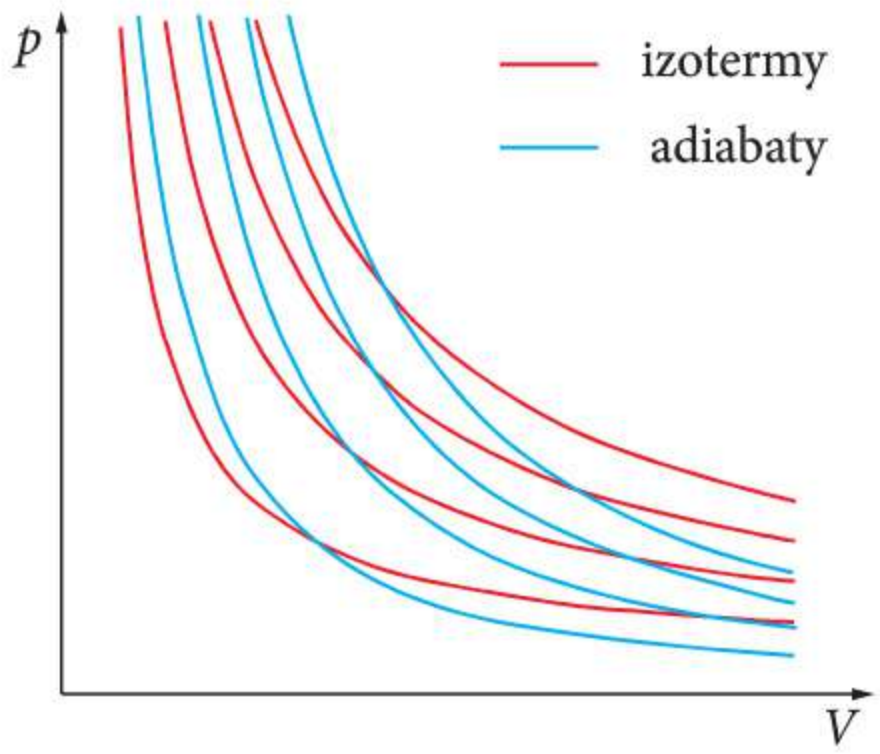
- Izobaryczne ogrzewanie: temperatura gazu rośnie, rośnie więc jego energia wewnętrzna ($\Delta U > 0$). Z drugiej strony (prawo Gay-Lussaca) objętość także rośnie ($\Delta V > 0$), więc praca siły zewnętrznej jest ujemna ($W < 0$). Aby mimo ujemnej pracy energia wewnętrzna gazu rosła, gaz musi pobrać z otoczenia wystarczająco dużo ciepła: $Q > |W|$. Można więc powiedzieć, że część ciepła pobranego z otoczenia zostaje zużyta na wykonaną przez gaz pracę, a reszta – na wzrost jego energii wewnętrznej.
- Izobaryczne oziębianie (patrz zadanie 2 na s. 211).

Przemiana adiabatyczna

Tak nazywamy przemianę, podczas której nie występuje wymiana ciepła[21] między gazem a otoczeniem: $Q = 0$, więc $\Delta U = W$.

Zastosuj samodzielnie pierwszą zasadę termodynamiki dla dwóch przypadków: rozprężania i sprężania adiabatycznego. Sformułuj odpowiednie wnioski.

Z punktu widzenia równania Clapeyrona jest to jedna z przemian, w której wszystkie parametry charakteryzujące stan fizyczny gazu (p, V, T) ulegają zmianie. Taką przemianę nazywamy przemianą ogólną. Na przykład podczas adiabatycznego sprężania objętość maleje, a temperatura rośnie, zatem aby iloraz $\frac{pV}{T}$ pozostawał stały, **ciśnienie musi dość gwałtownie rosnąć**. Wzrost ciśnienia jest bardziej gwałtowny niż podczas sprężania izotermicznego, w którym ciśnienie rośnie tylko tyle razy, ile razy objętość maleje. Wynika z tego, że wykres zależności $p(V)$ dla przemiany adiabatycznej przebiega bardziej stromo od izotermy (rys. 34.1).



Rys. 34.1 Adiabaty i izotermy gazu doskonałego

[21] Z greckiego *adiabatos* – nie do przejścia.

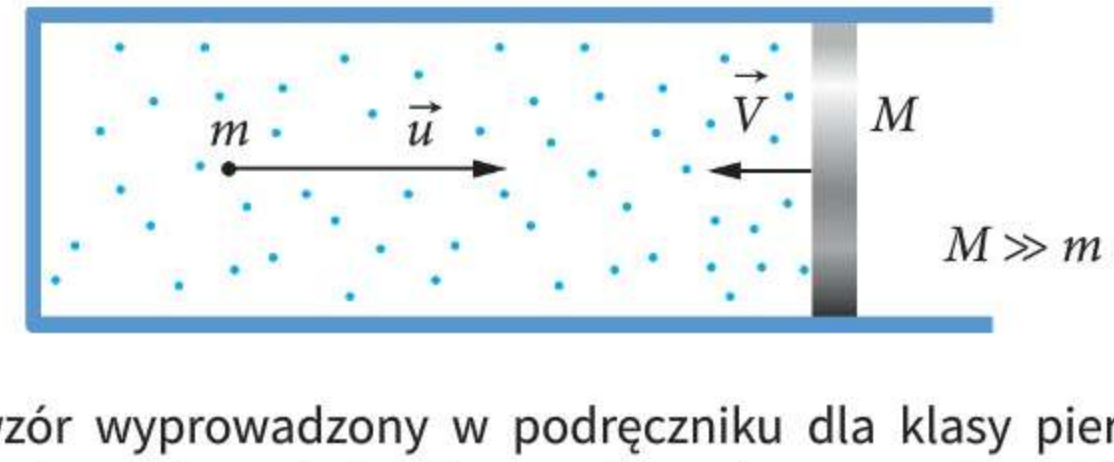
Na podstawie kinetyczno-molekularnej teorii gazów można łatwo wyjaśnić, dlaczego w przemianie adiabatycznej podczas sprężania ciśnienie rośnie gwałtowniej niż w przemianie izotermicznej. W pierwszej rośnie zarówno liczba cząsteczek gazu w jednostce objętości, jak i średnia energia kinetyczna ich ruchu postępowego, podczas gdy w drugiej wzrasta tylko jeden czynnik – liczba cząsteczek w jednostce objętości.

W przemianie izotermicznej wykonana nad gazem praca nie powoduje wzrostu jego energii wewnętrznej, tak więc ciepło musi być oddawane otoczeniu na bieżąco. Jednak przekazywanie ciepła to proces, który – jak wiadomo – polega na wymianie energii przez zderzające się cząsteczki ciał o różnych temperaturach. Ruch tłoka musi być zatem odpowiednio powolny. Szybki ruch tłoka (np. tak szybki jak podczas sprężania mieszanki w silniku spalinowym) to zawsze proces adiabatyczny, nawet wówczas, gdyby ścianki cylindra doskonale przewodziły, bowiem cząsteczki nie zdążą wymienić energii poprzez zderzenia z cząsteczkami otoczenia o innej temperaturze.

Procesem adiabatycznym jest również wyrzut pary podczas gotowania w szybkowarze (patrz fotografia na s. 209). Szybkość pary jest tak duża, że para rozpręża się bardzo gwałtownie – bez wymiany ciepła z otoczeniem.

ZADANIA

1. Zastosuj pierwszą zasadę termodynamiki do izochorycznego oziębiania gazu doskonałego, tzn. przeprowadź rozumowanie podobne do tego, jakie zostało przeprowadzone na s. 209 w przypadku izochorycznego ogrzewania.
2. Zastosuj pierwszą zasadę termodynamiki do przemiany izobarycznej gazu doskonałego, w której gaz oddaje ciepło otoczeniu (patrz s. 210).
3. Rozważ mikroskopowy model adiabatycznego sprężania gazu zawartego w cylindrze zamkniętym tłokiem. W tym modelu cząsteczkę gazu przedstawia kulka o masie m poruszająca się z prędkością $\vec{u}$ zwróconą zgodnie ze zwrotem osi x (rys. 34.2), która zderza się sprężyście ze ścianą o bardzo dużej masie $M \gg m$ (ruchomy tłok). Ściana porusza się z prędkością $\vec{V}$, zwróconą przeciwnie do zwrotu osi x.



Rys. 34.2

a) Zastosuj wzór wyprowadzony w podręczniku dla klasy pierwszej w rozdziale o zderzeniach sprężystych i oblicz współrzędną v_x prędkości kulki po odbiciu od ściany oraz wartość tej prędkości.
b) Sformułuj wniosek uzasadniający wzrost temperatury gazu podczas adiabatycznego sprężania.



35. Ciepło właściwe i ciepło molowe

- Ciepło właściwe i ciepło molowe substancji
- Ciepło molowe gazu pod stałym ciśnieniem (C_p) i w stałej objętości (C_V)
- Związek między ciepłami molowymi C_p i C_V

Przypomnij sobie, co nazywamy ciepłem właściwym substancji i o czym ta wielkość nas informuje.

Z dotychczasowej nauki wiesz, że jeśli wymianie ciepła między ciałem a otoczeniem towarzyszy zmiana temperatury ciała (w poprzednim rozdziale zwrócono uwagę, że nie zawsze tak jest – patrz przemiana izotermiczna gazu), to ilość ciepła pobranego lub oddanego przez dane ciało można obliczyć ze wzoru:

$$Q = cm\Delta T$$

gdzie m oznacza masę ciała, a c – **ciepło właściwe** substancji w przedziale temperatur $(T, T + \Delta T)$; iloczyn cm nosi nazwę **pojemności cieplnej** ciała.
W przypadku gazów ciepło właściwe nie jest wielkością charakteryzującą jedynie rodzaj gazu (tak jak w przypadku ciał stałych i cieczy), lecz **zależy** także **od procesu**, podczas którego ciepło jest wymieniane między gazem a otoczeniem. Będziemy się zajmować tylko takimi procesami, w trakcie których ciepło właściwe nie ulega zmianie (jest wielkością stałą).

Jak już stwierdzono na s. 209–210, podczas przemian izochorycznej i izobarycznej gaz pobiera lub oddaje ciepło i jego temperatura się zmienia. Aby obliczyć te ilości ciepła, musimy znać ciepło właściwe gazu w stałej objętości (c_V) i pod stałym ciśnieniem (c_p). Częściej zamiast ciepła właściwego substancji stosuje się **ciepło molowe**. Wówczas:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{dla } V = \text{const} & Q_V = C_V n\Delta T \\ \text{dla } p = \text{const} & Q_p = C_p n\Delta T \end{array}\right\} \qquad (35.1)$$

gdzie C_V i C_p to ciepła molowe gazu w tych warunkach (patrz zadanie 1 na s. 214).
Po zastosowaniu związku $m = nM$ otrzymamy związki między ciepłami molowymi i ciepłami właściwymi gazu.

$$C_V n\Delta T = c_V m\Delta T$$

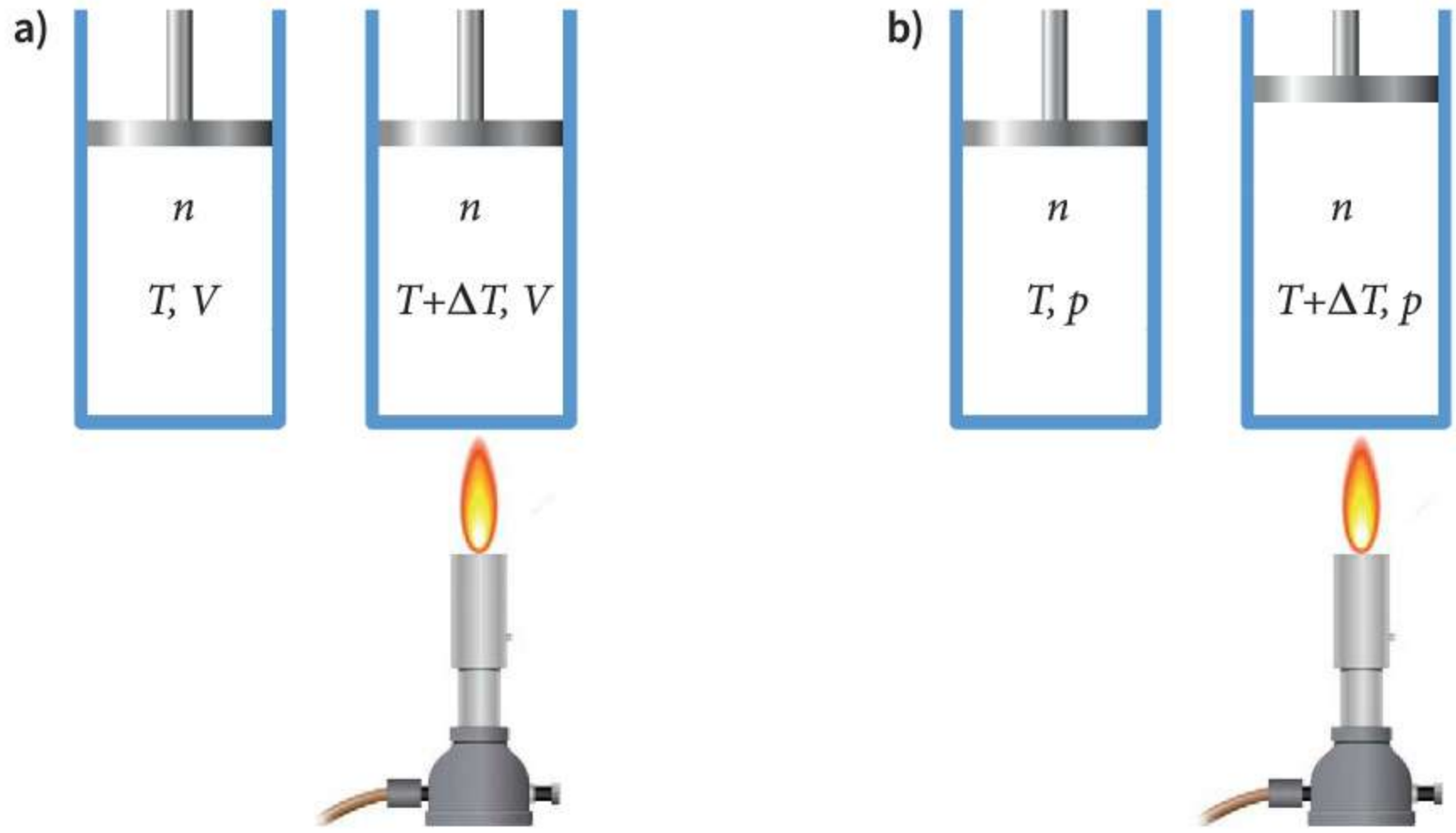
więc:

$$C_V = Mc_V \qquad \text{i podobnie} \qquad C_p = Mc_p$$

Między C_V i C_p gazu istnieje prosty związek:

$$C_p - C_V = R \qquad \text{i odpowiednio} \qquad c_p - c_V = \frac{R}{M} \tag{35.2}$$

Wyprowadzimy ten związek.
Załóżmy, że w każdym z dwóch naczyń (pod tłokiem) znajduje się n moli gazu o temperaturze T. Gaz zawarty w każdym naczyniu ogrzewamy o ΔT, w pierwszym – izochorycznie (rys. 35.1a), a w drugim – izobarycznie (rys. 35.1b).



Rys. 35.1 Zwiększanie energii wewnętrznej gazu: w stałej objętości (a), przy stałym ciśnieniu (b)

Ilości ciepła, które trzeba dostarczyć w tych przypadkach, wynoszą:

$$Q_V = C_V n \Delta T \qquad\qquad Q_p = C_p n \Delta T$$

Z pierwszej zasady termodynamiki wynika, że:

$$Q_V = \Delta U \quad (W = 0) \qquad\qquad Q_p = \Delta U - W = \Delta U + p\Delta V$$

W obu przypadkach następuje taki sam przyrost energii wewnętrznej ΔU, ponieważ przyrosty temperatury i liczby moli gazu są jednakowe. Z powyższych wzorów wynika, że:

$$Q_p = Q_V + p\Delta V$$

Z ostatniego wzoru można wysnuć wniosek, że w przemianie izobarycznej gaz pobiera więcej ciepła niż w izochorycznej, musi ono bowiem pokryć zapotrzebowanie nie tylko na wzrost energii wewnętrznej, lecz także na wykonaną przez gaz pracę przy zwiększaniu objętości. Iloczyn $p\Delta V$ obliczamy z równania Clapeyrona (dla p = const):

$$p\Delta V = nR\Delta T$$

zatem:

$$Q_p = Q_V + nR\Delta T$$

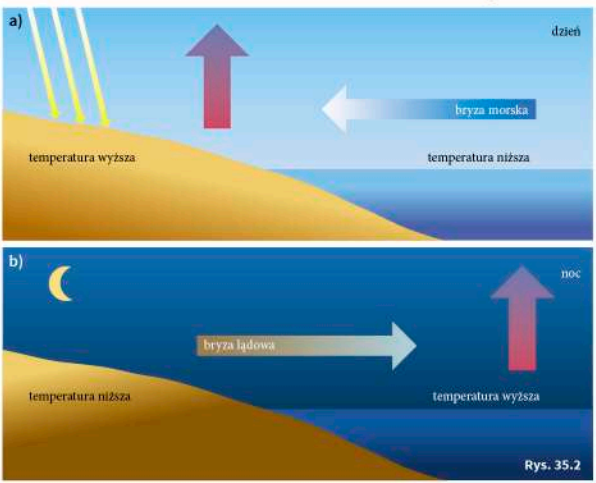
Po podzieleniu obydwu stron otrzymanej równości przez $n\Delta T$ i skorzystaniu ze wzorów (35.1) otrzymujemy związek:

$$C_p - C_V = R$$

Na końcu następnego rozdziału wykażemy, że C_p i C_V nie zależą od rodzaju gazu, a jedynie od liczby stopni swobody jego cząsteczek.

ZADANIA

1. Na podstawie wzorów (35.1), które definiują ciepła molowe C_p i C_V, wyjaśnij, jaki jest sens fizyczny każdej z tych wielkości. W jakich jednostkach wyrażamy ciepło molowe w SI?
2. W jakich jednostkach wyrażamy pojemność cieplną ciała? O czym ta wielkość nas informuje?
3. Ciepło właściwe wody wynosi ok. $4200\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$. Oblicz jej ciepło molowe.
4. Ciepła właściwe cieczy są na ogół większe niż ciepła właściwe ciał stałych. Wyjątkowo duże ciepło właściwe wody ma wielkie znaczenie w przyrodzie. Zbiorniki wodne pełnią funkcję regulatorów ciepła. Skorzystaj z informacji przedstawionych na rysunku 35.2 i wyjaśnij zjawiska bryzy dziennej i nocnej nad brzegiem morza. W opisie zjawiska użyj porównania wartości ciepła właściwego wody i piasku $(800\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}})$.



Rys. 35.2



36. Energia wewnętrzna jako funkcja stanu

- Niezależność zmiany energii wewnętrznej od rodzaju procesu
- Zmiana energii wewnętrznej w dowolnym procesie zachodzącym w gazie
- Związek między ciepłami molowymi gazu a liczbą jego stopni swobody

Przypomnij sobie, co wiesz o wielkościach charakteryzujących stan gazu, o ciepłach molowych gazu pod stałym ciśnieniem i w stałej objętości, o stopniach swobody.

W rozdziale 32 była już mowa o tym, że zmiana energii wewnętrznej ΔU gazu doskonałego wiąże się ze zmianą jego temperatury ΔT. Nie jest przy tym ważne, jak doszło do owej zmiany temperatury, tzn. w wyniku jakiego procesu ona nastąpiła. Wobec tego **zmiana energii wewnętrznej nie zależy od rodzaju przemiany gazu**, tylko od jego stanu początkowego i końcowego. Sama zaś **energia wewnętrzna zależy od stanu**, w którym gaz się znajduje. Dokładniej formułujemy to tak:
Energia wewnętrzna gazu jest funkcją stanu[22].

Słowo „funkcja" należy tu rozumieć tak jak w matematyce. Stan ciała jednoznacznie określa jego energię wewnętrzną lub inaczej – **jednemu stanowi odpowiada tylko jedna wartość** energii wewnętrznej gazu, ale już nie odwrotnie, czyli z wartości energii wewnętrznej nie wynika jednoznacznie stan (taką samą wartość energii wewnętrznej może mieć gaz w różnych stanach).
W stałej temperaturze energia wewnętrzna gazu jest stała, jednak danej temperaturze odpowiada nieskończenie wiele stanów, ponieważ z wartości temperatury T wynika tylko wartość iloczynu pV, nie zaś oddzielnie p i V. Wobec tego w procesach izotermicznych gaz przyjmuje nieskończenie wiele stanów, których zbiór w układzie współrzędnych p, V przedstawia izoterma.

Z pierwszej zasady termodynamiki wynika, że zmiana energii wewnętrznej gazu, zachodząca podczas izochorycznej zmiany temperatury o ΔT, jest równa ciepłu wymienionemu z otoczeniem: $\Delta U = Q_V$. Wobec tego:

$$\Delta U = C_V n \Delta T \tag{36.1}$$

[22] To samo można powiedzieć o energii wewnętrznej każdego ciała, z tym że stan różnych ciał mogą określać różne parametry.

Skoro zmiana energii wewnętrznej nie zależy od procesu, a jej związek ze zmianą temperatury obliczyliśmy łatwo w procesie izochorycznym, to:

Wzór $\Delta U = C_V n \Delta T$ stosuje się w dowolnej przemianie gazu doskonałego, w wyniku której temperatura zmieniła się o ΔT.

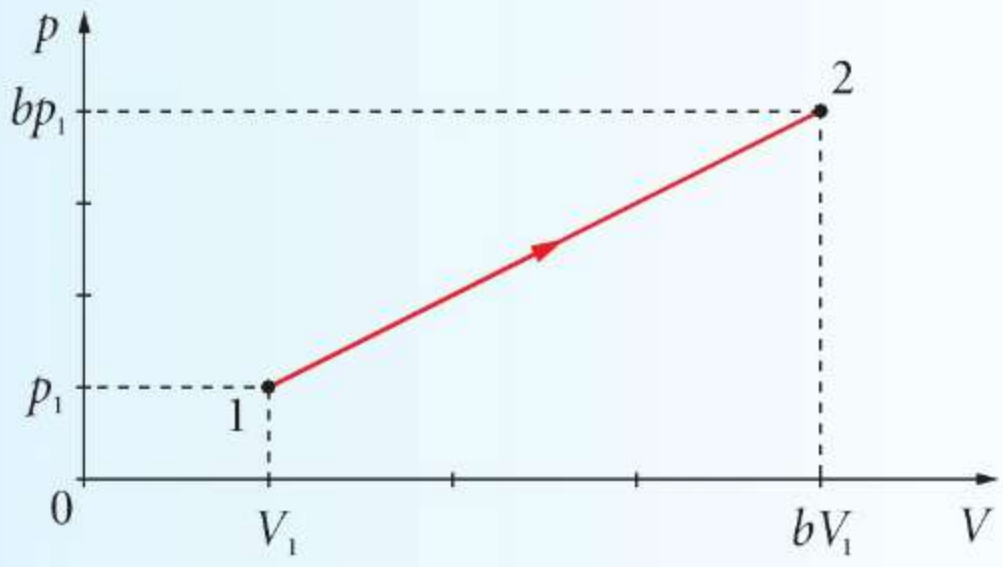
Nie musimy nawet wiedzieć, w jaki sposób doszło do zmiany temperatury gazu o ΔT, aby obliczyć zmianę jego energii wewnętrznej. Musimy jedynie znać ciepło molowe gazu w stałej objętości. Uświadomienie sobie tego faktu znacznie ułatwia rozwiązywanie zadań, a w niektórych przypadkach wręcz je umożliwia.

Przykład 36.1 pokazuje sytuację, w której musimy skorzystać ze wzoru (36.1), ponieważ w celu obliczenia ΔU nie możemy skorzystać z pierwszej zasady termodynamiki (nie znamy ciepła molowego w tej przemianie, a jego znajomość jest konieczna do obliczenia Q).

Przykład 36.1

Obliczanie ciepła pobranego przez gaz w dowolnej przemianie

Gaz doskonały, którego ciepło molowe w stałej objętości $C_V = \frac{3}{2}R$, przechodzi od stanu 1 do stanu 2 w sposób pokazany na wykresie (rys. 36.1).



$p_1 = 1 \cdot 10^5$ Pa

$V_1 = 1$ dm^3

$b = 4$

Rys. 36.1

Obliczymy ciepło wymieniane przez gaz z otoczeniem.

Z wykresu wynika, że temperatura gazu wzrasta, ponieważ rośnie zarówno jego ciśnienie, jak i objętość. Nie możemy jednak obliczyć pobranego ciepła ze wzoru $Q = Cn\Delta T$, gdyż nie znamy ciepła molowego gazu w tej przemianie. W celu obliczenia Q musimy skorzystać z pierwszej zasady termodynamiki:

$$Q = \Delta U - W$$

Praca siły zewnętrznej:

$$W = -\frac{1}{2}(p_1 + bp_1)(bV_1 - V_1) = -\frac{p_1 V_1 (b+1)(b-1)}{2} = -\frac{p_1 V_1 (b^2 - 1)}{2}$$

Zmiana energii wewnętrznej gazu:

$$\Delta U = C_V n (T_2 - T_1)$$

Temperatury T_1 i T_2 obliczamy z równania Clapeyrona:

$$T_1 = \frac{p_1 V_1}{nR} \qquad T_2 = \frac{b^2 p_1 V_1}{nR}$$

$$\Delta U = \frac{C_V}{R} p_1 V_1 (b^2 - 1)$$

a po podstawieniu $C_V = \frac{3}{2}R$:

$$\Delta U = \frac{3}{2} p_1 V_1 (b^2 - 1)$$

$$Q = \frac{3p_1 V_1 (b^2 - 1)}{2} + \frac{p_1 V_1 (b^2 - 1)}{2} = 2p_1 V_1 (b^2 - 1)$$

Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy:

$$Q = 2 \cdot 10^5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{J} \cdot 15 = 3 \cdot 10^3\,\mathrm{J}$$

Możemy skorzystać ze wzorów (32.3) i (36.1) na zmianę energii wewnętrznej, aby obliczyć, jaki jest związek między ciepłami molowymi gazu pod stałym ciśnieniem i w stałej objętości z liczbą stopni swobody cząsteczki (i).

$$\frac{NkiT}{2} = C_V n \Delta T \qquad C_V = \frac{Nki}{2n} = \frac{N_A ki}{2}$$

ale $N_A k = R$, więc:

$$C_V = \frac{i}{2}R \qquad C_p = \frac{i}{2}R + R = \left(\frac{i}{2} + 1\right)R$$

Wobec tego:

- dla gazów o cząsteczkach jednoatomowych (np. gazy szlachetne):

$$C_V = \frac{3}{2}R \qquad C_p = \frac{5}{2}R$$

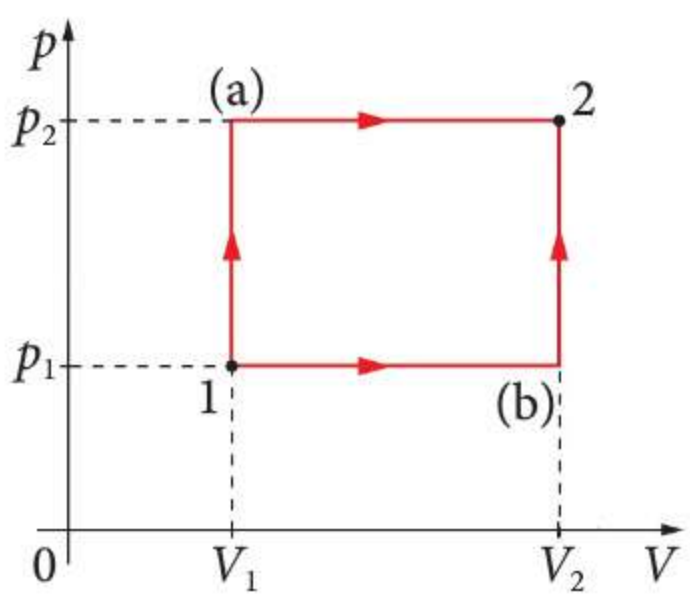
- dla gazów o cząsteczkach dwuatomowych (np. H_2, O_2, N_2):

$$C_V = \frac{5}{2}R \qquad C_p = \frac{7}{2}R$$

ZADANIA

1. Zastanów się, jak można wyjaśnić (bez wyprowadzania wzorów), że ciepło molowe C_V gazu, którego cząsteczki mają więcej stopni swobody, jest większe.
Wskazówka: Skorzystaj z zasady ekwipartycji energii oraz ze związku między średnią energią kinetyczną przypadającą na jeden stopień swobody a temperaturą gazu.

2. Sprawdź (zastosuj wyprowadzone w zadaniu 2 na końcu rozdziału 32 wzory na ΔU), że podczas przejścia gazu doskonałego ze stanu 1 do stanu 2 dwoma sposobami: a i b, przedstawionymi na wykresie (rys. 36.2), energia wewnętrzna gazu wzrasta o taką samą wartość.



Rys. 36.2



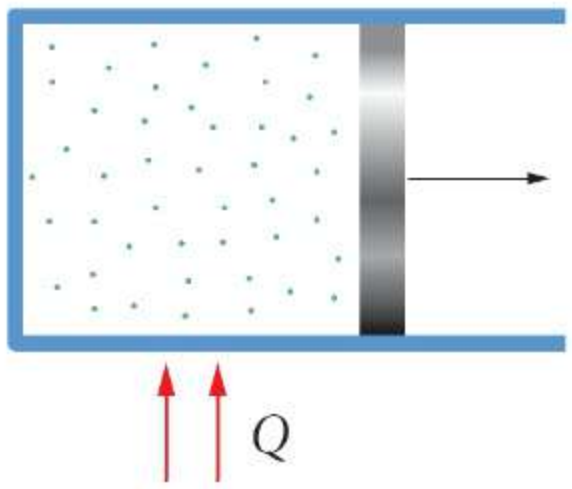
37. Silniki cieplne. Odwracalny cykl Carnota

- Zamiana ciepła na pracę
- Cykl Carnota
- Sprawność odwracalnego silnika Carnota
- Druga zasada termodynamiki
- Chłodziarki i pompy cieplne

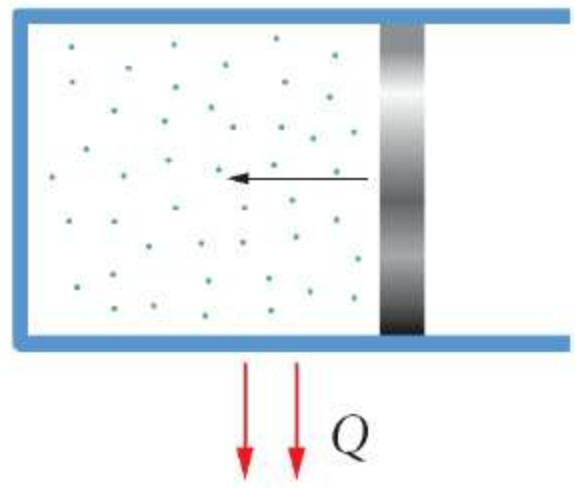
Przypomnij sobie, jak obliczamy pracę wykonaną przez gaz na podstawie wykresu $p(V)$ oraz jak obliczamy ciepło pobrane przez gaz w procesach: izotermicznym, izochorycznym i izobarycznym.

Czy da się zbudować urządzenie, które wykonywałoby pracę kosztem dostarczonego ciepła, tzn. silnik cieplny? Pierwsza zasada termodynamiki tego nie wyklucza.

Załóżmy, że tłok może poruszać się swobodnie w cylindrze zawierającym gaz. W chwili początkowej na tłok działamy siłą równoważącą parcie, więc pozostaje on w spoczynku. Jeśli do gazu doprowadzimy ciepło Q, przez umieszczenie cylindra w kąpieli o nieco wyższej temperaturze, to równowaga zostanie zakłócona. Gaz będzie wypychał tłok – wykona pracę (rys. 37.1). Gdy proces zajdzie odpowiednio powoli, można go będzie uznać za izotermiczny i wtedy całe dostarczone ciepło zostanie zużyte na wykonanie pracy ($\Delta U = 0$). Otrzymaliśmy pracę kosztem ciepła!



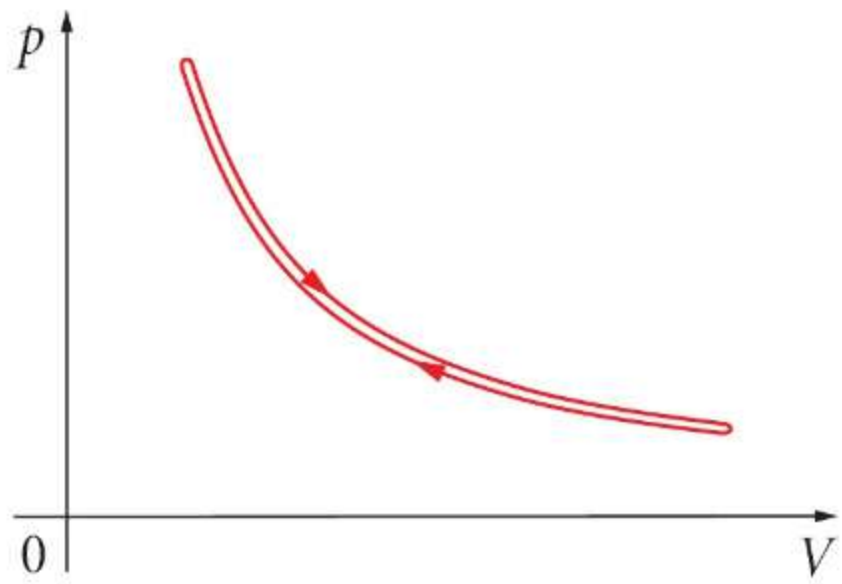
Rys. 37.1 Gaz wypycha tłok, więc wykonuje pracę dodatnią (praca siły zewnętrznej $W < 0$)



Rys. 37.2 Sprężanie gazu; pracę dodatnią wykonuje siła zewnętrzna ($W > 0$)

Jednak takie jednorazowe wykonanie pracy nas nie zadowala; chcielibyśmy, aby silnik pracował w sposób ciągły, tzn. by proces ten powtarzał się dowolną liczbę razy. Co należałoby zrobić? Doprowadzić gaz do pierwotnego stanu – ale w tym celu potrzebne jest wykonanie pracy. Jeśli po umieszczeniu cylindra w nieco chłodniejszym otoczeniu będziemy powoli przesuwać tłok, gaz ulegnie sprężeniu, odda z powrotem do otoczenia ciepło Q (którego wartość bezwzględna będzie równa wykonanej przez nas pracy) i wróci do pierwotnego stanu (rys. 37.2).

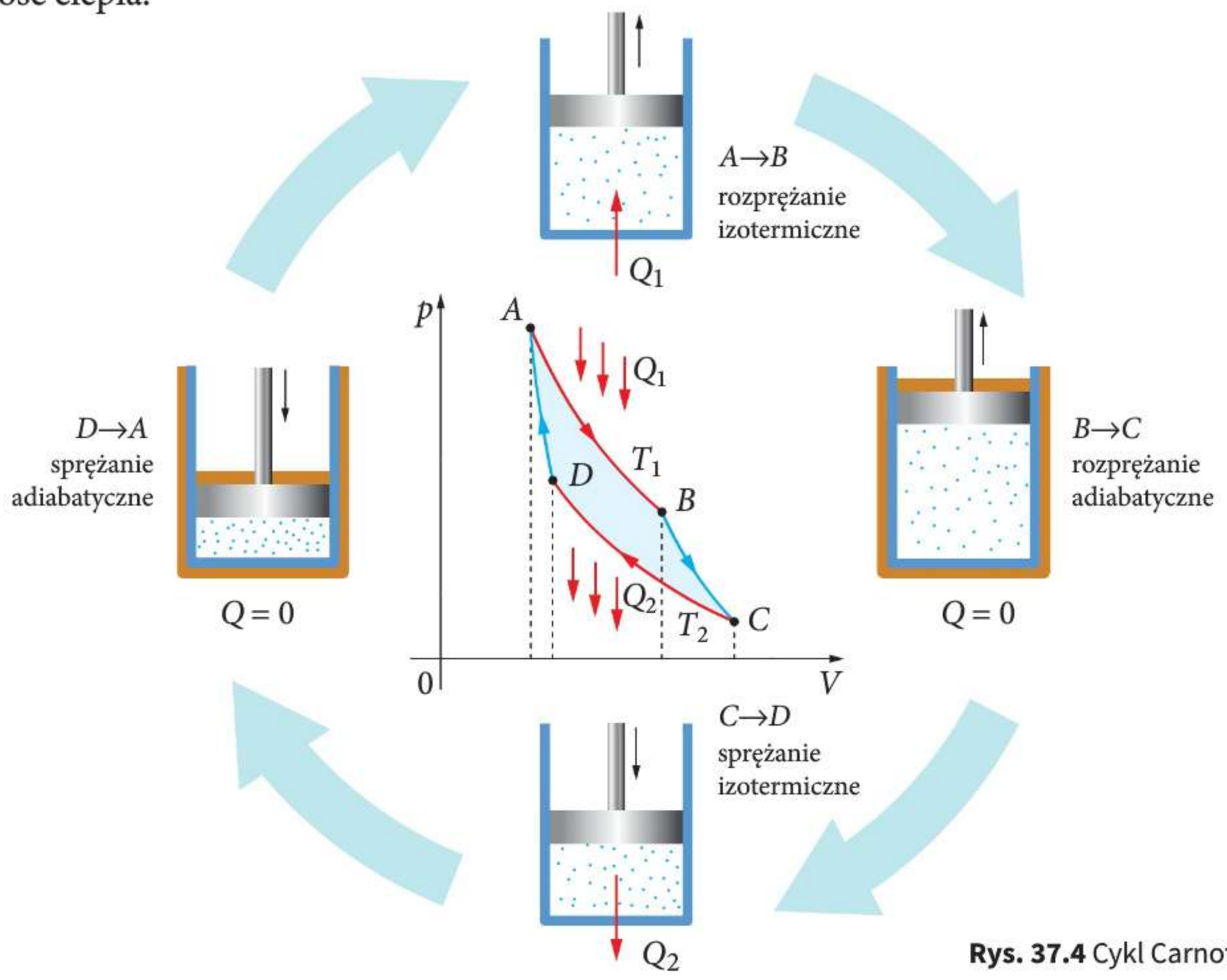
Oba procesy ilustruje wykres na rysunku 37.3.



Rys. 37.3 Równość pracy gazu i pracy siły zewnętrznej podczas rozprężania i sprężania gazu w tej samej temperaturze

Widać, że takie urządzenie nie byłoby opłacalne, bowiem za każdym razem musielibyśmy wykonać taką samą pracę, jaką poprzednio wykonał gaz. Opłacałoby się, gdyby praca wykonana przez gaz podczas rozprężania była większa od pracy wykonanej przez siłę zewnętrzną podczas sprężania (rys. 37.4).

Można by to osiągnąć pod warunkiem, że w ostatniej fazie rozprężania temperatura gazu obniżałaby się, np. przez wykonanie pracy kosztem energii wewnętrznej. Byłby to proces adiabatyczny, więc cylinder należałoby odizolować cieplnie od otoczenia. Podczas oziębiania obniżyłoby się znacznie ciśnienie gazu, zatem nie musielibyśmy równoważyć tak dużej siły parcia gazu jak poprzednio. Nasza praca byłaby mniejsza. Oczywiście musielibyśmy wtedy umieścić cylinder w otoczeniu o znacznie niższej temperaturze T_2 (w tzw. chłodnicy), aby gaz (już chłodniejszy) mógł oddać pewną ilość ciepła.

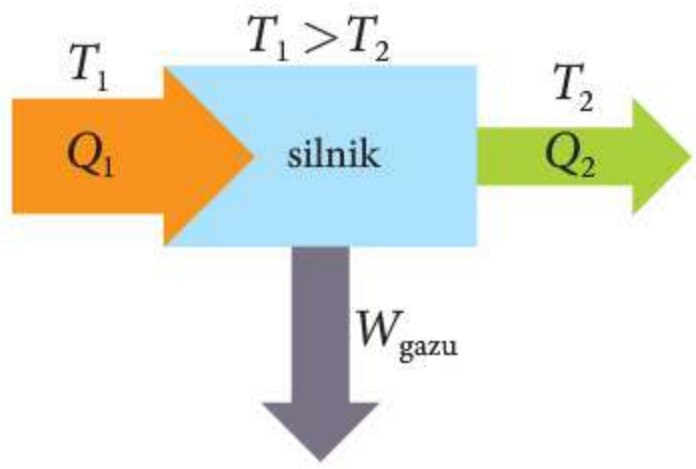


Rys. 37.4 Cykl Carnota

Aby doprowadzić gaz do stanu początkowego, należałoby jeszcze pod koniec sprężania izolować cieplnie cylinder od otoczenia. Wtedy ostatni proces byłby adiabatyczny. Umożliwiłoby to przywrócenie początkowej temperatury i stan końcowy pokrywałby się z początkowym.

Po raz pierwszy taki cykliczny proces opisał napoleoński inżynier Sadi Carnot. Stworzył w ten sposób teoretyczne podstawy pracy wszystkich silników cieplnych.
Zastanówmy się, kosztem czego w opisanym silniku Carnota pojawiła się nadwyżka pracy gazu podczas rozprężania nad pracą siły zewnętrznej podczas sprężania (miarą tej nadwyżki jest zakreślone na rysunku 37.4 pole figury wewnątrz cyklu). Odpowiedź uzyskamy dzięki zastosowaniu pierwszej zasady termodynamiki do całego cyklu, w którym $\Delta U = 0$ (ponieważ stan końcowy pokrywa się ze stanem początkowym). Wynika stąd, że mogło to nastąpić tylko kosztem ciepła – widocznie ciepło oddane do chłodnicy o temperaturze T_2 musiało mieć mniejszą wartość bezwzględną niż ciepło pobrane podczas izotermicznego rozprężania z otoczenia o temperaturze T_1, czyli z tzw. źródła ciepła (rys. 37.5).

$$Q_1 > |Q_2|$$
więc:
$$Q_1 - |Q_2| = W_{\text{gazu}}$$



Rys. 37.5 Schemat przemian energii w silniku cieplnym

Praca gazu jest równa różnicy ciepła pobranego ze źródła ciepła i wartości bezwzględnej ciepła oddanego do chłodnicy. Iloraz ciepła zamienionego na pracę i ciepła pobranego ze źródła nazywamy **sprawnością silnika**.

$$\eta = \frac{W_{\text{gazu}}}{Q_1} = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1} = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1} \qquad (37.1)$$

Zwróć uwagę, że we wzorze wstawiono wartość bezwzględną ciepła oddanego do chłodnicy, ponieważ według przyjętej umowy jest ono ujemne.
Wzór (37.1) można stosować do obliczania sprawności każdego silnika cieplnego, Q_1 oznacza łączne ciepło pobrane, a $|Q_2|$ – łączne ciepło oddane w całym cyklu.

Można wykazać, że sprawność idealnego silnika Carnota zależy tylko od temperatury źródła (T_1) oraz chłodnicy (T_2) i wyraża się wzorem:

$$\eta_C = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

gdyż w tym przypadku zachodzi proporcja:

$$\frac{|Q_2|}{Q_1} = -\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}$$

Zrobimy tutaj pewną dygresję, aby wytłumaczyć, co rozumiemy przez idealny silnik Carnota.

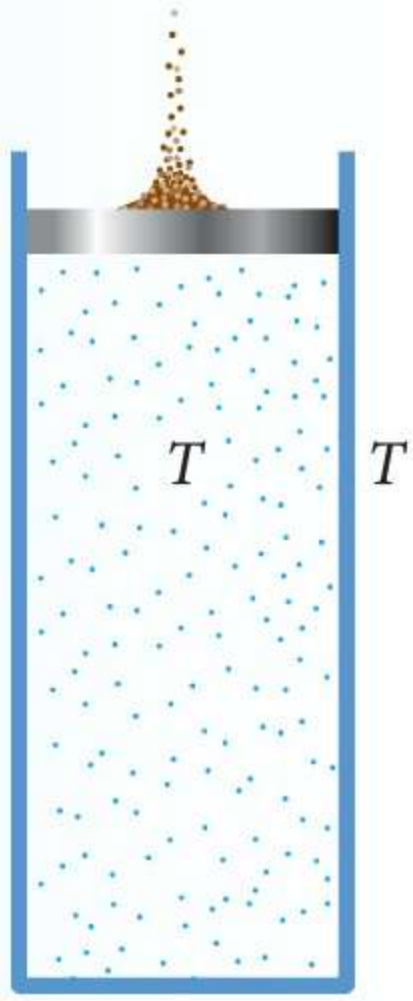
Idealny silnik Carnota to silnik, w którym wszystkie procesy cyklu zachodziłyby **odwracalnie**. Procesy odwracalne to takie, które mogłyby zachodzić w odwrotną stronę przez te same stany pośrednie. Wówczas nie tylko układ wróciłby do stanu początkowego, lecz także w jego otoczeniu nic nie uległoby zmianie. Procesy zachodzące w przyrodzie samorzutnie (bez naszej ingerencji) są nieodwracalne (np. mieszanie się gazów, przechodzenie ciepła z ciała o wyższej temperaturze do ciała o niższej temperaturze). Wobec tego proces odwracalny jest idealizacją, tak samo jak np. ciało sztywne lub gaz doskonały. Proces zachodzący bardzo powoli, który mógłby być traktowany jako ciąg kolejnych, następujących po sobie stanów równowagi z otoczeniem (taki proces w termodynamice nazywamy kwazistatycznym), byłby procesem odwracalnym[23].
Opiszemy teraz przykład takiego procesu.

Przykład 37.1

Odwracalny proces kwazistatyczny

Pewnym wyobrażeniem procesu kwazistatycznego może być np. izotermiczne sprężanie gazu, dokonane w sposób przedstawiony na rysunku 37.6.

Zakładamy, że między tłokiem a ściankami nie ma tarcia. Na powierzchnię tłoka bardzo powoli sypiemy piasek – po kilka ziarenek, co stanowi realizację powolnych i nieskończenie małych zmian w otoczeniu. Powoduje to niezmiernie powolny i nieskończenie mały wzrost temperatury i ciśnienia gazu. Jeśli ścianki doskonale przewodzą ciepło, gaz oddaje je otoczeniu na bieżąco bardzo małymi porcjami, tak iż można uważać, że temperatura gazu nie wzrosła ponad stałą temperaturę otoczenia (o bardzo dużej pojemności cieplnej). Ustala się stan równowagi, w którym znamy wartości wszystkich zmiennych p, V, T. Znów dorzucamy kilka ziarenek piasku, po pewnym czasie ustali się nowy stan równowagi itd. Usunięcie z tłoka kilku ziarenek piasku (a więc bardzo mała zmiana w otoczeniu) powoduje odwrócenie kierunku biegu procesu. Przez usuwanie następnych ziarenek aż do ostatniego otrzymamy te same stany co poprzednio, tylko w odwrotnej kolejności (ciepło będzie teraz małymi porcjami pobierane z otoczenia). Nie tylko układ wrócił do stanu początkowego, lecz także w otoczeniu nic się nie zmieniło.



Rys. 37.6

[23] Procesy samorzutne często nie zachodzą powoli, lecz przebiegają burzliwie. Stany pośrednie nie są stanami równowagi. Jednak kwazistatyczność nie jest warunkiem koniecznym odwracalności procesu (jest tylko warunkiem wystarczającym). Na przykład ruch wahadła w próżni, jeśli pominiemy wszystkie opory, to proces odwracalny, ale nie kwazistatyczny – nie odbywa się nieskończenie powoli.

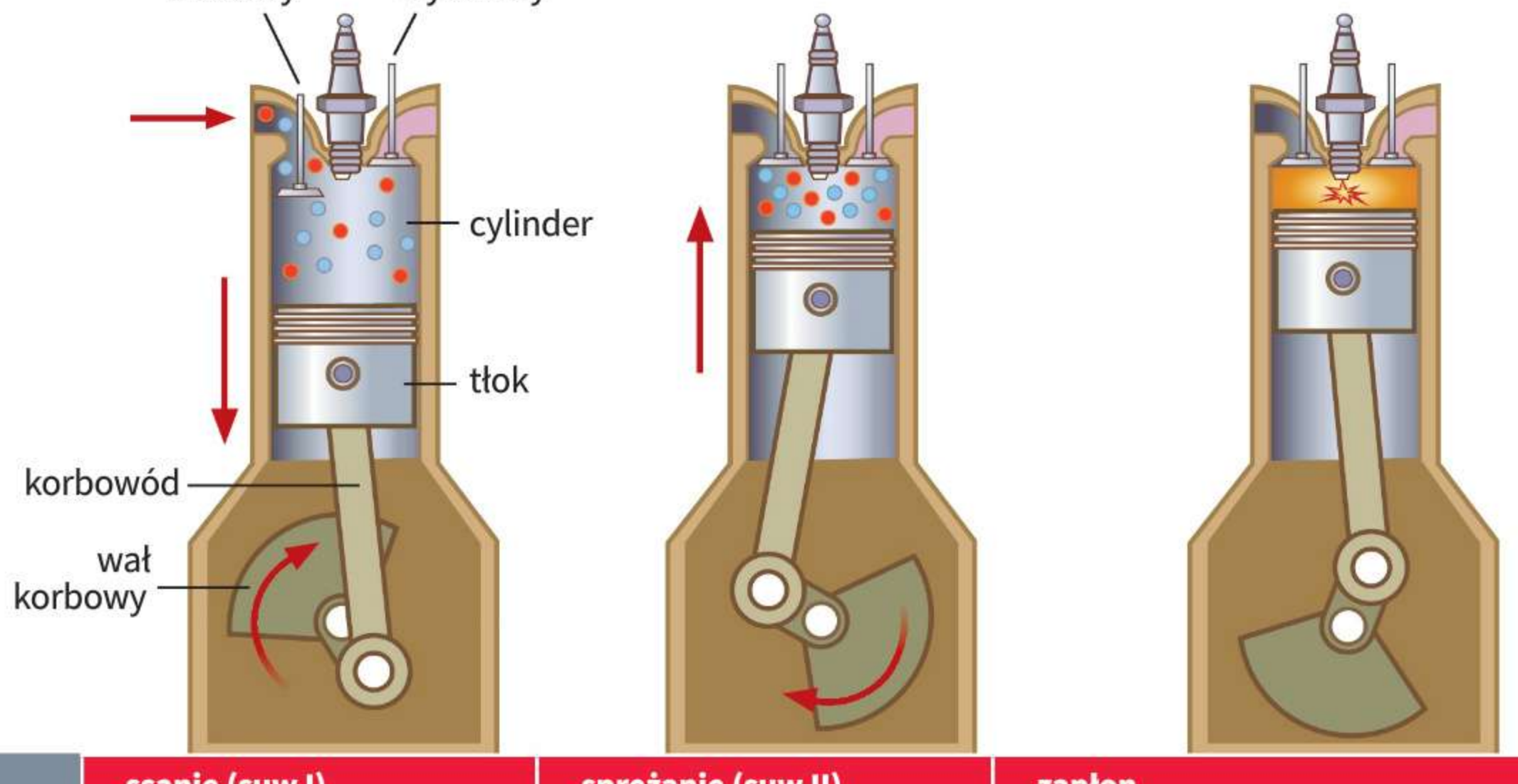
Silnik spalinowy czterosuwowy

Przyjrzyjmy się pracy tego najpopularniejszego silnika cieplnego. Substancję roboczą, która pobiera ciepło, oddaje ciepło i wykonuje pracę w tym silniku, stanowią powietrze z niewielką ilością par paliwa (np. benzyny) i spaliny.

Nazwa silnika bierze się stąd, że dostarczane do silnika ciepło pochodzi ze spalenia (bezpośrednio w cylindrze) niewielkiej ilości benzyny w powietrzu, które podlega kolejnym przemianom. Między kolejnymi wybuchami mieszanki tłok przesuwa się w cylindrze cztery razy; na trzy jałowe suwy przypada tylko jeden suw pracy. Zazwyczaj silniki buduje się jako czterocylindrowe, a zadania tak są podzielone między cylindry, że zawsze jeden z nich wykonuje cykl pracy. Aby uzyskać większą moc silnika, samochody wyposaża się też w silniki sześcio-, ośmio-, a nawet dwunastocylindrowe.

Tłok silnika spalinowego połączony jest przez układ wału korbowego z mechanizmem napędzającym koła samochodu. Podczas rozruchu silnika spalinowego silnik elektryczny rozrusznika wywołuje ruchy tłoka do góry i do dołu.

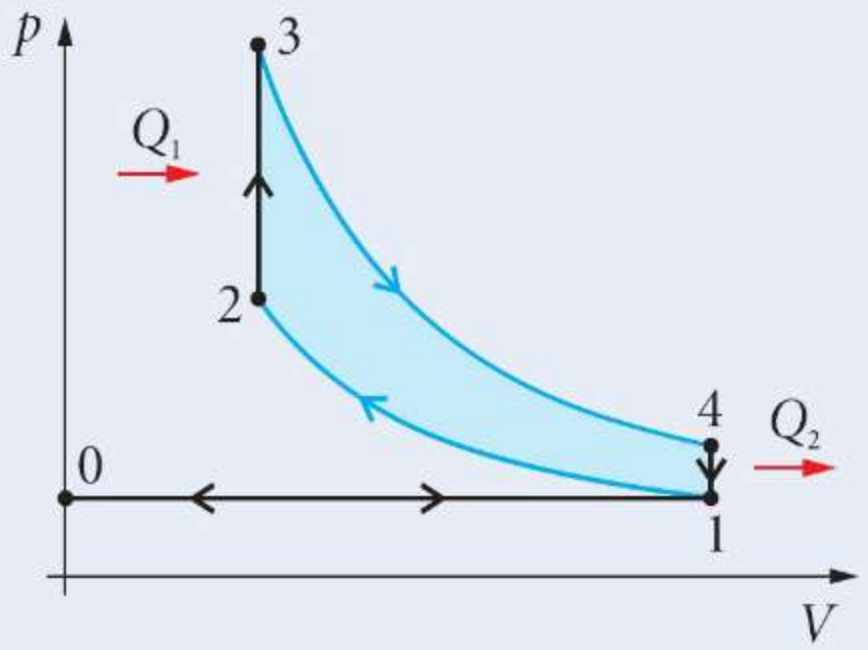
Cykl pracy spalinowego



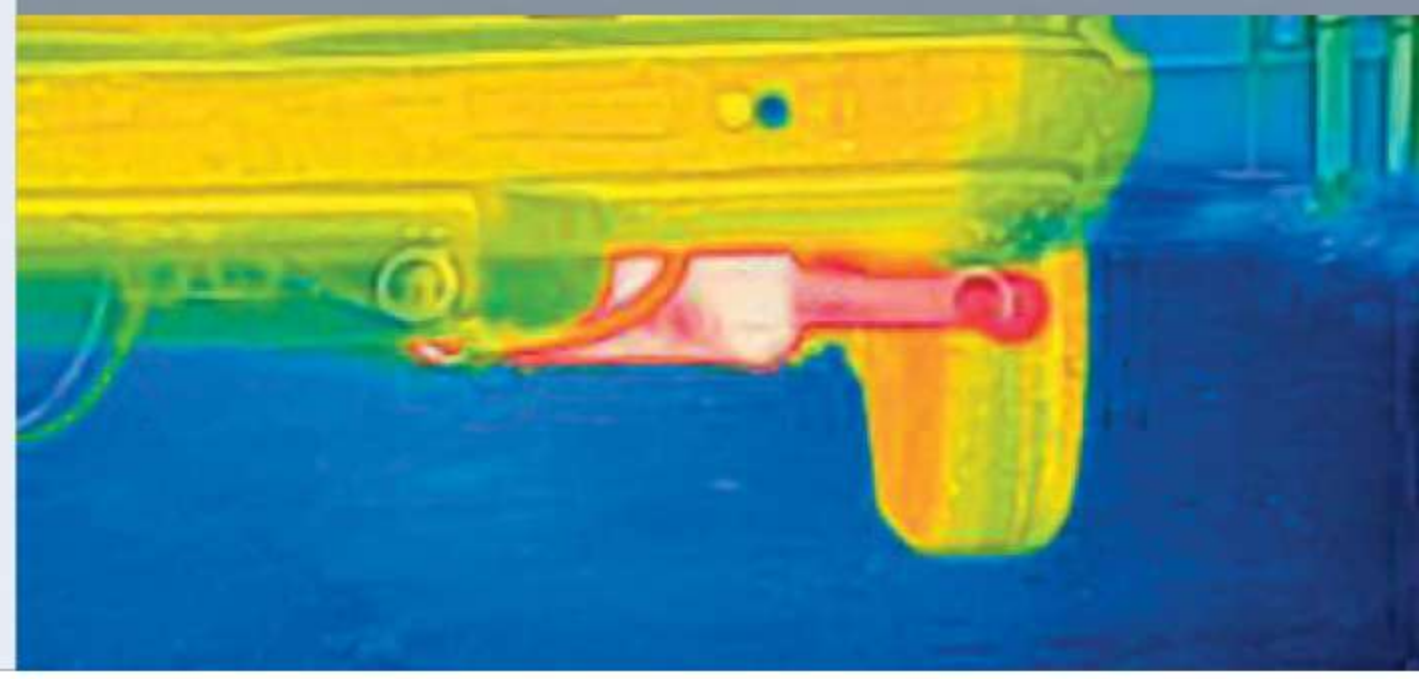
ssanie (suw I) przemiana 0 → 1	sprężanie (suw II) przemiana 1 → 2	zapłon przemiana 2 → 3
Tłok wędruje w dół, zawór wlotowy jest otwarty. W wyniku podciśnienia do cylindra zasysana jest mieszanka powietrza i paliwa.	Cylinder zostaje szczelnie zamknięty, a tłok porusza się ku górze. Mieszanka paliwowo-powietrzna jest sprężana adiabatycznie – praca jest wykonywana nad gazem.	Iskra elektryczna powoduje zapłon sprężonej mieszanki. Gwałtownie rosną ciśnienie i temperatura gazu. Ciepło pobrane Q_1, czyli ciepło uzyskane ze spalenia paliwa: $Q_1 =$ masa paliwa · ciepło spalania, zwiększa energię wewnętrzną gazu.

Cykl termodynamiczny silnika

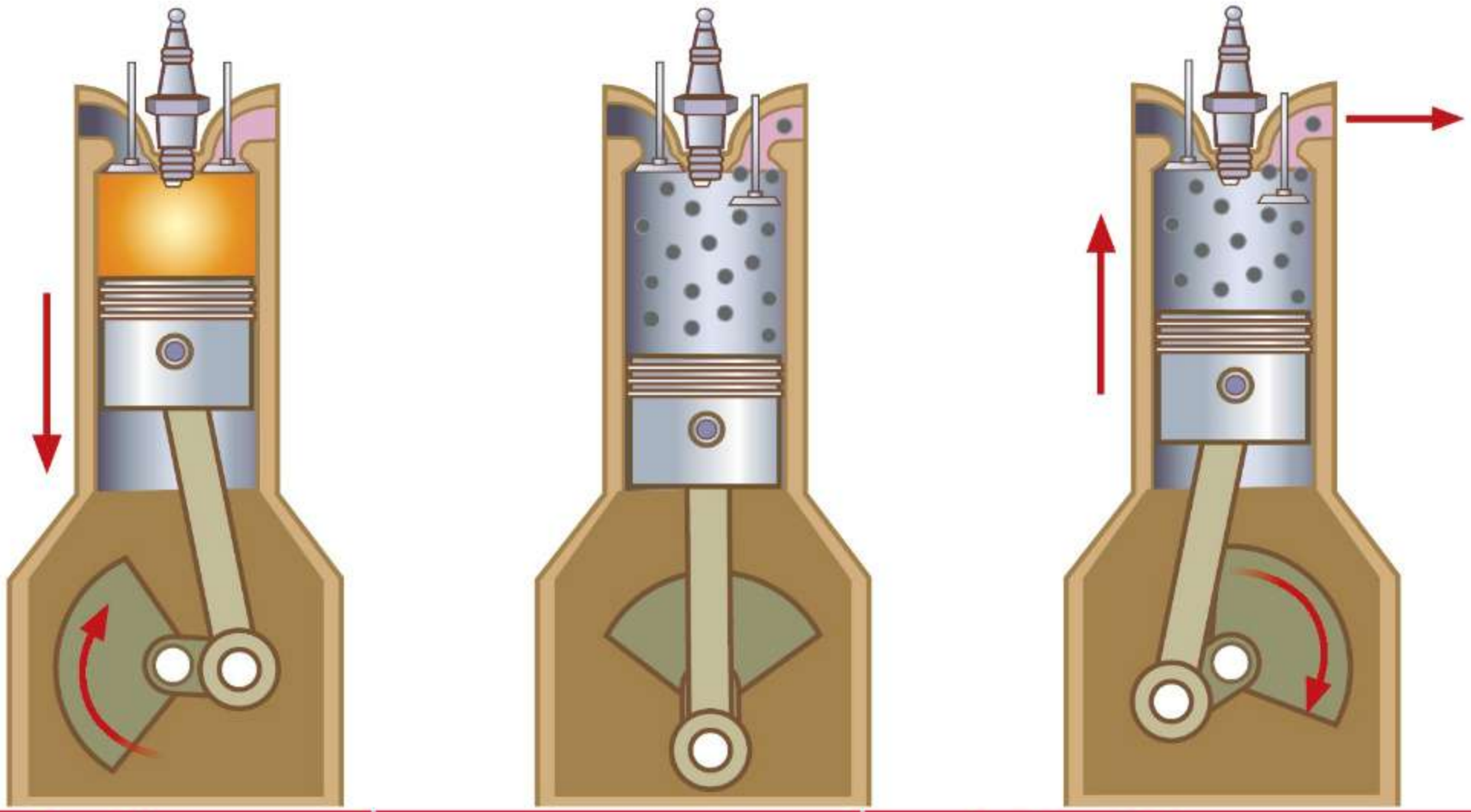
Rysunek pokazuje, że cykl pracy składa się z dwóch przemian izochorycznych i dwóch adiabatycznych.



Każdy silnik spalinowy produkuje spaliny, które opuszczają silnik przez układ wydechowy. Wraz ze spalinami oddawane jest ciepło. Na fotografii termowizyjnej widać, że temperatura rury wydechowej jest zdecydowanie wyższa od temperatury innych elementów samochodu.



silnika czterosuwowego

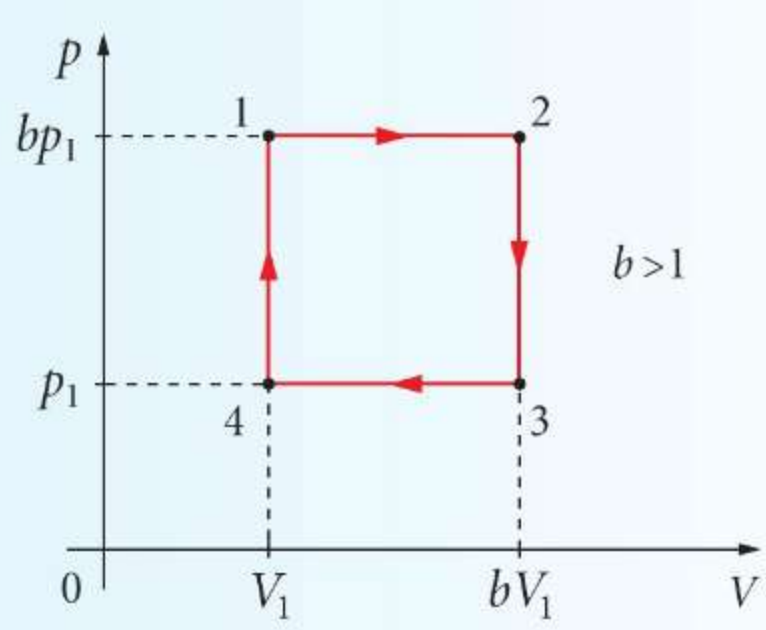


praca (suw III) przemiana 3 → 4	przemiana 4 → 1	wydech (suw IV) przemiana 1 → 0
Gaz rozpręża się adiabatycznie i wykonuje pracę.	Otwarcie zaworu wylotowego. Spaliny na skutek nadciśnienia zaczynają się wydostawać z cylindra.	Tłok przesuwa się ku górze i spaliny są wypychane do atmosfery. Wraz ze spalinami zostaje oddane ciepło Q_2 (część ciepła Q_1 niezużyta na wykonanie pracy podczas suwu pracy). Po opróżnieniu cylindra zawór wylotowy zostaje zamknięty.

Przykład 37.2

Sprawność silnika

Obliczymy sprawność silnika pracującego w cyklu prostokątnym, przedstawionym na rysunku 37.7. Niech ciałem roboczym będzie w tym silniku gaz doskonały składający się z cząsteczek dwuatomowych. Porównamy tę sprawność ze sprawnością odwracalnego silnika Carnota, który pracowałby między najwyższą i najniższą temperaturą, jaką miał gaz w cyklu prostokątnym.



Rys. 37.7

Cykl składa się z dwóch przemian izobarycznych i dwóch izochorycznych. Dla gazu o cząsteczkach dwuatomowych liczba stopni swobody wynosi 5, więc $C_V = \frac{5}{2}R$, a $C_p = \frac{7}{2}R$.

$$W_{\text{gazu}} = (bV_1 - V_1)(bp_1 - p_1) = V_1 p_1 (b-1)^2$$

Ciepła są pobierane w przemianach 1 → 2 i 4 → 1, ponieważ w tych przemianach temperatura wzrasta.

$$Q_{1\to2} = C_p n(T_2 - T_1) \qquad T_2 = \frac{bp_1 bV_1}{nR} \qquad T_1 = \frac{bp_1 V_1}{nR}$$

$$Q_{1\to2} = \frac{7}{2}nR\frac{p_1 V_1}{nR}b(b-1) = \frac{7}{2}b(b-1)p_1 V_1$$

$$Q_{4\to1} = C_V n(T_1 - T_4) \qquad T_4 = \frac{p_1 V_1}{nR}$$

$$Q_{4\to1} = \frac{5}{2}Rn\frac{p_1 V_1}{nR}(b-1) = \frac{5}{2}(b-1)p_1 V_1$$

$$\eta = \frac{W_{\text{gazu}}}{Q_{1\to2} + Q_{4\to1}} = \frac{2p_1 V_1 (b-1)^2}{7b(b-1)p_1 V_1 + 5(b-1)p_1 V_1}$$

Po wykonaniu rachunków otrzymujemy wynik:

$$\eta = \frac{2(b-1)}{7b+5}$$

Na przykład dla $b = 2$:

$$\eta = \frac{2}{19} \approx 0{,}1$$

Najniższa temperatura cyklu prostokątnego to T_4, a najwyższa to T_2.

$$\eta_{\text{C, odwr}} = 1 - \frac{T_4}{T_2} = 1 - \frac{1}{b^2} \qquad \text{dla } b = 2 \qquad \eta_{\text{C, odwr}} = 0{,}75$$

Jeżeli rozwiążesz nierówność $1 - \frac{1}{b^2} > \frac{2(b-1)}{7b+5}$, przekonasz się, że dla każdego $b > 1$ jest ona spełniona.

Omówione tu przykłady, a w szczególności wzór:

$$W_{\text{gazu}} = Q_1 - |Q_2|$$

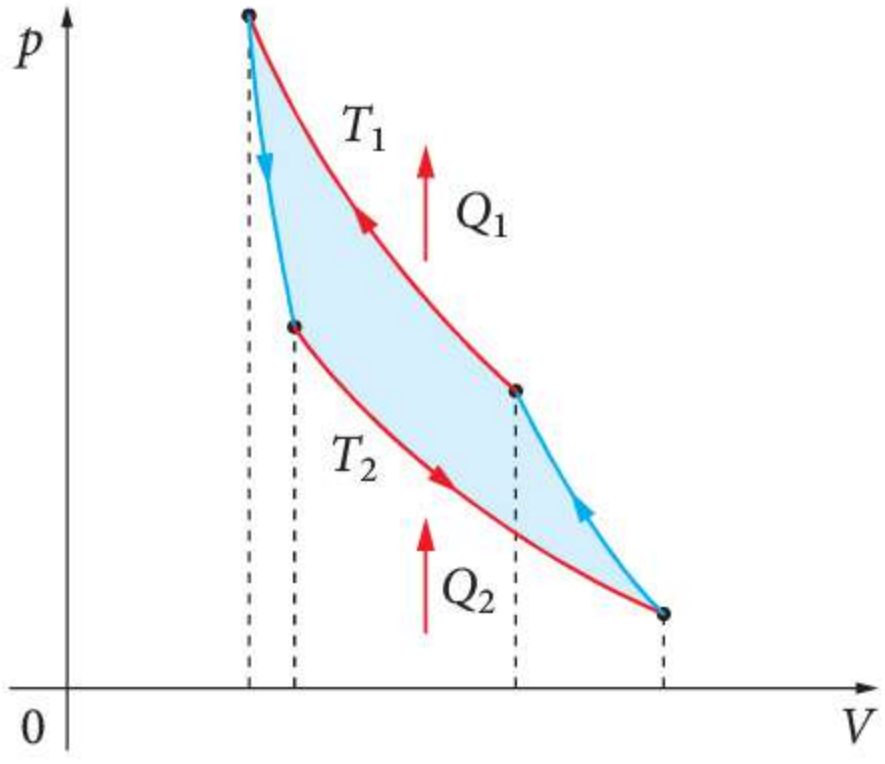
wskazują, że **niecałe ciepło pobrane ze źródła zostało zamienione na pracę użyteczną**. Tak jest w każdym obiegu cyklicznym składającym się z dowolnej liczby dowolnych przemian. Ciało robocze musi oddawać chłodnicy część pobranego ciepła, w przeciwnym razie cykl nie mógłby się zamknąć, czyli ciało robocze nie mogłoby powrócić do stanu początkowego i powtarzać cyklu przemian od nowa.

Drugą zasadę termodynamiki formułujemy często w następujący sposób:

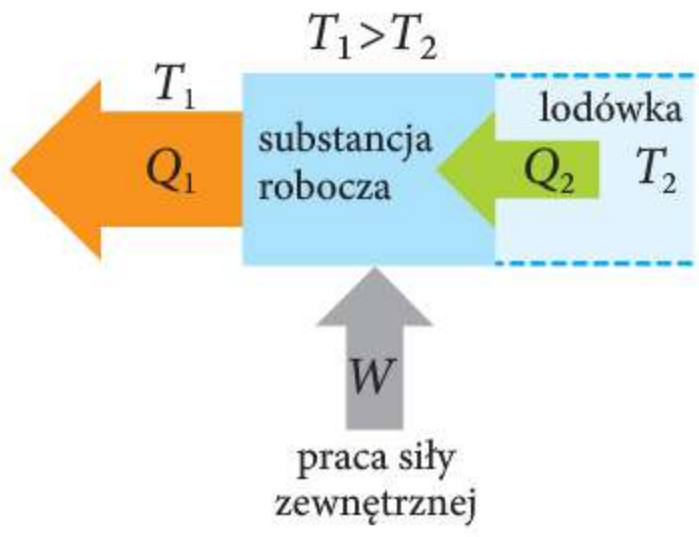
Niemożliwe jest zbudowanie *perpetuum mobile* drugiego rodzaju, tzn. takiej maszyny, która przekształcałaby w pracę całe ciepło pobrane ze źródła, nie powodując przy tym żadnych zmian ani w otoczeniu, ani w stanie pracującego w niej ciała roboczego.

Chłodziarki i pompy cieplne

Jeśli jakikolwiek cykl przemian substancji roboczej przebiega przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, to siła zewnętrzna wykonuje pracę większą od pracy substancji roboczej, zatem $Q_{\text{całk}} < 0$, czyli ciepło oddane jest większe od ciepła pobranego. W ten sposób pracują **chłodziarki**, stanowiące odwrócenie silników cieplnych. Rozważymy to na przykładzie cyklu odwrotnego do cyklu Carnota (rys. 37.8).



Rys. 37.8 Cykl pracy chłodziarki (odwrotny do cyklu Carnota)



Rys. 37.9 Schemat przemian energii w chłodziarce

Podczas izotermicznego rozprężania w temperaturze T_2 chłodzonego pomieszczenia gaz pobiera od niego ciepło Q_2, a podczas izotermicznego sprężania oddaje ciepło $|Q_1|$ ciału o temperaturze wyższej T_1. Ogólny schemat przekazywania energii pokazany jest na rysunku 37.9.

Urządzenie chłodzące przepompowuje ciepło z ciała chłodniejszego do cieplejszego. **Jest to możliwe tylko dlatego, że siła zewnętrzna wykonuje pracę** (jej miarą jest pole figury zawartej wewnątrz cyklu).

$$W = |Q_1| - Q_2 \qquad \text{lub} \qquad |Q_1| = W + Q_2$$

Na przykład gaz odebrał ciału zimniejszemu 1000 J ($Q_2 = 1000$ J), siła zewnętrzna wykonała pracę 500 J ($W = 500$ J), więc gaz oddał ciału cieplejszemu 1500 J ($Q_1 = -1500$ J, $|Q_1| = 1500$ J).

Urządzenia, o których tutaj mówimy, mają znaczenie praktyczne. Na tej zasadzie opiera się jedna z metod ogrzewania pomieszczeń w zimie (do mieszkania pompuje się ciepło z otaczającej, chłodniejszej atmosfery), a także ochładzania ich w lecie przez wyrzucanie ciepła na zewnątrz, gdzie temperatura jest wyższa niż w pomieszczeniu (klimatyzacja). W ten sposób działają także lodówki.

W chłodziarkach lub pompach cieplnych nie stosuje się gazów, bo wymiana ciepła następowałaby w nich zbyt wolno (jak wiadomo, procesy izotermiczne nie następują w nich z dostatecznie dużą szybkością). W urządzeniach tych używa się par, których objętości łatwo zmienić przez skraplanie, a następnie przez wyparowanie cieczy.

Miarą użyteczności pompy cieplnej (lub chłodziarki) jest wielkość zwana **skutecznością chłodzenia** ξ (grecka litera „ksi"), określona jako stosunek ciepła pobranego od ciała o temperaturze niższej do całkowitej pracy wykonanej podczas cyklu przez siłę zewnętrzną.

$$\xi = \frac{Q_2}{W} = \frac{Q_2}{|Q_1| - Q_2} \tag{37.2}$$

Zgodnie ze wzorem (37.2) chłodziarka jest tym lepsza, im więcej ciepła pobiera od ciała o temperaturze niższej i im mniejszej to wymaga pracy. W odróżnieniu od sprawności silnika η skuteczność chłodzenia może mieć (i najczęściej ma) wartość większą od 1. W podanym wyżej przykładzie ξ wynosi 2. Ciepło dostarczone do mieszkania przez pompę ciepła pracującą ze skutecznością $\xi = 2$ byłoby 3 razy większe od wykonanej pracy, tj. zużytej energii elektrycznej!

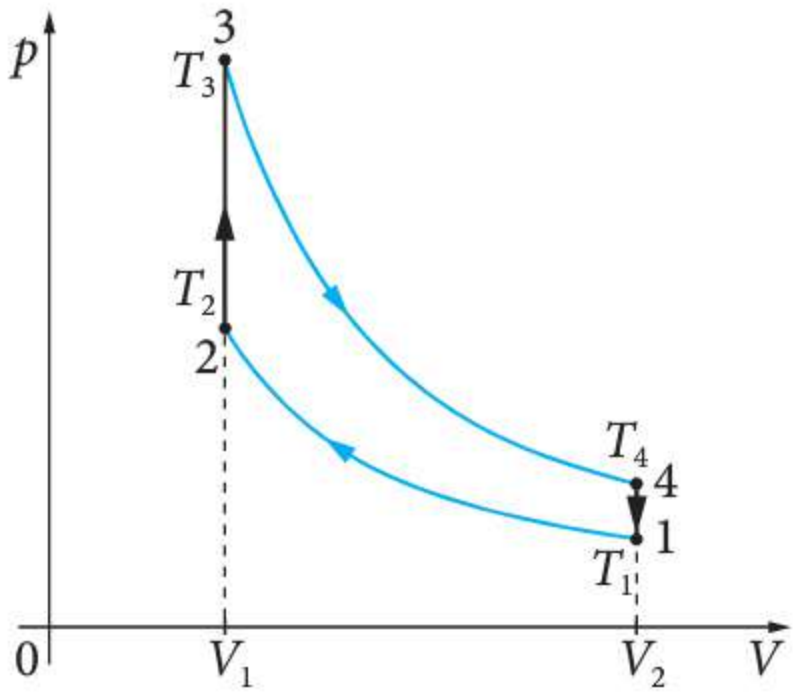
Jeśli chłodziarka (wykonująca cykl odwrotny do cyklu Carnota) pracowałaby odwracalnie, to jej skuteczność chłodzenia byłaby równa:

$$\xi = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

tzn. skuteczność byłaby tym większa, im mniejsza różnica temperatur.

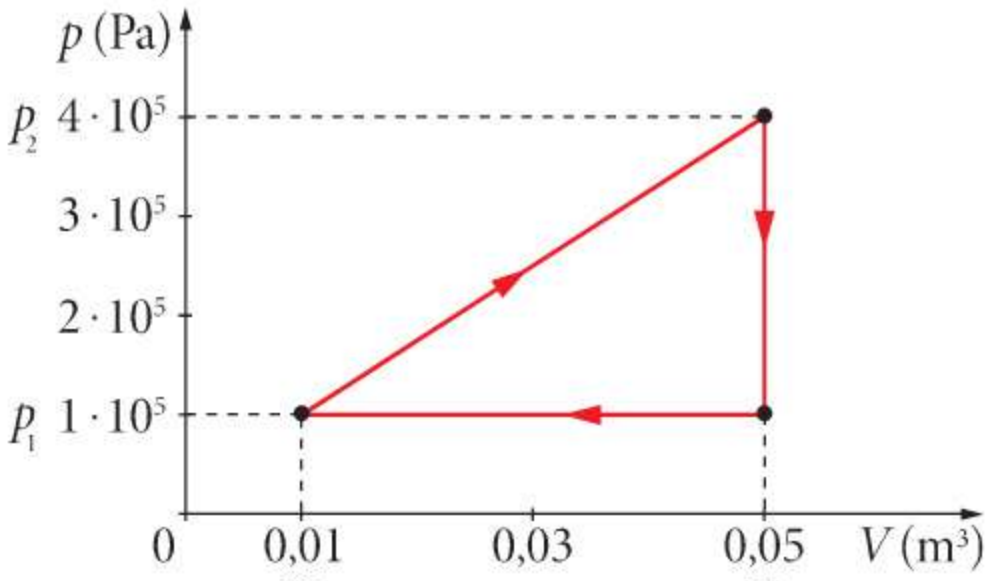
ZADANIA

1. Rysunek 37.10 przedstawia cykl podobny do cyklu pracy silnika spalinowego czterosuwowego, z tą różnicą, że tutaj ciałem roboczym nie jest gaz spalinowy, lecz gaz doskonały. Dane są temperatury we wszystkich czterech stanach: T_1, T_2, T_3, T_4. Wyraź sprawność tego cyklu przez podane temperatury (skorzystaj z równości $W_{\text{gazu}} = Q_1 - |Q_2|$). Jakim wzorem wyrażałaby się w tym przypadku sprawność odwracalnego silnika Carnota, pracującego między najwyższą i najniższą temperaturą cyklu przedstawionego na rysunku?
Wskazówka: Zauważ, że przemiany 1 → 2 i 3 → 4 są adiabatyczne.



Rys. 37.10

2. Na rysunku 37.11 w układzie współrzędnych p, V przedstawiono cykl pracy silnika cieplnego, w którym ciałem roboczym jest gaz doskonały o cząsteczkach jednoatomowych.



Rys. 37.11

Oblicz:

a) ciepło pobrane przez gaz w jednym cyklu,

b) sprawność silnika.

3. Samochód o mocy $100\ \mathrm{KM}$ (koni mechanicznych) osiąga prędkość maksymalną $180\ \mathrm{km/h}$ przy zużyciu $12\ \mathrm{l}$ benzyny na $100\ \mathrm{km}$. Oblicz sprawność silnika. Przyjmij, że ciepło spalania benzyny wynosi $50\ \mathrm{MJ/kg}$, a jej gęstość to $0{,}7\ \mathrm{kg/dm^3}$. $1\ \mathrm{KM} = 736\ \mathrm{W}$.

4. Skuteczność chłodzenia chłodziarki wynosi $2{,}7$. Chłodziarka ta w ciągu 2 godzin zużywa $7\ \mathrm{kWh}$ energii. Oblicz ciepło pobrane przez nią z ochładzanego pomieszczenia w ciągu doby.

5. Człowiekowi (i zwierzętom) potrzebna jest energia do pracy wszystkich narządów, utrzymywania odpowiedniej temperatury ciała i wykonywania codziennych czynności, w tym także oddychania. Na produktach spożywczych podawana jest ich tzw. wartość energetyczna, informująca o ilości energii, którą organizm może przyswoić po spożyciu tych produktów. Wartość energetyczną podaje się w kilodżulach lub kilokaloriach dla określonej masy, np. $100\ \mathrm{g}$, produktu. Kilokaloria $(1\ \mathrm{kcal})$ jest to ilość energii (ciepła) potrzebna do ogrzania $1\ \mathrm{kg}$ wody o $1^\circ\mathrm{C}$ (lub o $1\ \mathrm{K}$).
Na podstawie informacji podanych na produktach składających się na twoje śniadanie określ wartość energetyczną spożytego posiłku. Następnie oszacuj, jaka masa wody ogrzałaby się o $1^\circ\mathrm{C}$ w wyniku pobrania tej energii.



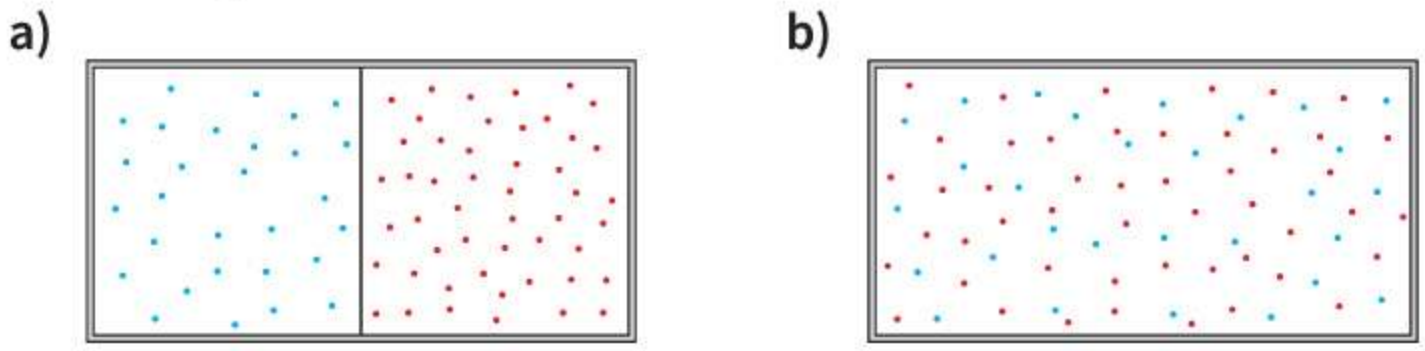
38. Fluktuacje. Wzmianka o entropii

- Fluktuacje
- Entropia układu jako miara jego nieuporządkowania
- Entropia a prawdopodobieństwo stanu
- Ogólne sformułowanie drugiej zasady termodynamiki i jej charakter statystyczny

Przypomnij sobie przykłady zachodzących samorzutnie procesów nieodwracalnych.

W tym rozdziale podamy ogólne sformułowanie drugiej zasady termodynamiki, które stosuje się nie tylko do procesów fizycznych, ale do wszystkich procesów przyrodniczych.

Poprzednio wielokrotnie mówiliśmy o stanie równowagi termodynamicznej, w którym charakteryzujące układ wielkości makroskopowe (temperatura, gęstość, ciśnienie) **nie ulegają zmianie wraz z upływem czasu**.
Wyobraźmy sobie izolowany cieplnie od otoczenia pojemnik przedzielony przegrodą. W stanie początkowym po obu stronach przegrody znajdują się różne gazy, mogą one mieć także różne temperatury i ciśnienia (rys. 38.1a). Po usunięciu przegrody nastąpi dyfuzja – w stanie końcowym pojemnik wypełni mieszanina gazów, której temperatura i ciśnienie w żadnym obszarze nie będą zmieniać się z czasem (rys. 38.1b), będzie to więc stan równowagi.

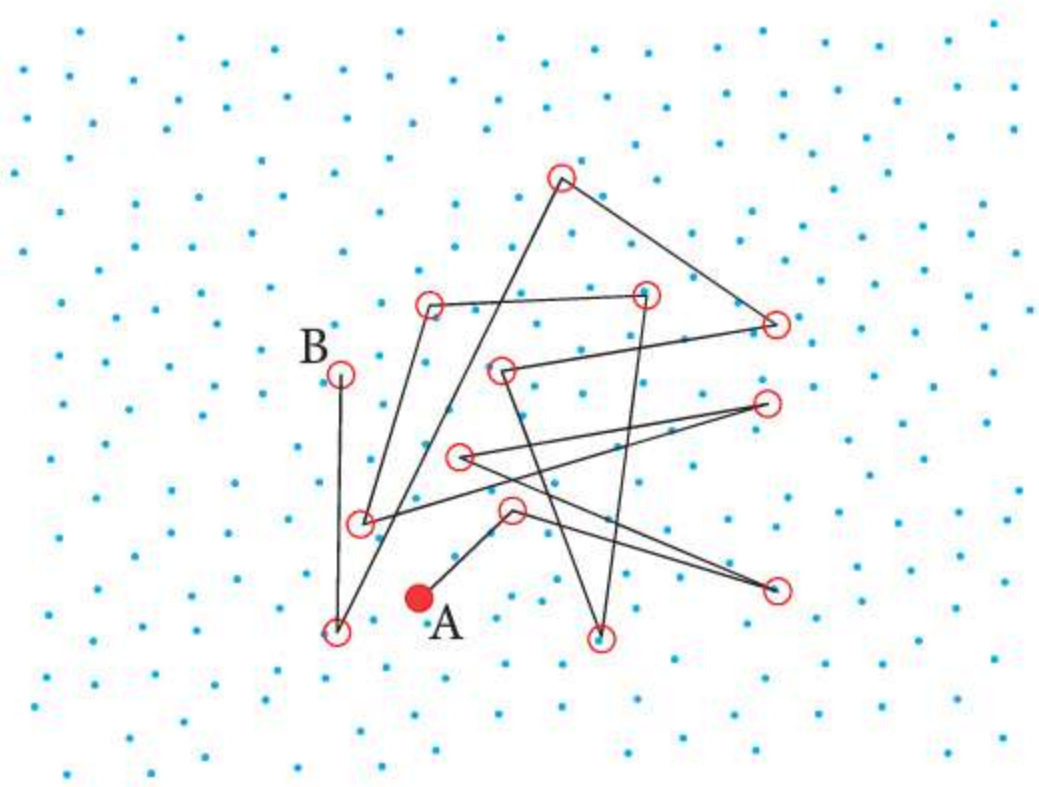


Rys. 38.1 Różne gazy w pojemniku z przegrodą – stan początkowy (a); stan końcowy po usunięciu przegrody (b)

Jednak w rzeczywistości układ, który znajduje się w stanie równowagi termodynamicznej, nieznacznie odchyla się od tego stanu, tzn. charakteryzujące go wielkości makroskopowe nigdy nie są dokładnie stałe, lecz w sposób nieuporządkowany wahają się (oscylują) wokół wartości średnich. Te chaotyczne odchylenia od wartości średnich, zachodzące w małych odstępach czasu, nazywamy **fluktuacjami**. Dla bardzo dużych układów (np. zbiornika z gazem o bardzo dużej liczbie cząsteczek) fluktuacje są niewielkie i praktycznie nieobserwowalne. Gdy w zbiorniku znajduje się mała liczba cząsteczek, to ich nierównomierne rozmieszczenie w obu połówkach naczynia jest dość prawdopodobne (tym bardziej prawdopodobne, im mniej jest cząsteczek).

O występowaniu fluktuacji świadczą obserwowalne pod mikroskopem **ruchy Browna**, czyli ruchy niewielkich cząstek zawiesiny w cieczy, a także pyłków kurzu w powietrzu. Po raz pierwszy zaobserwował je w 1827 roku botanik Robert Brown, ale dopiero około 100 lat później wytłumaczyli je Albert Einstein i niezależnie od niego polski fizyk Marian Smoluchowski.

Ruch cząstki zawiesiny następuje przez przypadkowe fluktuacje w stanie równowagi – na cząstkę działa zmieniająca się wypadkowa sił wywieranych na nią podczas przypadkowych uderzeń cząsteczkami otaczającego środowiska (cieczy lub gazu). Rozmiary zawiesiny są małe, zatem liczba przypadkowych uderzeń z różnych stron jest także niewielka, dlatego cząstka ulega znacznym fluktuacjom. Przypadkowe przemieszczenia cząstki zawiesiny można łatwo zaobserwować (rys. 38.2).



Rys. 38.2 Ruchy Browna

Dobrym przykładem fluktuacji jest nieustanne drganie zwierciadełka czułego galwanometru, służącego do pomiaru natężenia bardzo słabych prądów elektrycznych. W tym przyrządzie zamiast ciężkiej wskazówki stosuje się małe zwierciadełko, przyczepione do sprężystej, kwarcowej nici, na której zawieszona jest cewka odchylająca się w polu magnetycznym tym bardziej, im silniejszy płynie przez nią prąd. Wtedy nitka – a wraz z nią zwierciadełko – ulegają skręceniu. Na skali obserwujemy ślad świetlny utworzony przez promień odbity. Gdyby nie fluktuacje w otaczającym powietrzu, zwierciadełko byłoby całkowicie nieruchome, jednak przypadkowe uderzenia wykonujących chaotyczne ruchy cząsteczek powietrza powodują ciągłe drgania zwierciadełka.

Ogólnie fluktuacje ograniczają czułość przyrządów pomiarowych zwłaszcza wtedy, gdy mierzone wielkości okazują się porównywalne z wielkością fluktuacji. W urządzeniach radiotechnicznych występują fluktuacje prądu elektrycznego, ponieważ wskutek przypadkowych zderzeń elektronów z jonami sieci krystalicznej przewodnika liczba elektronów przepływających przez poprzeczny przekrój przewodnika nie jest dokładnie stała. Stanowi to przyczynę powstawania w tych urządzeniach tzw. szumów, które utrudniają zarejestrowanie (odróżnienie od tła) bardzo słabych sygnałów.

Entropia

Mówimy, że gazy na rysunku 38.1a są **w stanie uporządkowanym** (w jednym zbiorniku gaz ma ciśnienie p_1 i temperaturę T_1, w drugim inny gaz ma ciśnienie p_2 i temperaturę T_2). Po usunięciu przegrody utrzymanie się stanu początkowego jest skrajnie mało prawdopodobne – następuje samorzutne przejście **do stanu nieuporządkowanego**, przedstawionego na rysunku 38.1b (całkowite wymieszanie się gazów, wyrównanie ciśnień i temperatury). Dla każdego jest jasne, jak nierozsądne byłoby oczekiwanie, że odwrotne przejście nastąpi samorzutnie, tzn. że cząsteczki gazów same **uporządkują się** z powrotem i sytuacja wróci do początkowej. Jest to niezmiernie mało prawdopodobne! Nie jest to przypadek. Okazuje się, że kierunek samorzutnych (nieodwracalnych) procesów w przyrodzie to kierunek od stanów mniej do bardziej prawdopodobnych, czyli **od stanów bardziej uporządkowanych do mniej uporządkowanych**. Procesy w kierunku odwrotnym mogą oczywiście mieć miejsce, ale nie są samorzutne, wymagają wykonania pracy lub dostarczania do układu energii z zewnątrz.

W termodynamice wprowadzono bardzo użyteczną wielkość zwaną **entropią** (S), która – podobnie jak energia wewnętrzna – jest funkcją stanu układu. Oznacza to, że zależy ona tylko od parametrów stanu układu (w przypadku gazu od jego temperatury i ciśnienia), a nie zależy od tego, jak ten stan został osiągnięty. Zmiana entropii podczas przejścia układu od stanu początkowego (1) do końcowego (2):

$$\Delta S = S_2 - S_1$$

nie zależy od sposobu przejścia między stanami. Nie będziemy tutaj podawać matematycznej definicji entropii, poprzestaniemy tylko na jej fizycznej interpretacji.

Entropia jest związana ze stopniem nieuporządkowania układu. Każdy układ może się znajdować w stanach o różnym stopniu nieuporządkowania i ma wtedy różną wartość entropii. **Im większy stopień nieuporządkowania, tym większa wartość entropii.** Wobec tego entropia gazu w stanie końcowym, przedstawionym na rysunku 38.1b, jest większa od jego entropii w stanie początkowym ($S_2 > S_1$). Pojęcie entropii umożliwia najbardziej **ogólne sformułowanie drugiej zasady termodynamiki**:

> W przyrodzie samorzutnie zachodzą tylko takie procesy, w wyniku których entropia układu wzrasta.

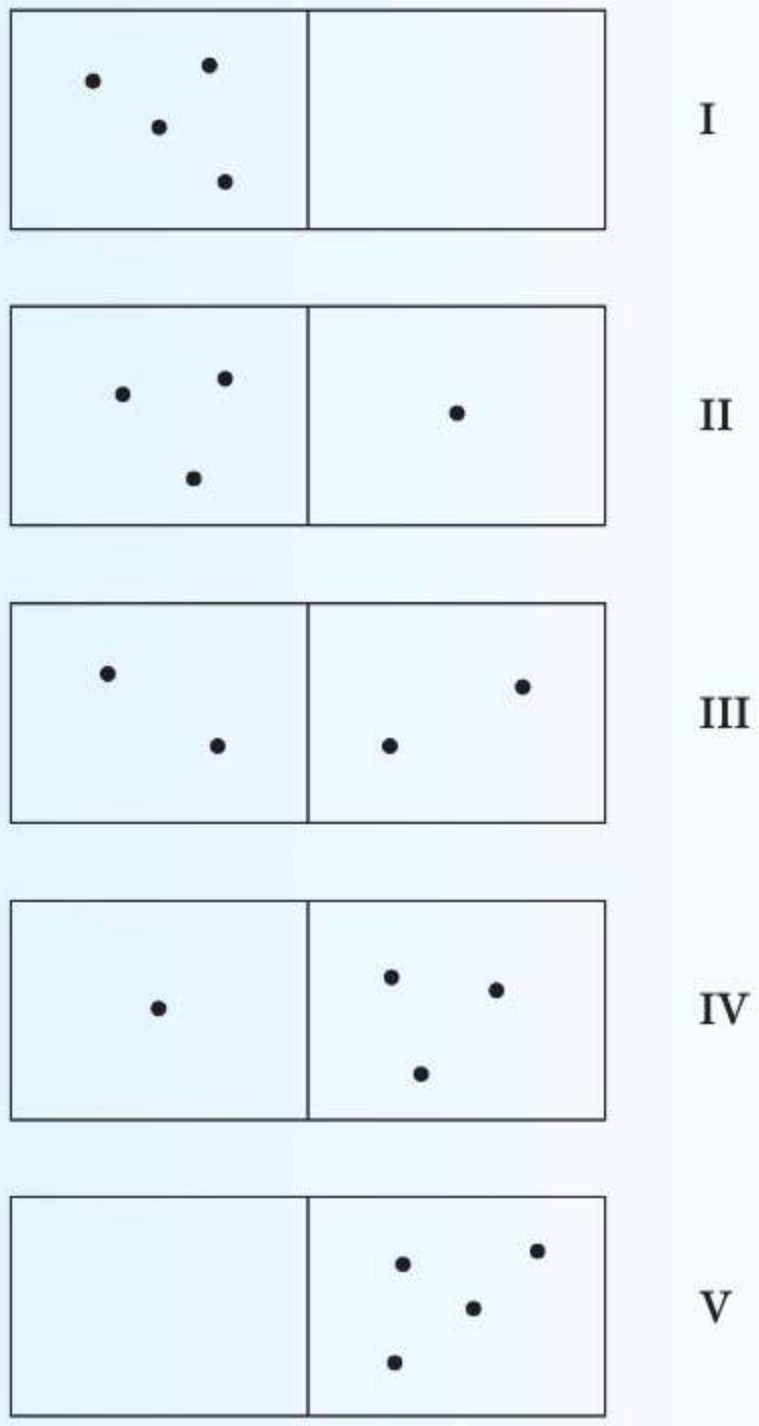
Prawdopodobieństwo termodynamiczne stanu nieuporządkowanego jest większe, więc procesy samorzutne zawsze zachodzą od stanu mniej do bardziej prawdopodobnego. Jest to równoważne stwierdzeniu, że entropia układu w danym stanie jest rosnącą funkcją jego prawdopodobieństwa. Stan równowagi jest zawsze najbardziej prawdopodobny ze wszystkich możliwych stanów.

Przykład 38.1

Entropia a prawdopodobieństwo stanu układu

W tym przykładzie pokażemy, że im większe jest nieuporządkowanie układu w danym stanie, tym stan ten jest bardziej prawdopodobny. Pojęcie **termodynamicznego prawdopodobieństwa stanu** wprowadzimy na podstawie analizy prostego przykładu. Załóżmy, że mamy układ złożony tylko z czterech cząsteczek, poruszających się chaotycznie z jednakowymi szybkościami i mieszczących się w naczyniu podzielonym na dwie równe części. Jakie są możliwości rozkładu (rozmieszczenia) tych cząsteczek w poszczególnych częściach naczynia? Ile jest różnych możliwości?

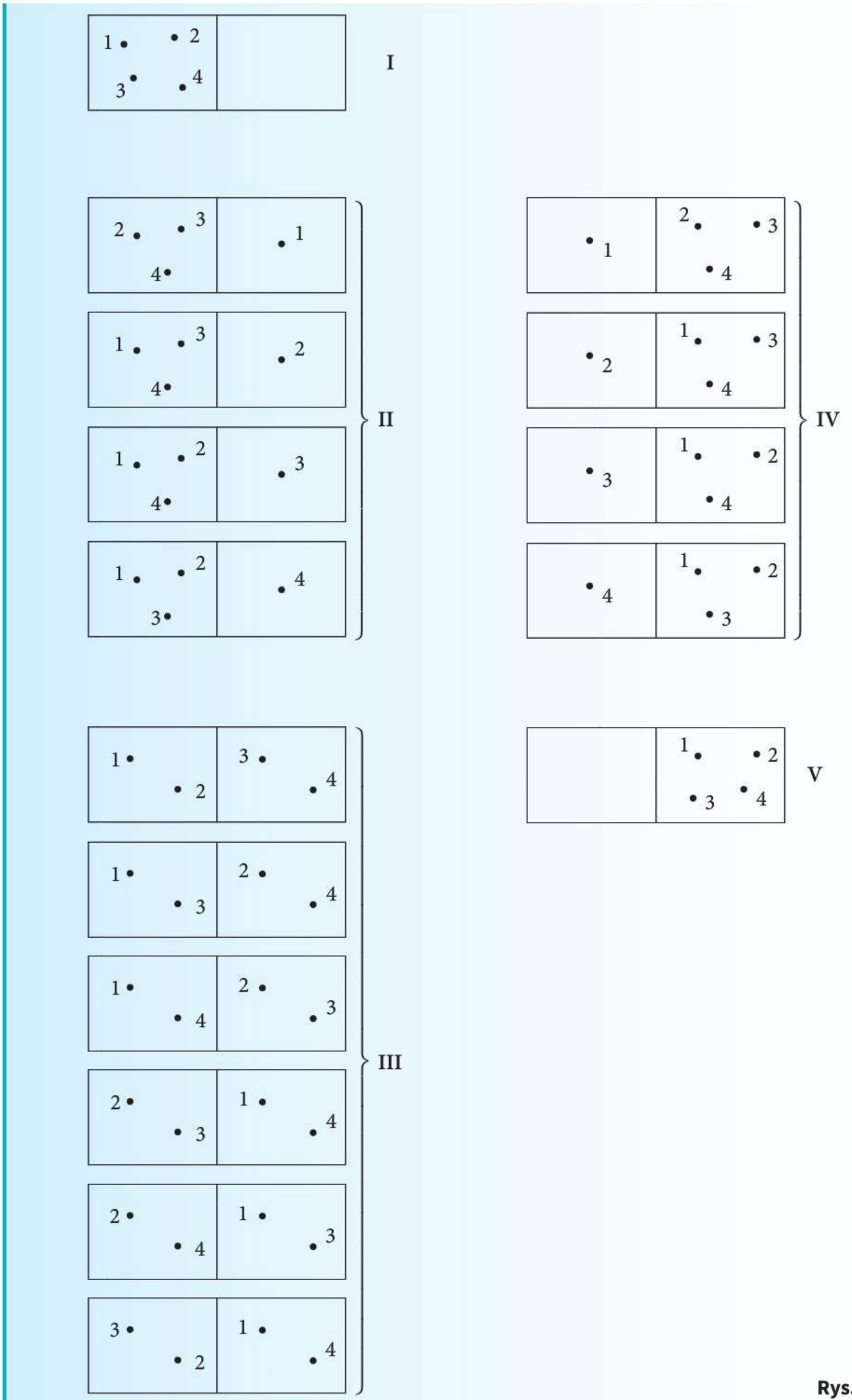
Gdyby cząsteczki były **nierozróżnialne**, możliwości byłoby 5 (od I do V) i byłyby one takie, jak przedstawiono na rysunku 38.3.



Rys. 38.3

Mówimy, że w tym przypadku istnieje 5 możliwych **makrostanów**. Poszczególne makrostany, jak widać na rysunku, różnią się od siebie tym, że w różnych częściach naczynia są różne liczby cząsteczek (charakterystyczne dla każdego makrostanu). Jeżeli teraz założymy, że cząsteczki są **rozróżnialne**, możliwości będzie o wiele więcej. Tylko w makrostanach I i V liczba możliwości nie ulegnie zwiększeniu, ale np. w makrostanie II będą 4 takie możliwości, co pokazuje rysunek 38.4.

Mówimy, że niektóre makrostany mogą być realizowane przez kilka różnych **mikrostanów**, tzn. takich stanów, które nie różnią się liczbą cząsteczek zawartych w poszczególnych częściach naczynia, ale nie są to te same cząsteczki. W podanym przykładzie liczba wszystkich mikrostanów jest równa 16. Prawdopodobieństwo wystąpienia danego makrostanu jest tym większe, im więcej mikrostanów pozwala ten makrostan zrealizować (tym częściej bowiem natrafiamy na dany makrostan podczas obserwacji).



Rys. 38.4

Miarą termodynamicznego prawdopodobieństwa stanu (makrostanu) jest liczba mikrostanów realizujących dany makrostan. Zwróć uwagę, że tak określone prawdopodobieństwo jest zawsze większe od jedynki lub równe jeden. Tak więc w rozpatrywanym przykładzie makrostan III jest **tylko** 6 razy bardziej prawdopodobny niż makrostan I lub V. Jednak gdy liczba cząsteczek układu wzrasta, stosunek tych prawdopodobieństw (największego do najmniejszego) gwałtownie rośnie.

Okazuje się, że zawsze najbardziej prawdopodobny jest taki stan, w którym w każdej części naczynia będzie się znajdowała taka sama liczba cząsteczek. Jest to zarazem stan najbardziej nieuporządkowany. Najmniej prawdopodobny jest stan charakteryzujący się największym uporządkowaniem (wszystkie cząsteczki mieszczą się w jednej części naczynia).

Na początku tego rozdziału stwierdziliśmy, że odchylenia od średniej wartości dowolnego parametru w niewielkich układach mogą być znaczne. Na skutek fluktuacji układ może samorzutnie przechodzić od najbardziej prawdopodobnego stanu równowagi do stanu mniej prawdopodobnego, czyli jego entropia może chwilowo ulegać zmniejszeniu. Fakt ten wskazuje na ograniczoność stosowalności drugiej zasady termodynamiki dla małych układów. Należy pamiętać, że **zasada ta ma charakter statystyczny**, stosuje się lepiej do dużych układów.

Jak powiązać zasadę wzrostu entropii (nieuporządkowania) z obserwowanymi w przyrodzie coraz doskonalszymi, coraz bardziej złożonymi, a więc uporządkowanymi formami życia? Na pierwszy rzut oka te dwa fakty pozostają ze sobą w sprzeczności. Przeanalizujemy ten problem.

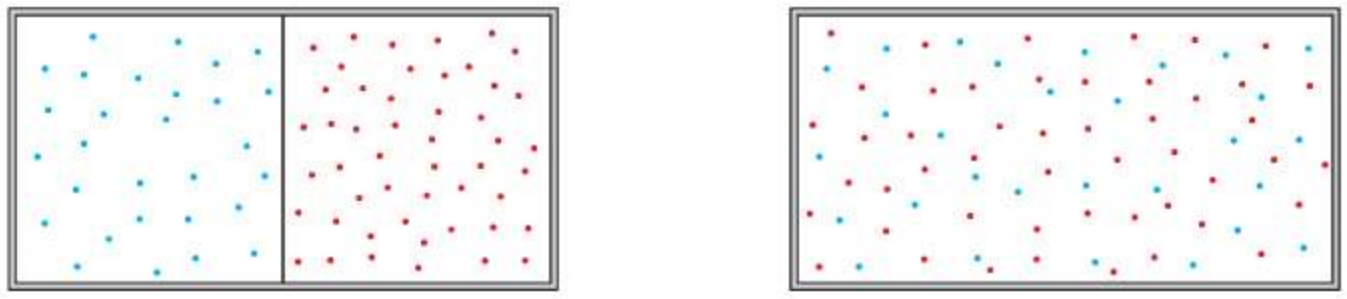
Zwierzęta zjadają rośliny lub inne zwierzęta (formy wysoko zorganizowane, o niskiej entropii), a wydalają dwutlenek węgla, wodę i niestrawione resztki (substancje o wysokiej entropii). Wobec tego entropia otoczenia wzrasta, a entropia zwierzęcia obniża się – następuje jego wzrost i rozwój. W szeroko pojętym układzie entropia niektórych części może maleć, ale entropia innych części wzrasta tak, że w efekcie entropia całego układu rośnie. Gdy zwierzę umiera, jego organizm nie otrzymuje już nowych dostaw energii. Dochodzi wówczas do procesu samorzutnego, który prowadzi do wzrostu entropii – organizm się rozkłada.

Sprawą istotną jest fakt, że jakakolwiek funkcja organizmu jest możliwa dzięki **pobieraniu energii z zewnątrz**, nie jest więc samorzutna. Potrzebnej energii dostarcza Słońce w postaci promieniowania. Słońce to tygiel, w którym bez przerwy od miliardów lat zachodzi proces samorzutny, a więc prowadzący do wzrostu entropii.

Rośliny w toku ewolucji nauczyły się wykorzystywać tę energię do zmniejszania własnej entropii. Chlorofil – ich zielony barwnik – potrafi wychwycić kwanty promieniowania świetlnego, a uzyskaną energię wykorzystać w tworzeniu wysokoenergetycznych związków chemicznych, które następnie zostają zużyte do reakcji syntezy związków jeszcze bardziej złożonych.

ZADANIA

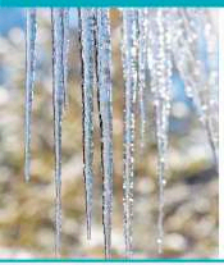
1. Do naczynia z gorącą wodą wstawiono naczynie o ściankach przewodzących zawierające zimną wodę. Opisz proces, który nastąpi samorzutnie, i stan końcowy układu stanowiącego sumę dwóch podukładów (początkowo woda zimna i woda gorąca).
2. Na rysunku 38.5 przedstawiono dwa stany (A i B) układu. W stanie A każda połówka zbiornika zawiera inny gaz. Gazy mogą mieć także inne temperatury i ciśnienia. Po usunięciu przegrody układ znajdzie się w stanie B.



A B **Rys. 38.5**

   a) Nazwij procesy, które doprowadziły układ od stanu A do stanu B.
   b) Czy procesy odwrotne mogłyby zajść samorzutnie? W którym stanie entropia układu jest większa?
3. Mamy dwa podukłady (stanowiące w sumie układ): 1 – kilka kostek lodu, 2 – naczynie z gorącą wodą. Jest to stan początkowy. Wrzucamy kostki lodu do wody.
   a) Opisz proces, który nastąpi samorzutnie, i stan końcowy układu.
   b) Porównaj entropię układu w stanie końcowym z jego entropią w stanie początkowym.
   c) Co można powiedzieć o zmianie entropii podukładu 1, która nastąpiła w wyniku opisanego procesu, a co – o zmianie entropii podukładu 2?

Wskazówka: Uwzględnij fakt, że cząsteczki w ciele stałym są bardziej uporządkowane niż w cieczy, a chaotyczny ruch cząsteczek cieczy o temperaturze wyższej jest bardziej wzmożony niż cieczy o temperaturze niższej.



39. Przejścia fazowe

- Topnienie, ciepło topnienia
- Parowanie i wrzenie, ciepło parowania
- Sublimacja i resublimacja
- Zastosowanie pierwszej zasady termodynamiki do przejść fazowych

Przypomnij sobie, co wiesz o zmianach stanu skupienia.

Z codziennych doświadczeń dobrze znamy zjawiska topnienia lodu i parowania wody. Pod względem chemicznym lód, woda i para wodna to ta sama substancja, ale w innych stanach skupienia. W każdym z tych stanów H_2O ma inne własności fizyczne. Stany skupienia nazywamy także fazami tej samej substancji (nie należy tego mylić z pojęciem fazy używanym w opisie ruchu drgającego), a dowolną zmianę stanu skupienia – **przejściem fazowym**.

O zmianach stanów skupienia była już mowa w szkole podstawowej. Przypominamy, że każda substancja o budowie krystalicznej ma pod ciśnieniem normalnym stałą, charakterystyczną dla siebie temperaturę topnienia (rys. 39.1), w której faza stała przechodzi w fazę ciekłą pod warunkiem, że z otoczenia dopływa energia (ciepło). Jeśli ciepło nie dopływa (substancja znajduje się w naczyniu zamkniętym o ściankach izolujących ją od otoczenia), to masy ciała stałego i cieczy nie ulegają zmianie, dowolnie długo znajdują się ze sobą w równowadze termodynamicznej.

Do opisu procesu topnienia wprowadzamy wielkość fizyczną zwaną **ciepłem topnienia**.



Rys. 39.1 Topnienie lodu

Ciepło topnienia to stosunek ilości ciepła Q potrzebnej do zamiany ciała stałego o masie m w ciecz (o tej samej temperaturze) do tej masy:

$$c_t = \frac{Q}{m} \qquad \text{skąd} \qquad Q = c_t m$$

Jednostką ciepła topnienia w SI jest J/kg.

Temperatura topnienia każdej substancji zależy od ciśnienia zewnętrznego.

Temperatury topnienia (pod ciśnieniem normalnym) wybranych substancji i ich ciepła topnienia podano w tabeli 39.1.

Tabela 39.1

Substancja	Temperatura topnienia (°C)	Ciepło topnienia (J/kg)
chlorek sodu	801	$4{,}82 \cdot 10^5$
cyna	232	$5{,}86 \cdot 10^4$
glin	660	$3{,}21 \cdot 10^5$
lód	0	$3{,}34 \cdot 10^5$
ołów	327	$2{,}32 \cdot 10^4$
rtęć	–39	$1{,}14 \cdot 10^4$
srebro	962	$1{,}03 \cdot 10^5$
wolfram	3420	$1{,}90 \cdot 10^5$
żelazo	1538	$2{,}47 \cdot 10^5$
naftalina	80	$1{,}5 \cdot 10^5$

Innym przejściem fazowym jest parowanie cieczy. Ciecz paruje w każdej temperaturze; cząsteczki cieczy odrywają się od jej powierzchni swobodnej i przechodzą w stan pary. W pierwszej kolejności udaje się to cząsteczkom, których energia kinetyczna jest wystarczająco duża, aby pokonać siłę wzajemnego przyciągania (spójności). Ciecz opuszczają więc cząsteczki najszybsze, dlatego temperatura warstwy powierzchniowej cieczy się obniża (znamy uczucie chłodu po wyjściu z kąpieli). Aby temperatura parującej cieczy się nie zmieniała, należy dostarczać cieczy ciepło z zewnątrz.

Ciepłem parowania nazywamy stosunek ilości ciepła Q potrzebnej do zamiany cieczy o masie m w parę (o tej samej temperaturze) do tej masy:

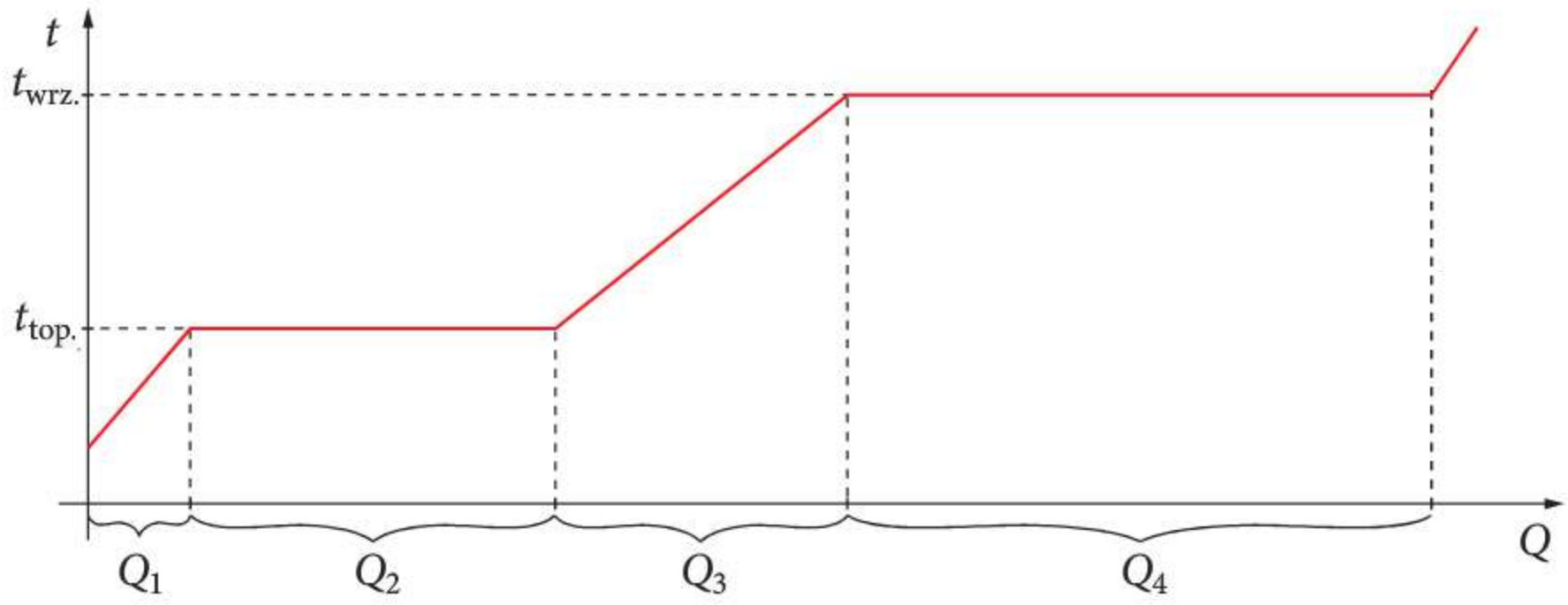
$$c_p = \frac{Q}{m} \qquad \text{skąd} \qquad Q = c_p m$$

Jednostką ciepła parowania w SI jest J/kg. **Ciepło parowania** zależy od rodzaju cieczy i maleje wraz ze wzrostem jej temperatury (patrz zadanie 2 na s. 239).
Wrzenie to parowanie w całej objętości cieczy (rys. 39.3 na s. 238). Pęcherze pary wydobywają się wówczas z jej wnętrza. Wrzenie każdej cieczy zachodzi w charakterystycznej dla niej temperaturze, która pozostaje podczas tego procesu stała i jest zależna od zewnętrznego ciśnienia (wyjaśniamy to w rozdziale 40). W tabeli 39.2 podano **temperatury wrzenia** (pod ciśnieniem normalnym) i ciepła parowania kilku substancji w ich temperaturze wrzenia.

Tabela 39.2

Substancja	Temperatura wrzenia (°C)	Ciepło parowania (J/kg)
alkohol etylowy	78	$8{,}37 \cdot 10^5$
amoniak	–33	$1{,}37 \cdot 10^6$
eter etylowy	34	$3{,}58 \cdot 10^5$
rtęć	357	$2{,}72 \cdot 10^5$
srebro	2155	$3{,}36 \cdot 10^6$
woda	100	$2{,}26 \cdot 10^6$
wodór	–253	$4{,}53 \cdot 10^5$
żelazo	2800	$7{,}14 \cdot 10^2$

Rysunek 39.2 przedstawia zależność temperatury substancji od ilości dostarczonego ciepła (przy założeniu, że nie zachodzą straty ciepła do otoczenia).



Rys. 39.2 Zależność temperatury substancji od ilości dostarczonego ciepła

Na początku mamy do czynienia z fazą stałą, obserwujemy więc ogrzewanie (wzrost temperatury) substancji aż do temperatury topnienia. Podczas dalszego dostarczania ciepła następuje proces topnienia, więc temperatura nie ulega zmianie.
Objaśnij, jakie procesy będą zachodziły w następnej kolejności, jeśli nie przerwiemy dopływu ciepła. W jaki sposób (jeżeli znamy masę ciała) możemy obliczyć kolejne porcje ciepła Q_1, Q_2, Q_3, Q_4? Jakie wielkości muszą być dodatkowo znane?
Uwaga: Ilości ciepła dostarczone w celu ogrzania cieczy do temperatury wrzenia i zamiany jej w parę obliczamy tak, jakby ciecz parowała dopiero podczas wrzenia.

Niekiedy na osi poziomej zamiast dostarczonych ilości ciepła odkłada się odstępy czasu, w których zachodzą kolejne procesy. Jakie założenie musiałoby być wówczas spełnione, aby wykres przebiegał podobnie?

Przypomniane dotąd wiadomości na temat przejść fazowych (zmian stanu skupienia) powinny być ci znane z klasy ósmej.

Teraz wyjaśnimy, na co jest zużywane ciepło dostarczone podczas topnienia ciała stałego i parowania cieczy. W tym celu zastosujemy do tych procesów pierwszą zasadę termodynamiki, pamiętając równocześnie o cząsteczkowej budowie ciała stałego, cieczy i pary. Jak wiadomo, podczas topnienia temperatura nie ulega zmianie, więc nie zmienia się średnia energia ruchu postępowego cząsteczek cieczy w porównaniu ze średnią energią kinetyczną ruchu drgającego, jaki wykonują cząsteczki ciała stałego wokół swojego położenia równowagi. Jednak podczas topnienia struktura krystaliczna ciała stałego zostaje zniszczona, ponieważ amplituda drgań cząsteczek (atomów lub jonów) w temperaturze topnienia staje się dostatecznie duża, by zniszczyć tę strukturę, tj. zerwać wiązania. Stan znacznego uporządkowania w ciele stałym przechodzi w stan mniejszego uporządkowania, charakterystycznego dla cieczy. W związku z tym rośnie średnia energia potencjalna wzajemnego oddziaływania cząsteczek. Cząsteczki cieczy mają znacznie większą swobodę ruchu, mogą prócz ruchu postępowego wykonywać także obroty (pojawiają się więc nowe stopnie swobody), zyskują więc dodatkową energię kinetyczną ruchu obrotowego. Energia wewnętrzna substancji podczas topnienia rośnie o takie składniki.

Powstaje pytanie, czy energia ta rośnie dokładnie o tyle, ile ciepła dopłynęło z zewnątrz do topniejącego ciała.

W trakcie topnienia objętość substancji ulega zmianie w niewielkim stopniu. Nie wszystkie substancje zachowują się pod tym względem jednakowo. Większość z nich podczas topnienia zwiększa objętość, jednak objętość innych (w tym wody) maleje. Tak więc praca siły zewnętrznej (parcia powietrza) wykonana podczas topnienia jest dla większości ciał ujemna, ale np. podczas topnienia lodu – dodatnia. Z pierwszej zasady termodynamiki wynika, że przyrost energii wewnętrznej po stopnieniu jest nieco mniejszy lub nieco większy od pobranego ciepła. Różnica ta jest jednak bardzo mała, ponieważ zmiana objętości jest niewielka, można ją zatem pominąć.

Podobnie możemy przeprowadzić analizę energetyczną procesu parowania cieczy (np. wrzenia wody pod ciśnieniem normalnym – rys. 39.3) i przekonać się, że przyrost energii wewnętrznej podczas tego procesu nie jest dokładnie równy pobranemu ciepłu. Oczywiście energia wewnętrzna pary jest większa od energii wewnętrznej cieczy o tej samej masie i temperaturze, ponieważ wzrosła średnia odległość wzajemna cząsteczek, które w cieczy się przyciągały. Wzrosła więc także energia potencjalna cząsteczek.



Rys. 39.3 Wrzenie wody

Objętość pary jest znacznie większa od objętości cieczy o tej samej masie, gdyż para ma znacznie mniejszą gęstość niż ciecz. Nietrudno wywnioskować, że podczas zamiany cieczy w parę siły zewnętrzne wykonują pracę ujemną, więc niecałe pobrane ciepło jest zużywane na wzrost energii wewnętrznej ($\Delta U < Q$).

ZADANIA

1. Miarą szybkości parowania jest masa pary tworzącej się w jednej sekundzie nad jednostkową powierzchnią parującej cieczy. Doświadczenie wskazuje, że szybkość parowania każdej cieczy rośnie ze wzrostem jej temperatury, a maleje ze wzrostem ciśnienia panującego nad cieczą. Ta szybkość zależy także od ilości pary zawartej w powietrzu nad powierzchnią cieczy. Jak można w prosty sposób wytłumaczyć te fakty na podstawie teorii kinetyczno-molekularnej?

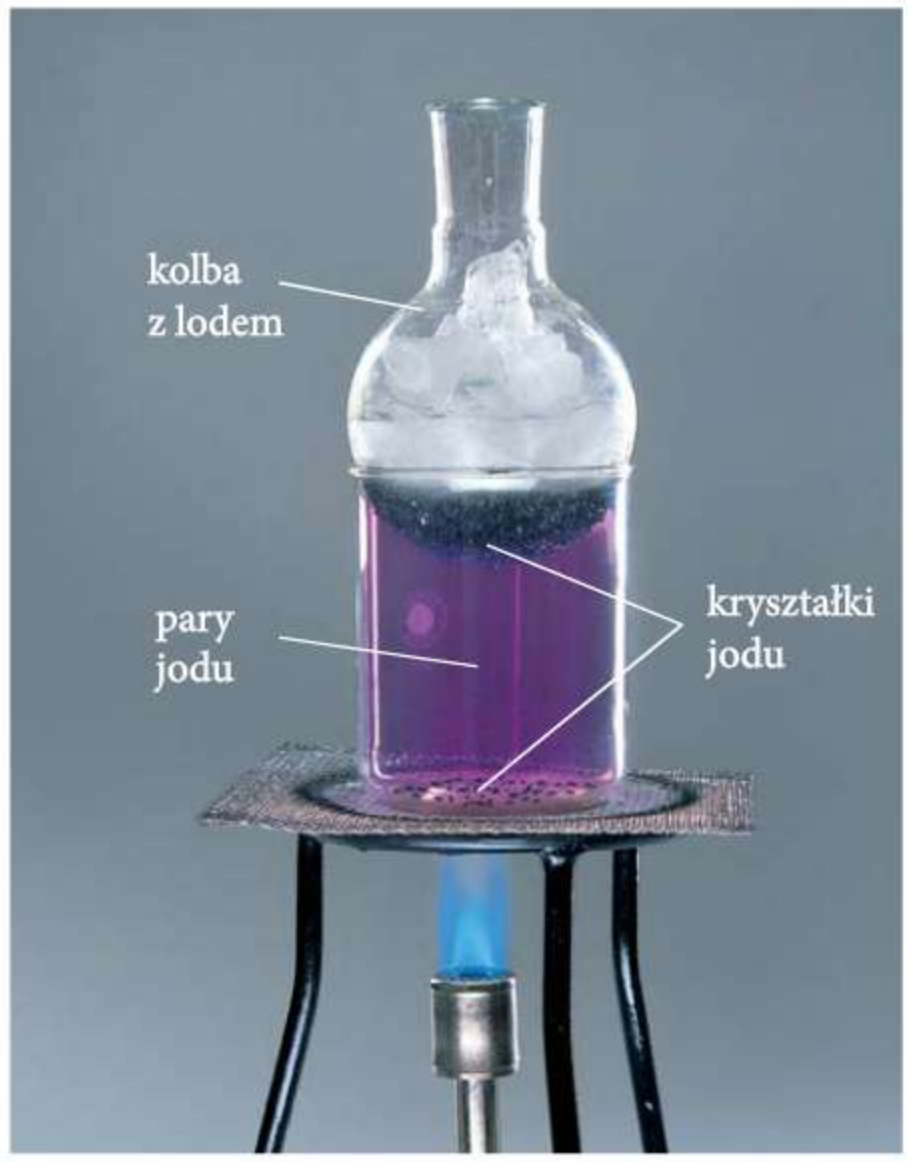
2. Woda ma stosunkowo duże ciepło parowania, np. w $20^\circ\mathrm{C}$ wynosi ono $2{,}45 \cdot 10^6\ \mathrm{J/kg}$, a w $100^\circ\mathrm{C}$ jest równe $2{,}26 \cdot 10^6\ \mathrm{J/kg}$. Jaki jest sens fizyczny tych wielkości? Spróbuj wyjaśnić zjawisko zmniejszania się ciepła parowania cieczy wraz ze wzrostem temperatury.

3. Oblicz całkowitą ilość ciepła, którą trzeba dostarczyć kawałkowi lodu o masie $0{,}5\ \mathrm{kg}$ i temperaturze początkowej $-10^\circ\mathrm{C}$, a następnie wodzie powstałej z lodu, aby otrzymać $0{,}5\ \mathrm{kg}$ pary wodnej o temperaturze $100^\circ\mathrm{C}$. Przyjmij, że ciepło właściwe lodu wynosi $2{,}10 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{K}}$, a wody $4{,}19 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{K}}$. Ciepło topnienia lodu i ciepło parowania wody odczytaj z tabel. Który z tych procesów wymaga dostarczenia największej ilości ciepła? Jaki to procent całkowitej ilości ciepła?

4. Zmiana fazy stałej w parę nosi nazwę sublimacji, a zmiana odwrotna – resublimacji (zestalania pary).
a) Podaj po jednym przykładzie każdej z tych zmian.
b) Wyjaśnij, które składniki energii wewnętrznej substancji wzrastają podczas sublimacji.
c) Jakie są znaki ΔU, Q i W (praca siły zewnętrznej) podczas sublimacji, a jakie – podczas resublimacji?

5. Opisz procesy przedstawione na rysunku 39.4.

6. Rozstrzygnij, jak zmienia się entropia substancji podczas topnienia, a także podczas parowania. Podaj uzasadnienie.



Rys. 39.4



40. Para nasycona i para nienasycona

- Para nasycona
- Para nienasycona
- Zależność ciśnienia pary nasyconej od temperatury

Przypomnij sobie zależność ciśnienia gazu od temperatury w stałej objętości.

Niewielka ilość wody pozostawiona w otwartym naczyniu po pewnym czasie wyparuje, a cząsteczki pary rozejdą się w całym pomieszczeniu. Jeżeli jednak wlejemy tę wodę do niewielkiego naczynia i szczelnie je zamkniemy, to tylko część wody wyparuje. Co więcej, stwierdzimy, że jeśli temperatura nie będzie ulegać zmianie, to masa wody (w postaci ciekłej) w naczyniu także pozostanie stała. Nad wodą utworzy się **para nasycona**. Tak nazywamy parę, która jest w równowadze termodynamicznej z cieczą, z której powstała, tzn. ani nie ubywa cieczy, ani nie przybywa pary[24]. Para taka nie może już przyjąć więcej cząsteczek, jej ciśnienie i gęstość mają w danej temperaturze największe wartości.

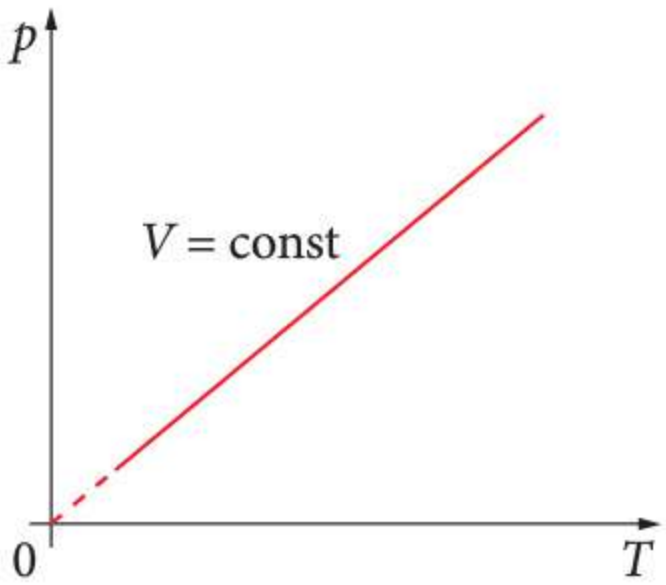
Gdyby funkcję zamkniętego naczynia pełnił cylinder z ruchomym tłokiem, to objętość pary moglibyśmy zmniejszać. Zmniejszanie objętości nie spowodowałoby wzrostu ciśnienia pary nasyconej – nadmiar pary ulegałby skropleniu. W naczyniu byłoby coraz więcej cieczy, a coraz mniej pary, ciągle o takim samym ciśnieniu. Gdybyśmy zwiększali objętość cylindra, przesuwając powoli tłok w górę, to przy zachowaniu stałej temperatury ciśnienie nie ulegałoby zmianie, dopóki para byłaby nasycona (zapewnia to obecność cieczy na dnie naczynia). Przy dalszym zwiększaniu objętości ciecz wyparuje i od tej chwili para stanie się **nienasycona**, a jej ciśnienie będzie maleć ze wzrostem objętości w przybliżeniu tak, jak to się dzieje z gazem w stałej temperaturze.

Zwiększanie temperatury cieczy i pary nasyconej w naczyniu zamkniętym spowodowałoby dodatkowo wyparowanie pewnej ilości cieczy, a to z kolei wpłynęłoby na zwiększenie się gęstości pary. Wzrosłoby także jej ciśnienie.

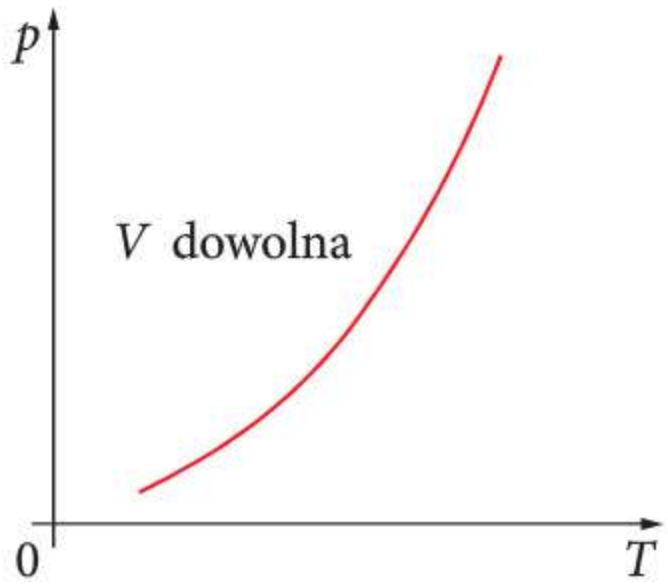
Ciśnienie pary nasyconej można zwiększyć jedynie przez wzrost temperatury.

[24] Ściśle mówiąc, jest to tzw. równowaga dynamiczna, tzn. pewna ilość wody zmienia się w parę, ale w tym samym czasie taka sama ilość pary przechodzi w ciecz; w rezultacie ani masa pary, ani cieczy się nie zmienia.

Pary nienasycone stosują się do praw gazowych z tym lepszym przybliżeniem, im mniejsze jest ich ciśnienie w stosunku do ciśnienia pary nasyconej. Na przykład w stałej objętości ciśnienie pary nienasyconej rośnie w przybliżeniu wprost proporcjonalnie do jej temperatury bezwzględnej (rys. 40.1).



Rys. 40.1 Zależność ciśnienia pary nienasyconej (w stałej objętości) od temperatury



Rys. 40.2 Zależność ciśnienia pary nasyconej od temperatury; objętość dowolna, gdyż ciśnienie pary nasyconej nie zależy od objętości

Zależność ciśnienia pary nasyconej od temperatury przedstawiono na rysunku 40.2. Wykres wskazuje, że ciśnienie pary nasyconej przy ogrzewaniu wzrasta bardziej gwałtownie niż ciśnienie pary nienasyconej. Jest to zrozumiałe. Przyczyna wzrostu ciśnienia pary nienasyconej (gdy V = const) jest tylko jedna – wzrost średniej energii kinetycznej ruchu postępowego cząsteczek. Natomiast ciśnienie pary nasyconej wzrasta z dwóch powodów: wzrostu średniej energii kinetycznej ruchu postępowego cząsteczek oraz wzrostu liczby cząsteczek pary w jednostce objętości, bowiem w wyższej temperaturze ciecz dodatkowo paruje.

W poprzednim rozdziale stwierdziliśmy, że temperatura wrzenia każdej cieczy zależy od ciśnienia zewnętrznego. Podczas wrzenia z wnętrza cieczy wydobywają się na jej powierzchnię pęcherzyki pary otoczonej cieczą ze wszystkich stron, a więc pary nasyconej. Jest to możliwe tylko wtedy, gdy ciśnienie w pęcherzyku jest co najmniej równe ciśnieniu panującemu nad cieczą. Gdy zwiększymy to ciśnienie, musi wzrosnąć także ciśnienie pary nasyconej, a więc temperatura cieczy.
Inaczej mówiąc:

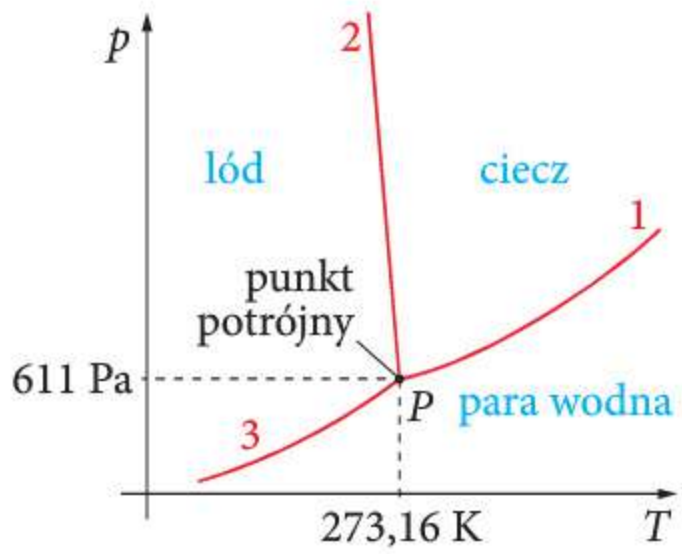
> Każda ciecz wrze w takiej temperaturze, w której ciśnienie jej pary nasyconej jest równe ciśnieniu zewnętrznemu.

Krzywa zależności $p(T)$ na rysunku 40.2 jest zarazem krzywą równowagi pary nasyconej z cieczą, ponieważ para nasycona znajduje się w naczyniu zamkniętym nad cieczą o tej samej temperaturze.

WIEDZIEĆ WIĘCEJ

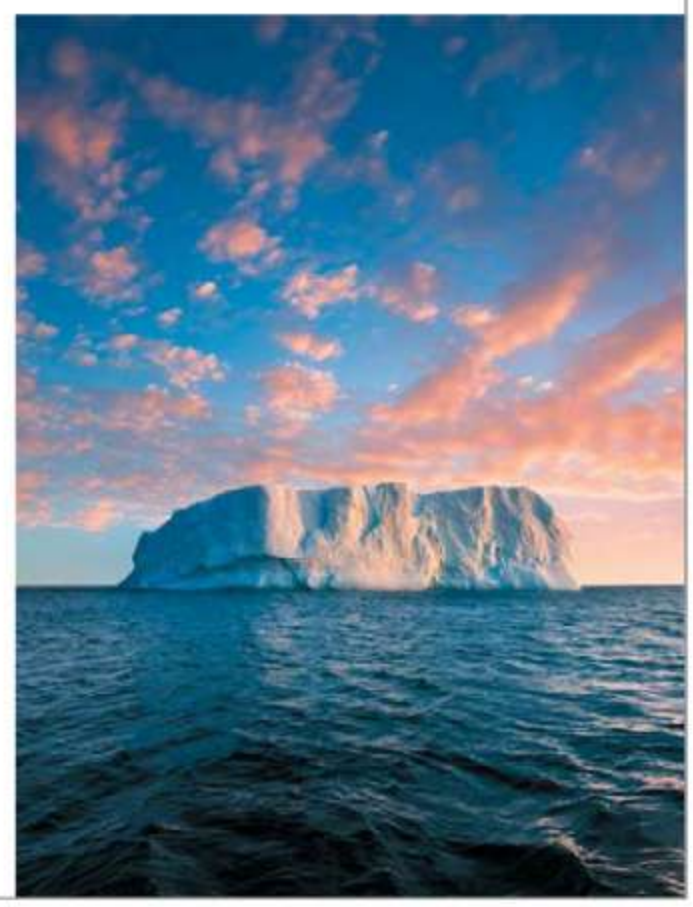
Punkt potrójny i współistnienie trzech faz dla wody

Podobnie jak dla cieczy i pary nasyconej (krzywa 1 parowania i skraplania) możemy wykreślić krzywą równowagi między ciałem stałym i cieczą (krzywa 2 topnienia i krzepnięcia) oraz między ciałem stałym i parą nasyconą (krzywa 3 sublimacji i resublimacji). Wszystkie trzy krzywe schodzą się w jednym punkcie P, zwanym **punktem potrójnym**, w którym wszystkie trzy fazy: ciało stałe, ciecz i para nasycona istnieją z sobą w równowadze termodynamicznej. Wykres ilustruje krzywe równowagi dla wody.



Punkt potrójny to zespół dwóch wielkości: ciśnienia i temperatury w punkcie P, które dla wody są równe: $p_{\mathrm{P}} = 611\ \mathrm{Pa},\ T_{\mathrm{P}} = 273{,}16\ \mathrm{K}$. Wartości liczbowe tych wielkości pokazują, że w warunkach ziemskich woda może równocześnie występować we wszystkich stanach skupienia, chociaż nie zawsze pozostają one ze sobą w równowadze.

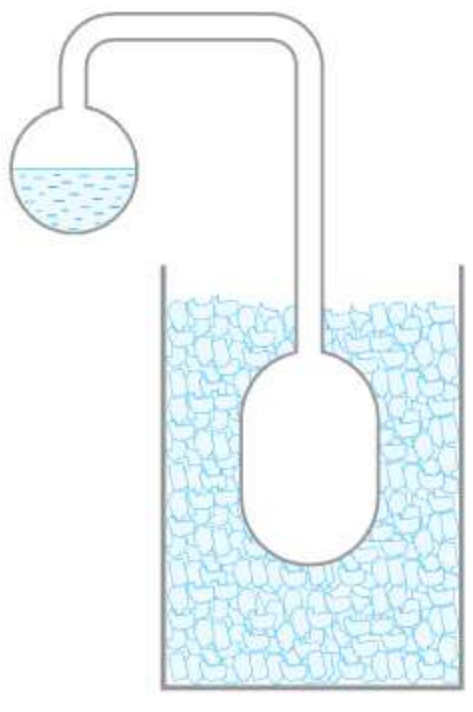
Odczytaj z wykresu, jak temperatura topnienia lodu zależy od ciśnienia, pod którym zachodzi topnienie[25]. Co może się zdarzyć, gdy na lód o temperaturze niższej od $0^{\circ}\mathrm{C}$ będziemy wywierać odpowiednio duże ciśnienie?



ZADANIA

1. Za pomocą tzw. krioforu można pokazać zjawisko szybkiego parowania wody pod zmniejszonym ciśnieniem. Kriofor składa się z dwóch szklanych zbiorników połączonych wygiętą rurką (rys. 40.3).

W górnym zbiorniku znajduje się trochę wody, resztę miejsca w zbiornikach wypełnia nasycona para wodna (brak powietrza). Dolny zbiornik zanurzamy w mieszaninie oziębiającej (kawałki lodu zmieszane z solą kuchenną). W niskiej temperaturze para wodna zestala się (resublimuje) na wewnętrznych ściankach zbiornika, wskutek czego ciśnienie pary nad wodą maleje. Po pewnym czasie zauważamy, że woda w górnym zbiorniku zamarza. Wyjaśnij dlaczego.



Rys. 40.3

[25] Dla większości substancji zależność ta jest odwrotna niż dla wody!



41. Rozszerzalność temperaturowa ciał

- Zjawisko rozszerzalności temperaturowej ciał stałych, cieczy i gazów
- Współczynnik rozszerzalności liniowej
- Współczynnik rozszerzalności objętościowej

Przypomnij sobie, co wiesz o rozszerzalności temperaturowej ciał oraz o zmianie objętości wody przy ogrzewaniu od $0°C$ do $4°C$.

Wzrost temperatury ciała stałego powoduje wzrost średniej energii kinetycznej jego cząsteczek przy równoczesnym wzroście energii potencjalnej (czyli wzroście amplitudy drgań jonów sieci krystalicznej wokół położeń równowagi). Jeśli będziemy rozpatrywać ten fakt makroskopowo, możemy stwierdzić, że wzrostowi temperatury ciała towarzyszy zawsze wzrost jego objętości. Mówimy więc o rozszerzalności temperaturowej ciał. To samo zjawisko dotyczy również ciał w innych stanach skupienia.

Niech V_0 oznacza objętość początkową ciała (np. w $0°C$), a V – objętość końcową, tzn. objętość ciała po zmianie temperatury. Wówczas $\Delta V = V - V_0$ stanowi przyrost objętości ciała spowodowany ogrzaniem o ΔT (bezwzględny przyrost objętości). Zmiana objętości jednostkowej objętości ciała w tych samych warunkach równałaby się $\frac{\Delta V}{V_0}$. Tę wielkość nazywamy względnym przyrostem objętości. Względny przyrost objętości ciała przy zmianie temperatury o jeden stopień wyniósłby odpowiednio:

$$\alpha = \frac{\Delta V}{V_0 \Delta T}$$

skąd:

$$\Delta V = \alpha V_0 \Delta T \qquad (41.1)$$

Współczynnik α nazywamy **współczynnikiem rozszerzalności objętościowej**. Zależy on od rodzaju substancji i jej stanu skupienia.

Ciała stałe mają określony kształt. Zmiana ich objętości wynika ze zmiany wszystkich wymiarów ciała. Teraz rozważymy jednak zmianę tylko jednego wymiaru, np. długości. Analogicznie do współczynnika rozszerzalności objętościowej wprowadzimy pojęcie **współczynnika rozszerzalności liniowej**. Oznaczamy go literą λ:

$$\lambda = \frac{\Delta l}{l_0 \Delta T}$$

skąd:

$$\Delta l = \lambda l_0 \Delta T \tag{41.2}$$

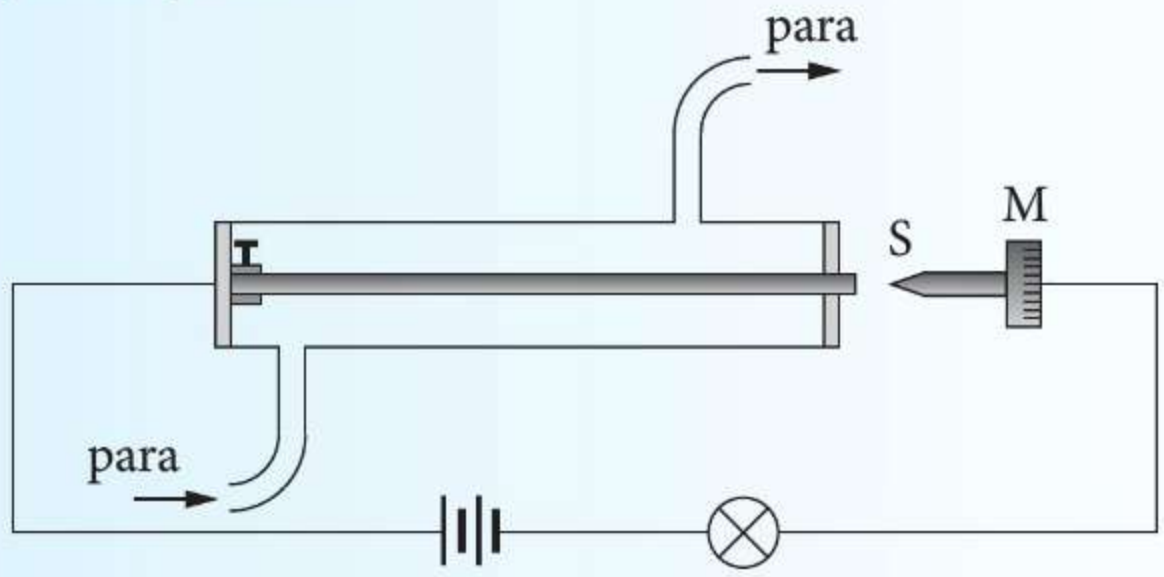
gdzie l_0 oznacza długość początkową, np. w $0°C$.

Współczynnik rozszerzalności liniowej możemy wyznaczyć doświadczalnie. Przyrząd, który do tego służy, nosi nazwę dylatometru.

Przykład 41.1

Dylatometr

Wyznaczymy współczynnik rozszerzalności liniowej miedzi na podstawie wyników pomiarów wykonanych z użyciem dylatometru.



Rys. 41.1

Budowę dylatometru przedstawia schematyczny rysunek 41.1. Jeden z końców metalowego pręta zamocowany jest nieruchomo, a drugi, umieszczony swobodnie, przesuwa się wskutek wydłużania. Pręt jest umieszczony w szklanej rurce, przez którą przepuszczamy parę wrzącej wody ($100°C$), i stanowi część obwodu elektrycznego zawierającego bateryjkę i żarówkę.

Styk S odsuwamy od końca pręta na odległość np. $1\ \text{mm}$ (odległość tę mierzymy śrubą mikrometryczną M z dokładnością do $0{,}01\ \text{mm}$). Po ogrzaniu i wydłużeniu się pręta dokręcamy śrubę, aby doprowadzić styk do kontaktu z końcem pręta – żarówka rozbłyska. Odczytujemy odległość, o którą przesunęliśmy styk, i obliczamy przyrost długości Δl (odczytaną odległość odejmujemy od $1\ \text{mm}$).

Dla miedzianego pręta o początkowej temperaturze $t_0 = 20°C$ i długości $l_0 = 30\ \text{cm}$ otrzymano $\Delta l = 0{,}41\ \text{mm}$.

$$\lambda = \frac{0{,}41\ \text{mm}}{80\ \text{K} \cdot 300\ \text{mm}} \approx 1{,}7 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{K}}$$

(patrz zadanie 1 na s. 246).

Współczynniki rozszerzalności objętościowej i liniowej substancji są ze sobą powiązane. Wykażemy, że współczynnik rozszerzalności objętościowej α ciał stałych jest w przybliżeniu trzykrotnie większy od współczynnika rozszerzalności liniowej λ.
Po przekształceniu wzorów definicyjnych (41.1) i (41.2) otrzymujemy:

$$l = l_0(1 + \lambda \cdot \Delta T) \tag{41.3}$$

$$V = V_0(1 + \alpha \cdot \Delta T) \tag{41.4}$$

Gdy ciało ma kształt sześcianu, to:

$$V_0 = l_0^3 \qquad \text{i} \qquad V = l^3$$

A zatem:

$$l^3 = l_0^3(1 + \lambda \cdot \Delta T)^3$$

więc:

$$1 + \alpha \cdot \Delta T = (1 + \lambda \cdot \Delta T)^3$$

Czyli:

$$\alpha = 3\lambda + 3\lambda^2 \cdot \Delta T + \lambda^3 \cdot (\Delta T)^2$$

Współczynniki rozszerzalności liniowej są bardzo małe (rzędu 10^{-5} lub $10^{-6}\frac{1}{\mathrm{K}}$), zatem wyrazy zawierające λ^2 i λ^3 można pominąć:

$$\alpha \approx 3\lambda$$

Dla ciał stałych nie ma więc potrzeby dokonywać pomiaru współczynnika rozszerzalności objętościowej. W tablicach umieszcza się jedynie współczynnik rozszerzalności liniowej.

Ciecze nie mają określonych wymiarów. Współczynnik rozszerzalności objętościowej wyznacza się dla nich doświadczalnie. Wartości współczynników rozszerzalności objętościowej cieczy są średnio 10 razy większe od wartości współczynników rozszerzalności objętościowej ciał stałych.

O rozszerzalności gazów wspomnieliśmy w rozdziale 31, przy omawianiu przemiany izobarycznej. Analogicznie do ciał stałych i cieczy możemy wprowadzić współczynnik rozszerzalności objętościowej gazów.

Przykład 41.2

Współczynnik rozszerzalności objętościowej gazów

Wykażemy, że prawo Gay-Lussaca zapisane w postaci:

$$\frac{V}{V_0} = \frac{T}{T_0} \qquad \text{lub} \qquad V = V_0\frac{T}{T_0} \tag{41.5}$$

można sprowadzić do postaci (41.4), w której wyraziliśmy zależność objętości od temperatury dla cieczy i ciał stałych.

Jeśli V_0 oznacza objętość gazu w $0^\circ\mathrm{C}$, to $T_0 = 273{,}15\ \mathrm{K}$, a $T = \left(\frac{t}{1^\circ\mathrm{C}} + 273{,}15\right)\mathrm{K}$. Ten wzór zapisujemy zwykle w uproszczeniu (aczkolwiek niezbyt ściśle) w postaci: $T = t + 273\ \mathrm{K}$.

Po podstawieniu do wzoru (41.5) otrzymujemy:

$$V = V_0\left(1 + \frac{1}{273{,}15^\circ\mathrm{C}} \cdot t\right) \tag{41.6}$$

$$\alpha = \frac{1}{273{,}15^\circ\mathrm{C}} = \frac{1}{273{,}15\ \mathrm{K}} \approx 3{,}66 \cdot 10^{-3}\frac{1}{\mathrm{K}}$$

Jest to wartość **współczynnika rozszerzalności objętościowej** wszystkich gazów, co oznacza, że wszystkie gazy (jeśli tylko można je uznać za doskonałe) rozszerzają się jednakowo: przy wzroście temperatury o $1^\circ\mathrm{C} = 1\ \mathrm{K}$ objętość każdego gazu wzrasta (w przybliżeniu) o $1/273$ tej objętości, jaką gaz miał w $0^\circ\mathrm{C}$.

Gdy chcemy obliczyć objętość końcową gazu (po ogrzaniu), możemy skorzystać zarówno ze wzoru (41.5), jak i (41.6).

Warto jeszcze przypomnieć szczególne właściwości wody, która w miarę wzrostu temperatury w zakresie od 0°C do 4°C kurczy się i dopiero po przekroczeniu tej temperatury zaczyna się rozszerzać. Wobec tego woda o temperaturze 4°C ma największą gęstość i opada na dno dużych zbiorników wodnych, co pozwala przeżyć zimę roślinom i zwierzętom wodnym. Zjawisko to nazywamy **anomalną rozszerzalnością wody**.

ZADANIA

1. Wyznaczony za pomocą dylatometru współczynnik rozszerzalności liniowej miedzi wynosi około $1{,}7 \cdot 10^{-5}\ 1/\mathrm{K}$. Wyjaśnij, co to znaczy. Skorzystaj z wyników pomiarów podanych w przykładzie 41.1 i oblicz graniczne wartości tego współczynnika oraz jego niepewności bezwzględną i względną. Przyjmij, że niepewność pomiaru zmiany temperatury wynosi $1\ \mathrm{K}$, a niepewność pomiaru przyrostu długości pręta to $0{,}01\ \mathrm{mm}$ (nie uwzględniaj niepewności, z którą zmierzono długość pręta).
2. Stalowa szyna w temperaturze $t = 50°\mathrm{C}$ ma długość $l = 10\ \mathrm{m}$. Oblicz, o ile zmieni się długość tej szyny, gdy temperatura obniży się do $t_0 = 0°\mathrm{C}$. Współczynnik rozszerzalności liniowej stali $\lambda = 1{,}3 \cdot 10^{-5}\ 1/\mathrm{K}$.
3. Wahadło zegara składa się z cienkiego żelaznego pręta zakończonego ciężką kulą. W temperaturze $0°\mathrm{C}$ zegar chodzi punktualnie, a okres jego wahań wynosi $T_0 = 2\ \mathrm{s}$. Oblicz, o ile opóźni się ten zegar w ciągu doby, jeśli znajdzie się w pomieszczeniu o temperaturze $t = 25°\mathrm{C}$. Współczynnik rozszerzalności liniowej żelaza jest równy $\lambda = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\ 1/\mathrm{K}$.
4. Gęstość rtęci w temperaturze $0°\mathrm{C}$ wynosi $\rho_0 = 13{,}596\ \mathrm{g/cm^3}$. Oblicz gęstość rtęci w temperaturze $t = 50°\mathrm{C}$. Współczynnik rozszerzalności objętościowej rtęci jest równy $\alpha = 1{,}8 \cdot 10^{-4}\ 1/\mathrm{K}$.
5. Areometr o ciężarze $F_\mathrm{c} = 0{,}1\ \mathrm{N}$ i powierzchni przekroju poprzecznego $S = 2\ \mathrm{cm^2}$ zanurza się w metanolu o temperaturze $t_0 = 0°\mathrm{C}$ do pewnej kreski na swojej podziałce. Pomiń rozszerzalność areometru i oblicz, o ile głębiej zanurzy się ten areometr w metanolu o temperaturze $t = 25°\mathrm{C}$. Współczynnik rozszerzalności metanolu jest równy $\alpha = 1{,}19 \cdot 10^{-3}\ 1/\mathrm{K}$, a jego gęstość w $0°\mathrm{C}$ wynosi $\rho_0 = 827\ \mathrm{kg/m^3}$.
6. Odszukaj w internecie (albo w innych źródłach) informacje na temat wyjątkowych właściwości wody (anomalna rozszerzalność temperaturowa, zmiana objętości podczas topnienia i krzepnięcia, zależność temperatury topnienia lodu od zewnętrznego ciśnienia, duże wartości ciepła właściwego, ciepła topnienia i ciepła parowania) i ich znaczenia w przyrodzie. Przygotuj prezentację.



*42. Transport energii przez przewodnictwo i konwekcję

- Przewodnictwo cieplne ciał stałych
- Przewodnictwo cieplne cieczy
- Konwekcja

Przypomnij sobie, jak różne substancje przewodzą ciepło oraz kiedy można zaobserwować zjawisko konwekcji.

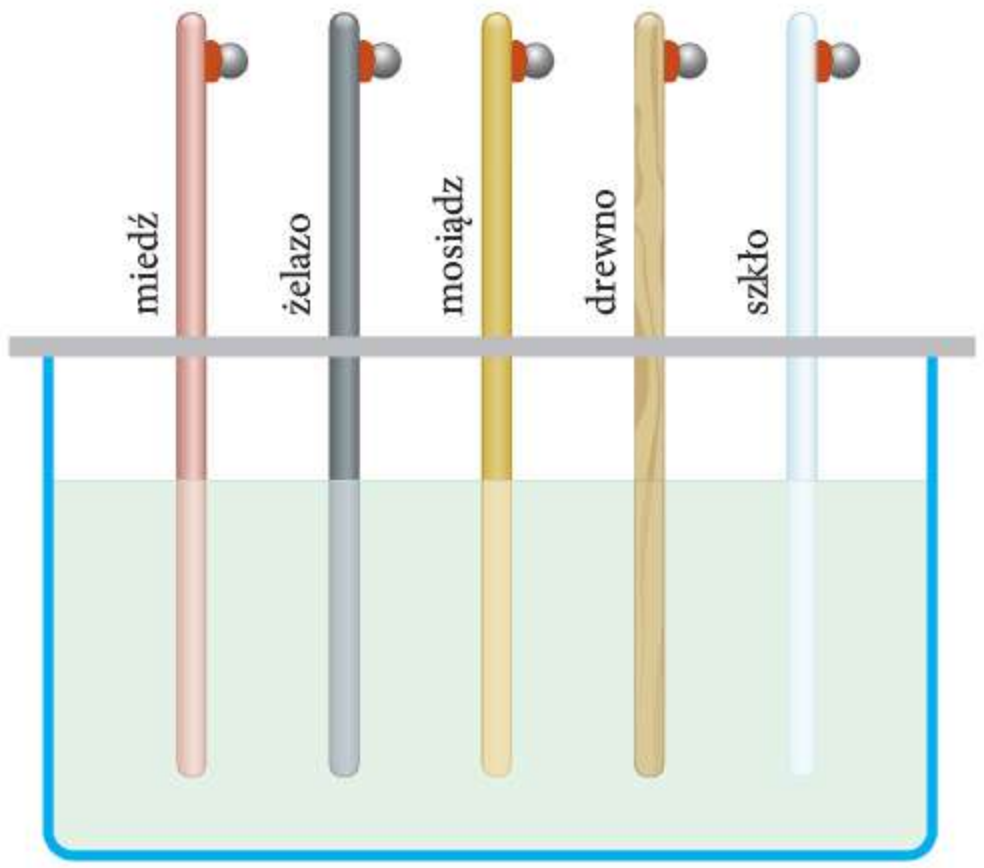
Łyżeczki włożonej do gorącej herbaty już po chwili nie da się dotknąć. Drewniana łyżka może być zanurzona np. w garnku z gotującym się bigosem nawet kilka godzin bez ryzyka, że się nią oparzymy. Metalowej poręczy trudno używać w zimie bez rękawiczek, ale inaczej wygląda sprawa z poręczą drewnianą.
Opisane zjawiska są skutkiem różnego **przewodnictwa cieplnego** substancji.

Aby prześledzić te różnice, warto wykonać dwa proste doświadczenia.

Doświadczenie 42.1

Przewodnictwo cieplne ciał stałych

Do naczynia z gorącą wodą przykrytego pokrywą z otworkami wkładamy kilka prętów z różnych metali oraz pręt drewniany i szklany. Dobieramy je tak, aby miały długość ok. $20\ \mathrm{cm}$ i jednakowy przekrój poprzeczny. W odległości kilku centymetrów od górnego końca prętów przyklejamy woskiem niewielkie, jednakowe kulki albo gwoździki (rys. 42.1).



Rys. 42.1

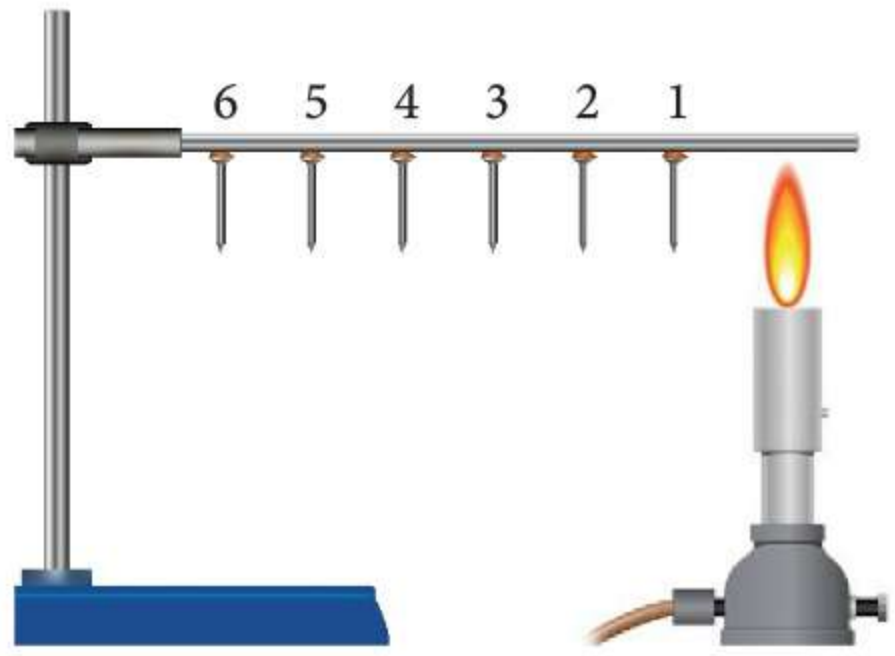
Obserwujemy, że po pewnym czasie odpadają kolejno tylko te kulki (lub gwoździki), które były przyklejone do metalowych prętów.

Doświadczenie 42.2

Przewodnictwo cieplne ciał stałych

Do metalowego pręta długości ok. 50 cm umocowanego jednym końcem w statywie przyklejamy woskiem gwoździki lub kulki w odstępach ok. 10 cm (rys. 42.2). Drugi koniec pręta ogrzewamy w płomieniu palnika.

Obserwujemy, że gwoździki odpadają od pręta kolejno (najpierw gwoździk 1, potem 2 itd.). Świadczy to o stopniowym wzroście temperatury kolejnych części pręta.



Rys. 42.2

Z przeprowadzonych doświadczeń wynika, że metale są dobrymi przewodnikami ciepła, a drewno, plastik i szkło są tzw. izolatorami cieplnymi, źle przewodzącymi ciepło.

Przekazywanie ciepła w metalach i wzrost temperatury poszczególnych części ogrzewanego ciała odbywa się stopniowo (świadczy o tym odklejanie się gwoździków od nagrzewanego pręta po kolei, a nie równocześnie). Dla różnych metali szybkość tego procesu jest różna.

Zbadajmy teraz przewodnictwo cieplne w cieczach i gazach. W tym celu wykonamy kolejne doświadczenie.

Doświadczenie 42.3

Przewodnictwo cieplne cieczy

Do probówki nalewamy wodę z kranu i ogrzewamy górną część probówki w płomieniu palnika (rys. 42.3).

Obserwujemy wrzenie wody w górnej części probówki. Woda na dnie pozostaje zimna, co możemy łatwo stwierdzić, gdyż ten właśnie koniec trzymamy w dłoni. Z doświadczenia wynika, że woda źle przewodzi ciepło. Podobne właściwości ma większość cieczy (do wyjątków należą ciekłe metale, np. rtęć).



Rys. 42.3

Gazy również są złymi przewodnikami ciepła. Fakt ten wykorzystujemy przy konstrukcji nowoczesnych okien lub budowie termosu. Pomiędzy jego podwójnymi ściankami lub pomiędzy podwójnymi szybami w oknie znajduje się warstwa powietrza, będąca znakomitą izolacją cieplną. Złe przewodnictwo cieplne powietrza nadaje izolujące właściwości ciałom porowatym, np. cegłom, a także innym, w których są wypełnione powietrzem przestrzenie. Należą do nich: słoma, styropian, futro, wełna, śnieg, wata szklana.

Gdyby w doświadczeniu 42.2 mierzyć temperaturę kolejnych fragmentów pręta, okazałoby się, że zamocowany koniec nie osiągnie nigdy takiej temperatury, jak koniec ogrzewany. Jest to spowodowane kontaktem z otaczającym powietrzem, które pobiera część przenoszonego ciepła. Między końcami pręta będzie istniała pewna różnica temperatur, ale ustali się ona bardzo szybko. Gdyby pręt metalowy zastąpić np. szklanym, dochodzenie do podobnego stanu równowagi trwałoby wielokrotnie dłużej, a ustalona temperatura zamocowanego końca byłaby o wiele niższa.

Ilościowe wyniki w doświadczeniu 42.2 pokazują, że szybkość przekazu ciepła $\frac{Q}{t}$ w pręcie (czyli ilość ciepła przekazana w jednostce czasu) jest wprost proporcjonalna do pola przekroju poprzecznego pręta S i do różnicy temperatur przypadającej na jednostkę długości pręta $\frac{\Delta T}{\Delta l}$ (rys. 42.4).



Rys. 42.4 Ilustracja prawa przewodnictwa cieplnego

$$\frac{Q}{t} \sim S\frac{\Delta T}{\Delta l}$$

gdzie $\Delta T = T_1 - T_2$.

Gdy wprowadzimy współczynnik proporcjonalności k, charakterystyczny dla danej substancji, otrzymamy:

$$\frac{Q}{t} = kS\frac{\Delta T}{\Delta l} \qquad (42.1)$$

Współczynnik k nazywa się **współczynnikiem cieplnego przewodnictwa właściwego** lub krótko – **przewodnictwem właściwym**. Informuje nas on, ile ciepła zostaje przekazane w jednej sekundzie przez warstwę substancji o powierzchni przekroju poprzecznego 1 m^2, gdy różnica temperatur na jednostkę długości (grubości) warstwy wynosi $1\frac{K}{m}$.

Drgające cząsteczki ciał stałych lub poruszające się ruchem chaotycznym cząsteczki cieczy i gazów przekazują sobie energię przez zderzenia. Ten sposób przekazania energii wewnętrznej nazwaliśmy przewodnictwem cieplnym. Dla gazów i cieczy jest to proces bardzo powolny. Przekonało nas o tym doświadczenie 42.3.

Jeśli chcielibyśmy doprowadzić wodę do wrzenia w całej objętości, musimy postąpić inaczej – ogrzewać nad płomieniem dno probówki (rys. 42.5). Wtedy woda ogrzewa

się równomiernie, a po pewnym czasie wrzenie obejmuje całą jej objętość. Dlaczego tak się dzieje? Jak w tym przypadku energia wewnętrzna jest przekazywana kolejnym warstwom wody?



Rys. 42.5 Ogrzewanie wody w całym naczyniu

Wykonajmy jeszcze jedno doświadczenie. Rurkę o kształcie przedstawionym na rysunku 42.6 mocujemy w statywie i napełniamy ją wodą. Następnie rozpoczynamy ogrzewanie dolnej części rurki płomieniem palnika i wrzucamy do wody kilka kryształków nadmanganianu potasu, który stopniowo ją zabarwia. Obserwujemy przemieszczanie się warstw zabarwionej wody do górnej części rurki.

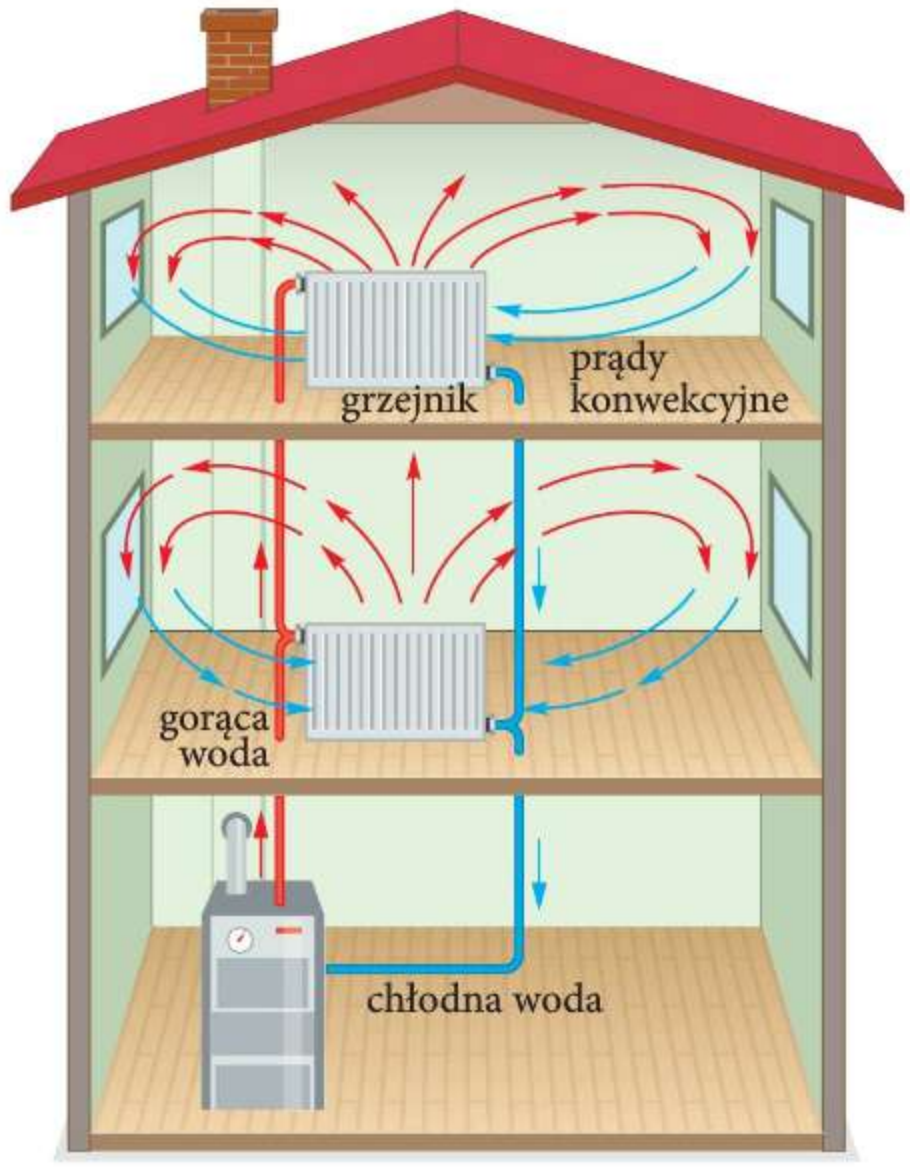


Rys. 42.6 Obserwacja prądów konwekcyjnych w cieczy

W przeprowadzonych doświadczeniach mamy do czynienia ze zjawiskiem konwekcji, czyli unoszenia. Warstwa wody przy dnie naczynia odbiera od ogrzanego przez płomień dna energię wewnętrzną. Wzrasta więc jej temperatura, co z kolei powoduje wzrost objętości (rozszerzalność temperaturowa ciał). Ogrzana woda ma mniejszą gęstość niż chłodne warstwy nad nią i będzie wypływać na powierzchnię.
Proces ten się powtarza. Z gorącym dnem naczynia będą stykać się kolejne warstwy wody, które po ogrzaniu wypłyną na powierzchnię. Podczas przepływu przez wyższe

warstwy ogrzana woda miesza się z tymi warstwami, gdyż w zwykłym naczyniu nie ma wydzielonej drogi dla warstw wznoszących się i opadających na ich miejsce (takie zjawisko nazywamy konwekcją). **Transport energii w cieczach przebiega szybko dzięki konwekcji.**

Konwekcja jest też bardzo ważnym sposobem przenoszenia energii wewnętrznej w gazach. Tradycyjny piec stojący przy ścianie naprzeciw okna powoduje, że chłodne powietrze przesuwa się nad podłogą od okna do pieca, tam ogrzewa się i unosi do sufitu, a pod sufitem przesuwa się w stronę okna lub chłodnych ścian budynku, tam ochładza się i znów opada (rys. 42.7). Temperatura w pokoju jest więc stale niższa nad podłogą, a wyższa pod sufitem, co zwykle uważa się za niekorzystne.



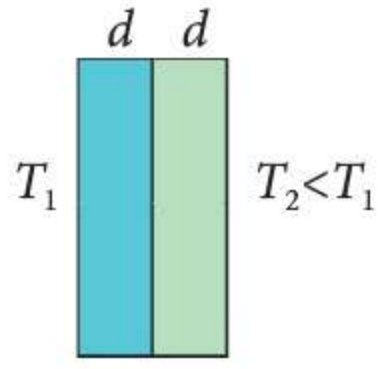
Rys. 42.7 Prądy konwekcyjne w powietrzu wewnątrz ogrzewanego budynku

W przypadku ogrzewania pomieszczeń za pomocą kaloryfera ustawionego pod oknem „kurtyna" ciepłego powietrza, które unosi się znad kaloryfera, oddziela pokój od powietrza ochłodzonego przez kontakt z szybami okiennymi i z zimnym powietrzem dostającym się przez szpary w oknach. W pokoju jest więc bardziej wyrównana temperatura, ale powietrze zawiera mniej pary wodnej (jest bardziej suche) i konieczne jest dodatkowe nawilżanie. Jeśli konwekcja nie może zachodzić, bo ruchowi powietrza przeszkadzają przegrody, energia przenosi się znacznie wolniej i przez długi czas można utrzymywać znaczne różnice temperatur między pomieszczeniami.

ZADANIA

1. Średnia szybkość cząsteczek w gazie jest rzędu kilkuset m/s. Wyjaśnij, dlaczego proces przekazywania ciepła zachodzi w gazach bardzo powoli.
2. Wyjaśnij, dlaczego ściany budynków ociepla się styropianem, wełną mineralną lub innymi puszystymi materiałami.
3. Woda niezależnie od temperatury ma większą gęstość niż olej. Ogrzewana woda pokryta olejem wrze, a para wodna wydostaje się nad olej. Jaką temperaturę będzie utrzymywał olej do wygotowania wody? Wyjaśnij, dlaczego należy wysuszyć umytą patelnię przed nalaniem na nią oleju i rozpoczęciem smażenia.

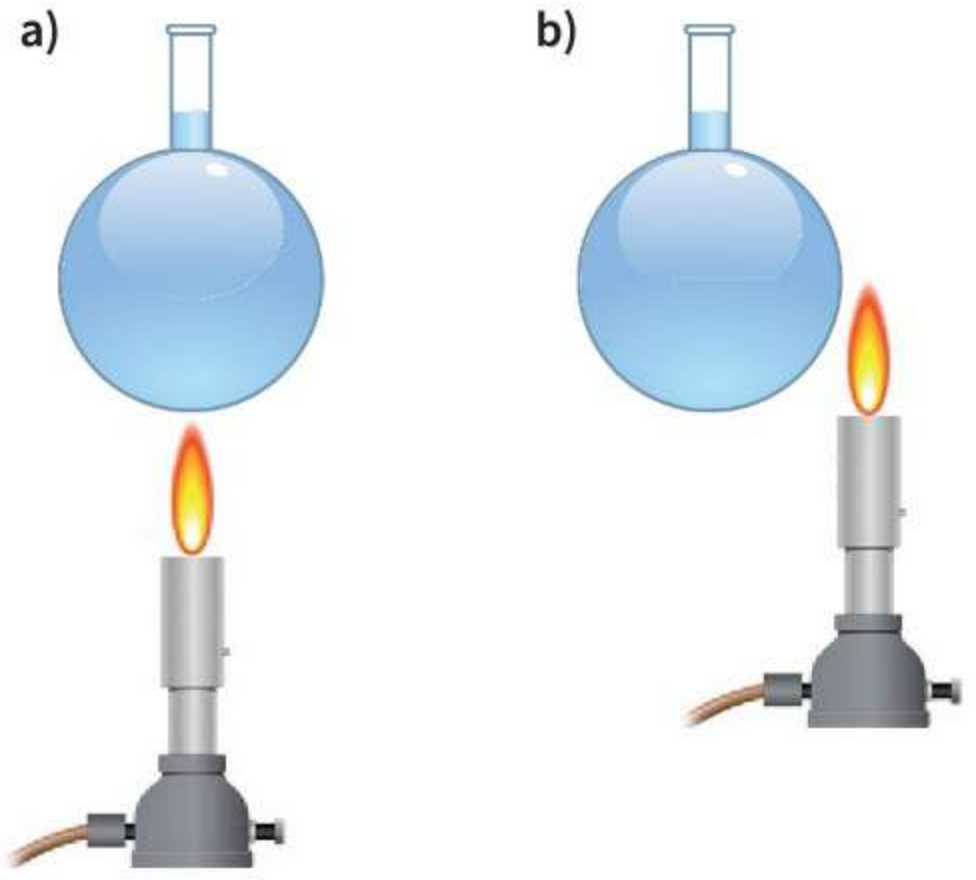
4. Do gotowania mleka używa się czasem garnków o podwójnych ściankach i dnie, między które nalewamy wodę. Wyjaśnij, dlaczego warstwa wody zabezpiecza mleko przed przypaleniem. Czy zagotowanie (doprowadzenie do wrzenia) mleka w takim naczyniu trwa krócej czy dłużej niż zagotowanie tej samej ilości mleka w zwykłym garnku?
5. Gdy wchodzisz w lecie po schodach do budynku od nasłonecznionej strony i dotkniesz metalowej poręczy, możesz się oparzyć. Powietrze w otoczeniu ma taką samą temperaturę (równowaga termiczna), a nie parzy. Podobnie w bardzo mroźny dzień czujesz, że ręka lekko przymarza do poręczy. Równie niskiej temperatury powietrza nie odczuwasz jednak tak dotkliwie.
Wyjaśnij obydwa te fakty.
6. Zetknięto dwie jednakowe warstwy wykonane z różnych materiałów (rys. 42.8).



Rys. 42.8

Współczynniki cieplnego przewodnictwa właściwego warstw wynoszą k_1 i k_2. Udowodnij, że różnice (spadki) temperatur ΔT_1 i ΔT_2, które ustalą się na warstwach, są odwrotnie proporcjonalne do k_1 i k_2.

7. Odszukaj w tablicach fizycznych lub internecie wartość liczbową cieplnego przewodnictwa właściwego śniegu. Odpowiedz na pytanie: *Dlaczego Eskimosi budują domki (igloo) ze śniegu?*
8. Kuliste naczynia z wodą ogrzewamy za pomocą palników ustawionych tak jak na rysunkach 42.9a i b. Narysuj w zeszycie kierunki prądów konwekcyjnych w wodzie w obu przypadkach.



Rys. 42.9

9. Podaj przykład praktycznego wykorzystania w przyrodzie lub technice prądów konwekcyjnych powstających w atmosferze Ziemi.



Równowaga termodynamiczna. Zerowa zasada termodynamiki

Układ jest w równowadze termodynamicznej, jeśli podczas mierzenia charakteryzujących go wielkości (ciśnienia, temperatury, gęstości) w różnych chwilach i w różnych miejscach układu otrzymujemy takie same wyniki.

Zerowa zasada termodynamiki: Jeśli pewne ciało A jest w równowadze termodynamicznej z ciałem C (termometrem) i równocześnie ciało B jest w równowadze termodynamicznej z ciałem C, to wówczas ciała A i B są w równowadze termodynamicznej ze sobą.

Określamy różne skale temperatur. Przy formułowaniu praw gazów posługujemy się zwykle tzw. **temperaturą bezwzględną** T (wyrażoną w kelwinach), związaną z ruchem postępowym cząsteczek ciała.



Ciśnienie gazu w naczyniu zamkniętym

Gaz doskonały to taki gaz, którego cząsteczki traktujemy jako punkty materialne (pomijamy ich rozmiary) i zakładamy, że oddziałują ze sobą i ze ściankami naczynia **tylko** w chwilach zderzeń. Siła parcia gazu na ścianki naczynia pojawia się w wyniku ciągłych uderzeń w ścianki wielkiej liczby cząsteczek. Gdy podzielimy wartość tej całkowitej siły przez powierzchnię ścianki, otrzymujemy ciśnienie p. Można wyprowadzić wzór zwany **podstawowym wzorem teorii kinetyczno-molekularnej gazu doskonałego**:

$$p = \frac{2}{3} \cdot \frac{N}{V} \cdot \bar{E}_{\mathrm{k}} \tag{1}$$

Wzór (1) pokazuje, że ciśnienie gazu w naczyniu zamkniętym jest wprost proporcjonalne do liczby cząsteczek w jednostce objętości i do średniej energii kinetycznej ich ruchu postępowego.



Równanie stanu gazu doskonałego. Równanie Clapeyrona

Równość temperatur dwóch gazów w zbiornikach oznacza równość średnich energii kinetycznych ruchu postępowego cząsteczek tych gazów (gazy mogą być takie same lub różne).

Przyjmujemy, że temperatura bezwzględna T (wielkość makroskopowa charakteryzująca gaz jako całość) jest wprost proporcjonalna do średniej energii kinetycznej ruchu postępowego jego cząsteczek (wielkość mikroskopowa):

$$T \sim \bar{E}_{\mathrm{k}} \qquad \text{lub} \qquad \bar{E}_{\mathrm{k}} = aT \qquad \text{gdzie} \qquad a > 0$$

Po podstawieniu do wzoru (1) otrzymujemy:

$$\frac{pV}{T} = \frac{2}{3}Na$$

Prawa strona jest stała dla danej liczby cząsteczek N gazu w naczyniu.

$$\frac{pV}{T} = \text{const} \tag{2}$$

Wzór (2) nosi nazwę **równania stanu gazu doskonałego**. Wartość stałej dla 1 mola gazu to **stała gazowa** $R = 8{,}31 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol} \cdot \mathrm{K}}$. Dla n moli:

$$\frac{pV}{T} = nR \tag{3}$$

lub:

$$\frac{pV}{T} = kN \tag{4}$$

$k = \frac{R}{N_A} = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$ nosi nazwę **stałej Boltzmanna**. Równanie zapisane w postaci wzoru (3) lub (4) nosi nazwę **równania Clapeyrona**.

Wartość współczynnika proporcjonalności a:

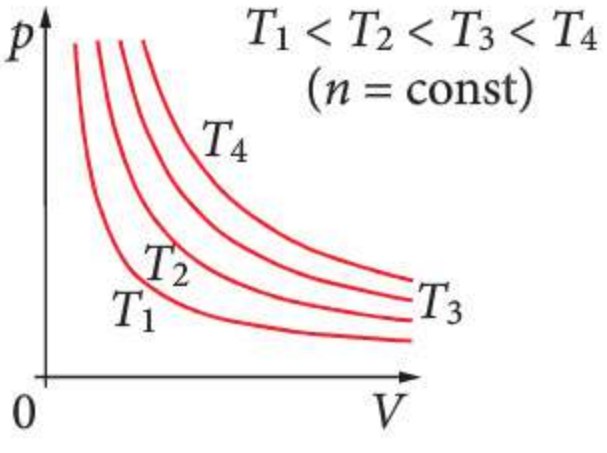
$$a = \frac{3}{2}k \qquad \text{zatem} \qquad \bar{E}_k = \frac{3}{2}kT \tag{5}$$



Szczególne przemiany gazu doskonałego

Przemiana izotermiczna: $T = \text{const}$

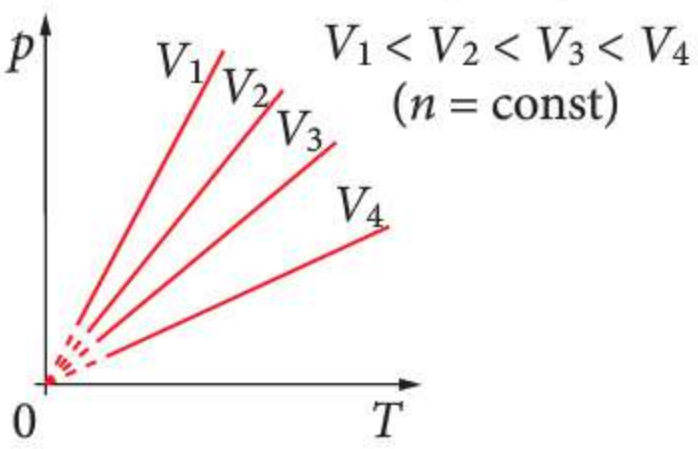
Prawo Boyle'a-Mariotte'a: $pV = nRT = \text{const} \quad p(V) = \frac{\text{const}}{V}$



Ciśnienie gazu jest odwrotnie proporcjonalne do jego objętości. Podczas wzrostu objętości maleje ciśnienie gazu zawartego w zbiorniku, bo zmniejsza się liczba cząsteczek gazu w jednostce objętości.

Przemiana izochoryczna: $V = \text{const}$

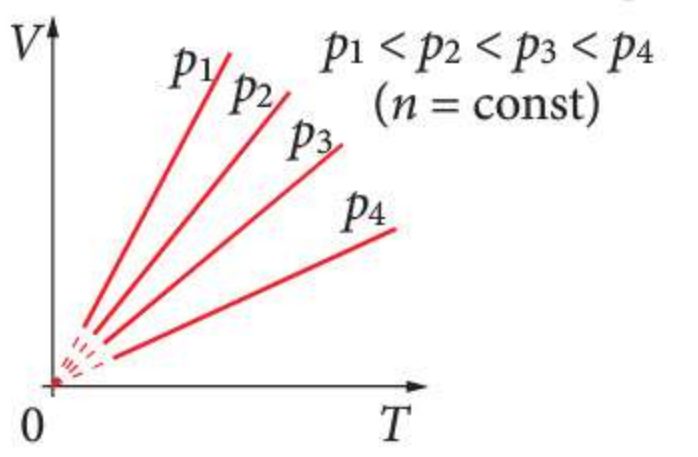
Prawo Charles'a: $\frac{p}{T} = \frac{nR}{V} = \text{const} \quad p(T) = \text{const} \cdot T$



Ciśnienie gazu jest wprost proporcjonalne do jego temperatury bezwzględnej. Podczas wzrostu temperatury rośnie średnia energia kinetyczna ruchu postępowego cząsteczek, cząsteczki o większej energii, zderzając się ze ściankami zbiornika, działają na nie siłą o większej wartości.

Przemiana izobaryczna: $p = \text{const}$

Prawo Gay-Lussaca: $\frac{V}{T} = \frac{nR}{p} = \text{const} \quad V(T) = \text{const} \cdot T$



Jeśli ciśnienie gazu podczas wzrostu temperatury pozostaje stałe, to objętość gazu musi wzrastać; wówczas dwa czynniki wpływające na ciśnienie gazu ($\bar{E}_k$ i $\frac{N}{V}$) kompensują się.

Prawa gazów doskonałych stosują się do gazów rzeczywistych z tym lepszym przybliżeniem, im mniejsze są ich cząsteczki, im niższe jest ciśnienie gazu i wyższa temperatura.



Energia wewnętrzna gazu. Stopnie swobody

Energia wewnętrzna to suma wszystkich rodzajów energii wszystkich cząsteczek ciała. Do energii wewnętrznej należy zaliczyć energię kinetyczną wszystkich rodzajów ruchu cząsteczek oraz energię potencjalną wynikającą z ich wzajemnego oddziaływania siłami międzycząsteczkowymi (wymienione rodzaje energii mogą się zmieniać w procesach fizycznych).

Energię wewnętrzną gazu doskonałego, którego cząsteczki nie oddziałują ze sobą (z wyjątkiem chwil zderzeń), stanowi tylko **energia kinetyczna wszystkich rodzajów ruchu cząsteczek** (w układzie odniesienia związanym ze ściankami naczynia).

Jednoatomowe cząsteczki gazu doskonałego mają tylko energię kinetyczną ruchu postępowego $\frac{3}{2}kT$. Każda cząsteczka jednoatomowa ma **trzy stopnie swobody** ($i = 3$). Według **zasady ekwipartycji energii** na każdy stopień swobody przypada jednakowa średnia energia kinetyczna równa $\frac{1}{2}kT$. **Dwuatomowe** cząsteczki gazu mają **pięć stopni swobody** ($i = 5$). Dla gazów o cząsteczkach trzy- i więcejatomowych liczba stopni swobody $i = 6$.

Całkowita średnia energia kinetyczna cząsteczki o i stopniach swobody jest równa $\frac{i}{2}kT$.

Energia wewnętrzna gazu doskonałego złożonego z N cząsteczek w temperaturze T wyraża się wzorem:

$$U = \frac{ikN}{2}T$$

a zmiana energii wewnętrznej przy zmianie temperatury – wzorem:

$$\Delta U = \frac{ikN}{2}\Delta T \qquad (6)$$

Wzór (6) stosuje się **tylko** dla gazów doskonałych. W przypadku gazów rzeczywistych i innych ciał w skład energii wewnętrznej wchodzi także energia potencjalna wzajemnego oddziaływania cząsteczek i ewentualnie energia drgań atomów wewnątrz cząsteczki (jeśli takie drgania występują). Dlatego energia wewnętrzna tych ciał może się zmieniać także wtedy, gdy ich temperatura nie ulega zmianie.



Pierwsza zasada termodynamiki

Zmiana energii wewnętrznej ciała jest równa sumie ciepła wymienionego z otoczeniem i pracy wykonanej nad ciałem przez siłę zewnętrzną.

$$\Delta U = Q + W \qquad (7)$$

gdzie:

Q – ciepło wymieniane między ciałem a otoczeniem (część energii wewnętrznej przekazywana bezpośrednio poprzez zderzenia cząsteczek),

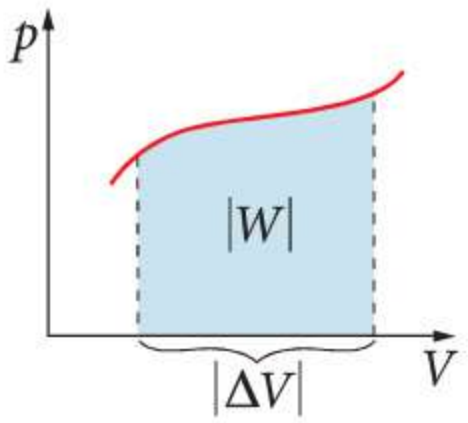
W – praca wykonana nad ciałem przez siłę zewnętrzną.

- $Q > 0$, gdy ciało pobiera ciepło z otoczenia, $Q < 0$, gdy ciepło jest oddawane.
- $W > 0$, gdy zwrot siły jest zgodny ze zwrotem przemieszczenia, $W < 0$, gdy zwroty tych wektorów są przeciwne.

Jeśli objętość gazu zmienia się o ΔV, to w przypadku gdy podczas tej zmiany ciśnienie p można uważać za stałe, **praca siły zewnętrznej**:

$$W = -p\Delta V$$

Praca gazu różni się od pracy siły zewnętrznej tylko znakiem.



Na wykresie zależności $p(V)$ miarą wartości bezwzględnej pracy $|W|$ jest pole figury zawartej między odpowiednim odcinkiem wykresu a osią V.



Szczególne przemiany gazu doskonałego a pierwsza zasada termodynamiki

W stałej temperaturze nie zmienia się energia wewnętrzna gazu ($\Delta U = 0$). Mogą wystąpić dwa przypadki:

- rozprężanie izotermiczne (wzrost objętości), podczas którego gaz wykonuje pracę kosztem pobranego ciepła ($Q > 0, W < 0$);
- sprężanie izotermiczne (zmniejszanie objętości), podczas którego praca siły zewnętrznej jest zamieniana na ciepło oddane otoczeniu ($Q < 0, W > 0$).

W stałej objętości nie jest wykonywana praca ($W = 0$). Mogą wystąpić dwa przypadki:

- ogrzewanie izochoryczne, w którym energia wewnętrzna gazu rośnie kosztem pobranego ciepła ($\Delta U = Q > 0$);
- oziębianie izochoryczne, w którym energia wewnętrzna gazu maleje na skutek oddawania ciepła otoczeniu ($\Delta U = Q < 0$).

Pod stałym ciśnieniem wszystkie wielkości występujące we wzorze wyrażającym pierwszą zasadę termodynamiki są różne od zera. Gdy chcemy rozwiązywać problemy dotyczące tej przemiany, musimy się dodatkowo powołać na prawo Gay-Lussaca. Mogą wystąpić dwa przypadki:

- ogrzewanie izobaryczne ($\Delta U > 0, W < 0, Q > 0$);
- oziębianie izobaryczne ($\Delta U < 0, W > 0, Q < 0$).

Gdy nie dochodzi do wymiany ciepła z otoczeniem, mamy do czynienia z **przemianą adiabatyczną** ($Q = 0, \Delta U = W$). Jest to przemiana ogólna, w której zmieniają się wszystkie trzy wielkości charakteryzujące stan gazu. Mogą wystąpić dwa przypadki:

- sprężanie adiabatyczne, które jest równocześnie ogrzewaniem (ciśnienie gazu rośnie bardziej gwałtownie niż w sprężaniu izotermicznym – wynika to z równania Clapeyrona, $\Delta U = W > 0$);
- rozprężanie adiabatyczne, które jest równocześnie oziębianiem (ciśnienie gazu maleje bardziej gwałtownie niż w rozprężaniu izotermicznym, $\Delta U = W < 0$).

Szybkie sprężanie i rozprężanie jest zawsze adiabatyczne, bo nawet wówczas, gdy ścianki zbiornika dobrze przewodzą, wymiana ciepła jest procesem wymagającym czasu.
Ciśnienie gazu w przemianie adiabatycznej zmienia się z dwóch powodów: zmiany energii kinetycznej cząsteczek i zmiany ich liczby w jednostce objętości.



Ciepło właściwe i ciepło molowe

Jeśli wymianie ciepła między ciałem a otoczeniem towarzyszy zmiana temperatury ciała, to ilość wymienionego ciepła:

$$Q = c \cdot m \cdot \Delta T$$

gdzie c – ciepło właściwe substancji, a cm – pojemność cieplna danej masy substancji.

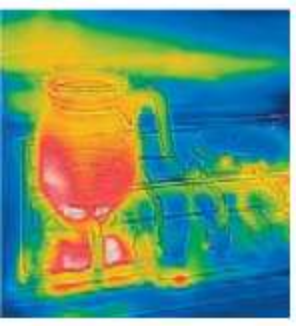
Dla gazu doskonałego:

- w stałej objętości $Q_V = c_V m \cdot \Delta T$ lub $Q_V = C_V n \cdot \Delta T$
- pod stałym ciśnieniem $Q_p = c_p m \cdot \Delta T$ lub $Q_p = C_p n \cdot \Delta T$

gdzie C_V i C_p to ciepła molowe gazu w stałej objętości i pod stałym ciśnieniem.

Związki:

$$C_V = Mc_V \qquad C_p = Mc_p \qquad C_p - C_V = R$$



Energia wewnętrzna jako funkcja stanu

Zmiana energii wewnętrznej ciała zachodząca podczas przejścia między dwoma stanami **nie zależy od procesu**, który do tego przejścia doprowadził, lecz jedynie od stanu **początkowego** i **końcowego**. Jednemu stanowi odpowiada tylko jedna wartość energii wewnętrznej, ale daną energię wewnętrzną gaz może mieć w różnych stanach (np. przemiana izotermiczna).

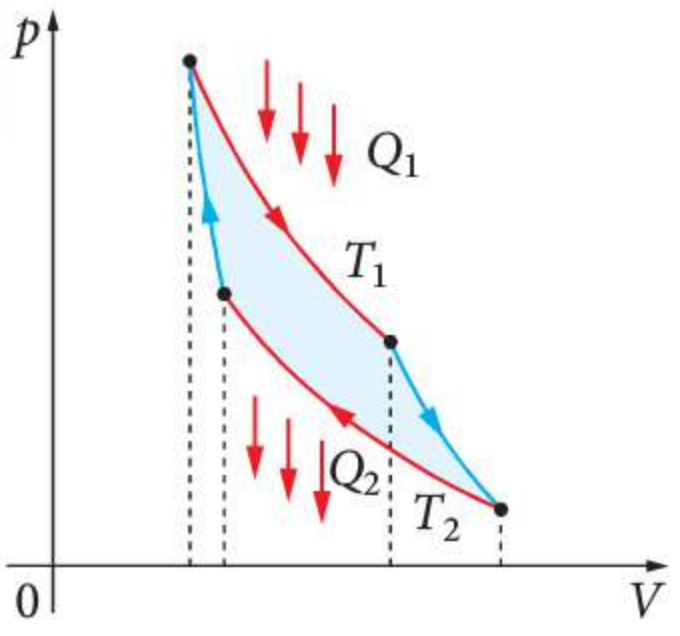
W dowolnej przemianie gazu doskonałego zmianę jego energii wewnętrznej zachodzącą podczas zmiany temperatury można obliczyć ze wzoru:

$$\Delta U = C_V n \cdot \Delta T \tag{8}$$

Zarówno praca wykonana przez siłę zewnętrzną lub przez gaz, jak i ciepło wymienione z otoczeniem są funkcjami procesu, w którym to następuje.



Silniki cieplne. Odwracalny cykl Carnota



Cykl Carnota, obrazujący pracę silnika cieplnego, składa się z dwóch przemian izotermicznych i dwóch adiabatycznych, a ciałem roboczym jest gaz doskonały. Podczas izotermicznego rozprężania gaz pobiera z otoczenia (tzw. źródła ciepła o temperaturze T_1) ciepło Q_1, a podczas izotermicznego sprężania oddaje otoczeniu (chłodnicy o temperaturze T_2) ciepło Q_2. Na pracę W zostaje zamieniona różnica $Q_1 - |Q_2|$. Miarą tej pracy jest pole figury zawartej wewnątrz cyklu.

Druga zasada termodynamiki

Niemożliwe jest zbudowanie *perpetuum mobile* drugiego rodzaju, tj. takiej maszyny, która przekształcałaby w pracę całe ciepło pobrane ze źródła, nie powodując przy tym zmian ani w otoczeniu, ani w stanie pracującego w niej ciała roboczego.

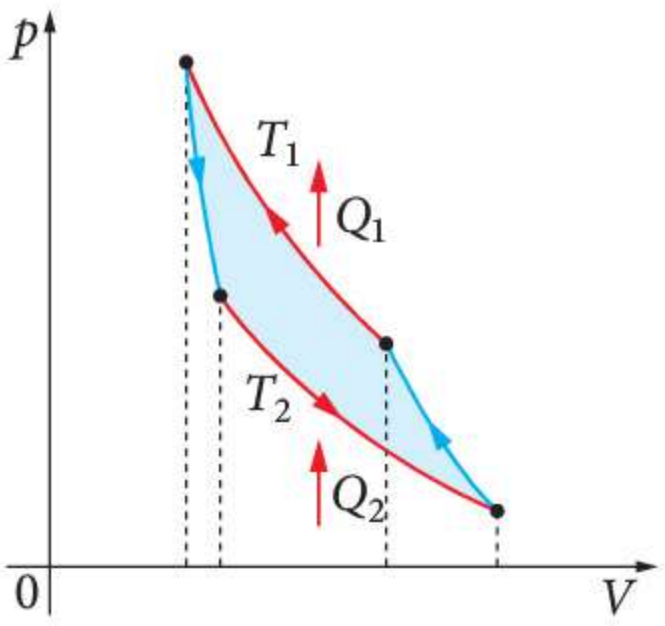
Sprawność każdego silnika cieplnego:

$$\eta = \frac{|W|}{Q_1} = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1}$$

gdzie $|W|$ to praca gazu, Q_1 oznacza zawsze łączne ciepło pobrane, a Q_2 – łączne ciepło oddane w całym cyklu. Z drugiej zasady termodynamiki wynika, że zawsze $\eta < 1$.
Można wykazać, że sprawność **idealnego silnika Carnota** wyraża się wzorem:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

Idealny silnik Carnota to taki, w którym wszystkie procesy zachodziłyby **odwracalnie**, tzn. mogłyby zachodzić w odwrotną stronę przez te same stany pośrednie. Procesy zachodzące w przyrodzie **samorzutnie** (bez naszej ingerencji) są nieodwracalne.



Chłodziarki pracują w cyklu stanowiącym odwrócenie cyklu silników cieplnych (nie mylić cyklu odwrotnego z cyklem odwracalnym). Podczas izotermicznego rozprężania ciało robocze pobiera ciepło Q_2 od chłodzonego pomieszczenia o temperaturze T_2, a podczas izotermicznego sprężania oddaje ciepło Q_1 ciału o temperaturze wyższej T_1. Pompowanie ciepła z ciała chłodniejszego do cieplejszego jest możliwe dzięki pracy W wykonywanej przez siłę zewnętrzną: $W = |Q_1| - Q_2$.

Skuteczność chłodzenia:

$$\xi = \frac{Q_2}{W} = \frac{Q_2}{|Q_1| - Q_2}$$

Skuteczność chłodzenia idealnej (pracującej odwracalnie) chłodziarki, wykonującej cykl odwrotny do cyklu Carnota, byłaby równa:

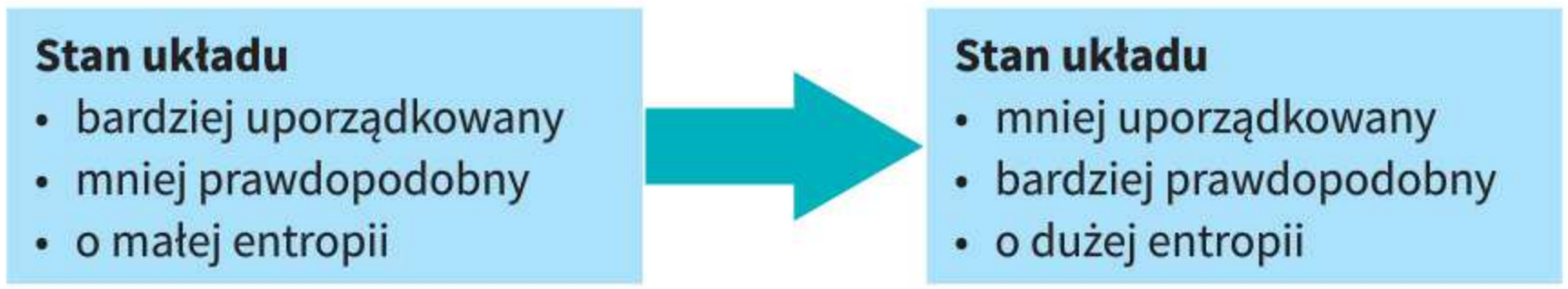
$$\xi = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$



Fluktuacje. Wzmianka o entropii

W rzeczywistości układ, który jest w stanie równowagi termodynamicznej, nieznacznie odchyla się od tego stanu, tzn. charakteryzujące go wielkości makroskopowe (ciśnienie, gęstość) nie są stałe, lecz wahają się wokół wartości średnich. Te chaotyczne odchylenia nazywamy **fluktuacjami**. W bardzo dużych układach fluktuacje są niewielkie, ale gdy np. w zbiorniku z gazem znajduje się niewielka liczba cząsteczek, są one znaczne. O występowaniu fluktuacji świadczą ruchy Browna.

Zachodzące w przyrodzie procesy samorzutne mają określony kierunek. Kierunek ten można opisać, posługując się pojęciem **entropii**.
Drugą zasadę termodynamiki dla wszystkich procesów przyrodniczych formułujemy następująco:
W przyrodzie samorzutnie zachodzą tylko takie procesy, w wyniku których rośnie entropia układu.



Wielkość fizyczna zwana entropią (oznaczana zazwyczaj symbolem S) **jest więc miarą nieuporządkowania układu**. Równocześnie jest ona funkcją rosnącą **prawdopodobieństwa wystąpienia danego stanu**.

Na skutek fluktuacji układ może chwilowo przechodzić od stanu mniej do stanu bardziej uporządkowanego; wówczas entropia układu maleje wbrew temu, co stwierdza druga zasada termodynamiki. Na tym polega ograniczoność tej zasady i jej charakter statystyczny.



Przejścia fazowe

Ciepłem topnienia nazywamy stosunek ilości ciepła Q potrzebnego do zamiany ciała stałego o masie m w ciecz (o tej samej temperaturze) do tej masy:

$$c_{\mathrm{t}} = \frac{Q}{m}$$

Ciepłem parowania nazywamy stosunek ilości ciepła Q potrzebnej do zamiany cieczy o masie m w parę (o tej samej temperaturze) do tej masy:

$$c_{\mathrm{p}} = \frac{Q}{m}$$

Ciepło parowania cieczy maleje ze wzrostem temperatury.

Wrzenie to parowanie w całej objętości cieczy. Temperatura wrzenia każdej cieczy (stała podczas tego procesu) zależy od ciśnienia zewnętrznego.

Podczas zmiany stanu skupienia (topnienia ciała stałego i wrzenia cieczy) temperatura substancji nie ulega zmianie, więc nie zmienia się średnia energia kinetyczna ruchu postępowego cząsteczek. Struktura krystaliczna ciała stałego podczas topnienia zostaje zniszczona – stan znacznego uporządkowania w ciele stałym przechodzi w stan mniejszego uporządkowania, charakterystycznego dla cieczy; rośnie średnia energia potencjalna wzajemnego oddziaływania cząsteczek. Cząsteczki cieczy mogą wykonywać także obroty (pojawiają się nowe stopnie swobody), rośnie więc ich całkowita energia kinetyczna.



Para nasycona i para nienasycona

Parą nasyconą nazywamy parę, która jest w równowadze termodynamicznej z cieczą, z której powstała. Ciśnienie i gęstość pary nasyconej mają w danej temperaturze największe wartości. Zmniejszenie objętości pary nasyconej powoduje jej skraplanie.

Gdy zwiększymy objętość zamkniętego naczynia, na którego dnie nie ma już cieczy, otrzymamy **parę nienasyconą**. Ciśnienie pary nienasyconej maleje ze wzrostem objętości w przybliżeniu tak jak ciśnienie gazu (prawa gazów w przybliżeniu stosują się do par nienasyconych).

Ciśnienie pary nasyconej można zwiększyć jedynie przez wzrost temperatury. Wzrost ciśnienia jest wówczas bardziej gwałtowny niż w przypadku gazów, są bowiem dwie przyczyny tego wzrostu: $\bar{E}_{\mathrm{k}}$ i $\frac{N}{V}$.

Każda ciecz wrze w takiej temperaturze, w której ciśnienie jej pary nasyconej jest równe ciśnieniu zewnętrznemu.

Dla każdej substancji istnieje tylko jeden taki punkt na wykresie $p(T)$, tzn. jedna para wielkości p i T, w której wszystkie trzy fazy (ciało stałe, ciecz i para) są ze sobą w równowadze. Punkt ten nazywamy **punktem potrójnym**.



Rozszerzalność temperaturowa ciał

Wzrost temperatury substancji powoduje wzrost jej objętości. **Współczynnikiem rozszerzalności objętościowej** nazywamy stosunek względnego przyrostu objętości do przyrostu temperatury:

$$\alpha = \frac{\Delta V}{V_0 \Delta T}$$

Współczynnik ten zależy od rodzaju substancji i jej stanu skupienia.

Współczynnikiem rozszerzalności liniowej (np. długości pręta, drutu lub jakiegokolwiek wymiaru liniowego ciała stałego) nazywamy stosunek względnego przyrostu długości do przyrostu temperatury:

$$\lambda = \frac{\Delta l}{l_0 \Delta T}$$

Zachodzi przybliżony związek: $\alpha \approx 3\lambda$.

Woda kurczy się podczas wzrostu temperatury od $0^{\circ}\mathrm{C}$ do $4^{\circ}\mathrm{C}$. Największą gęstość ma w temperaturze $4^{\circ}\mathrm{C}$.

Transport energii przez przewodnictwo i konwekcję (uzupełnienie)

Transport energii może następować przez **przewodnictwo cieplne**, podczas którego cząsteczki substancji poruszające się ruchem chaotycznym przekazują sobie energię poprzez zderzenia. Proces ten jest opisany przez prawo przewodnictwa cieplnego:

$$\frac{Q}{t} = kS\frac{\Delta T}{\Delta l}$$

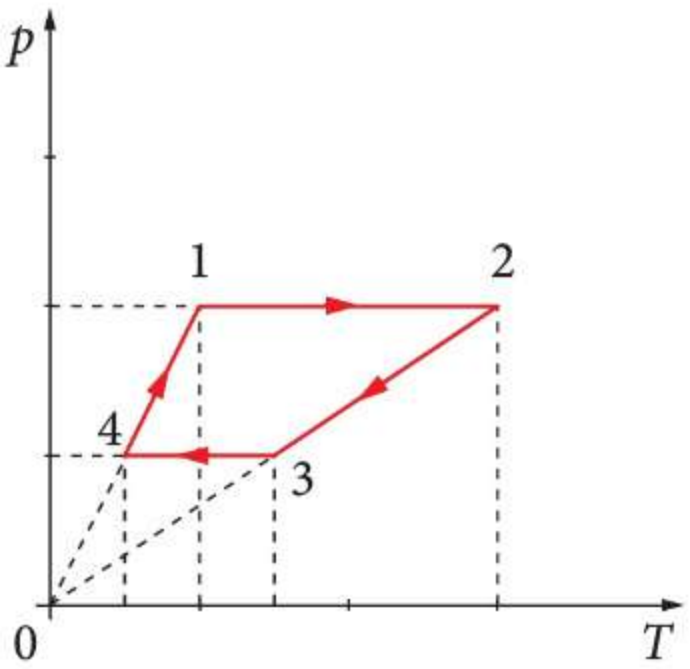
gdzie $\frac{Q}{t}$ to ilość ciepła przekazanego w jednostce czasu przez powierzchnię S pręta (drutu), a $\frac{\Delta T}{\Delta l}$ to spadek temperatury na jednostkę jego długości; k jest współczynnikiem cieplnego przewodnictwa właściwego danego materiału.

Ze zjawiskiem **konwekcji** (unoszenia) mamy do czynienia w cieczach i gazach. Objętość ogrzanych warstw zwiększa się (rozszerzalność temperaturowa), zatem ich gęstość maleje, wskutek czego warstwy te unoszą się, a ich miejsce zajmują warstwy chłodniejsze, które z kolei po ogrzaniu unoszą się, i proces trwa aż do wyrównania się temperatur.

ZADANIA POWTÓRZENIOWE

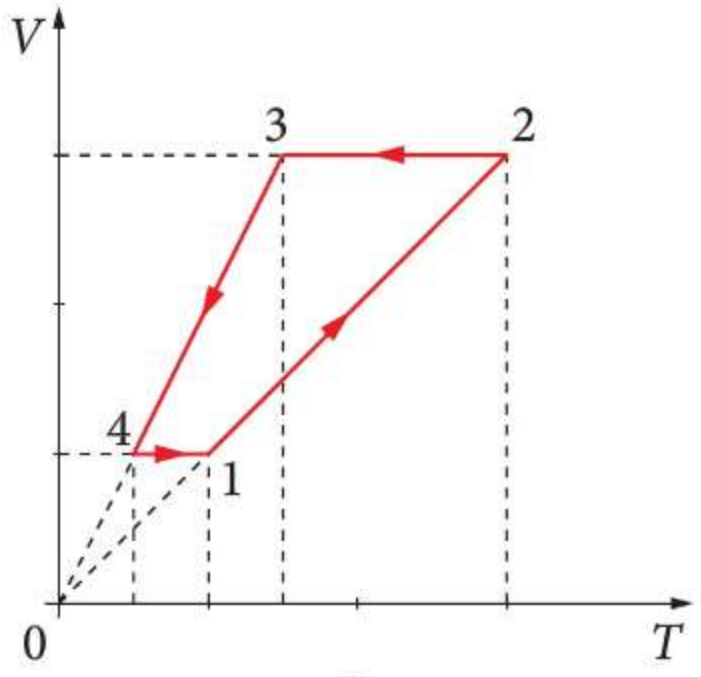
1. **Oszacuj liczbę cząsteczek tlenu zawartych w $1\ \mathrm{cm}^3$ w warunkach normalnych. Jaka to część mola?**

2. Na wykresie przedstawiono zamknięty cykl przemian gazu doskonałego w układzie współrzędnych p, T.

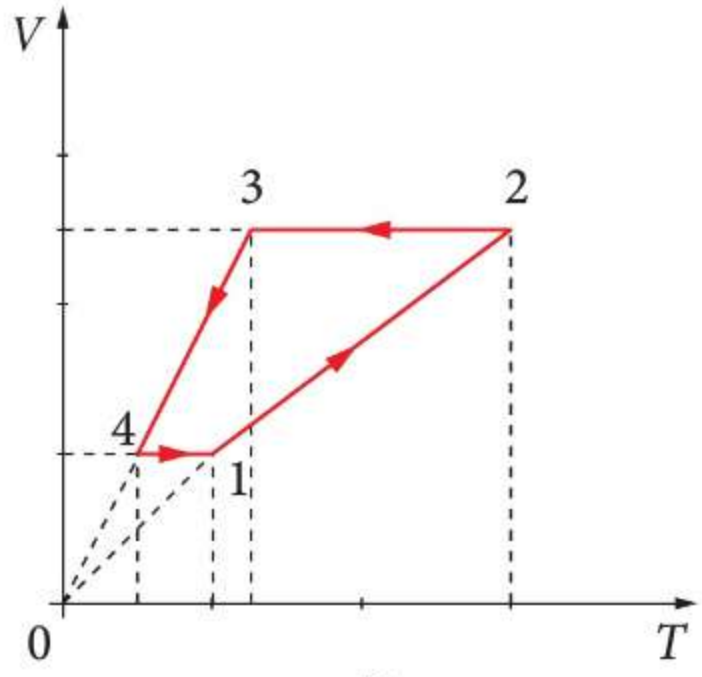


Przeanalizuj cztery cykle przedstawione na poniższych rysunkach (od A do D) i uzupełnij zdanie. Zaznacz właściwe uzupełnienia zdania spośród A–D.

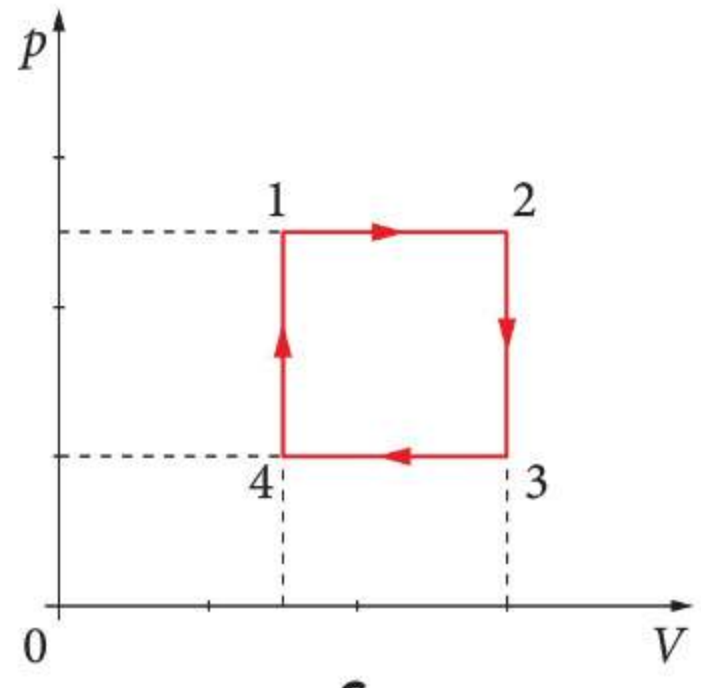
Cyklowi przemian gazu doskonałego w układzie współrzędnych p, T odpowiada cykl w układzie V, T na rysunku **A / B** oraz cykl w układzie p, V na rysunku **C / D**.



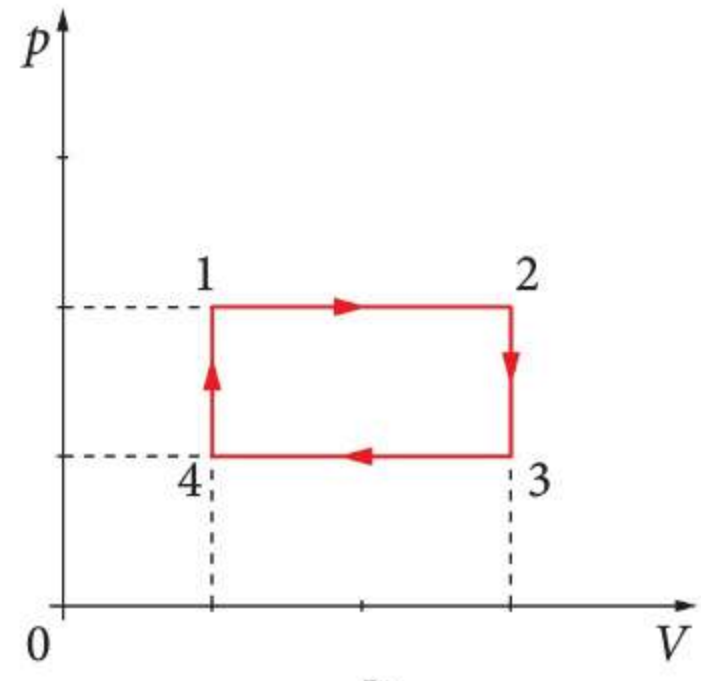
A.



B.

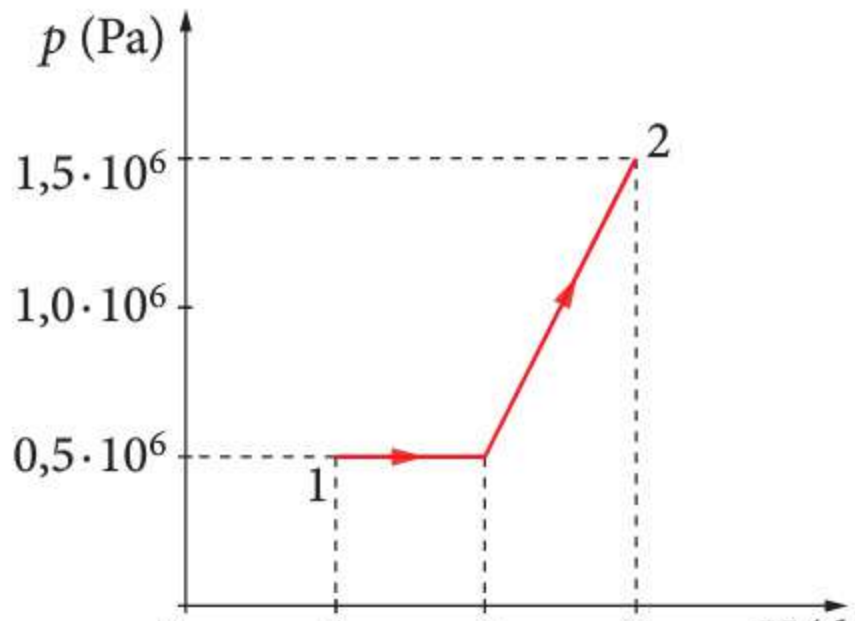


C.



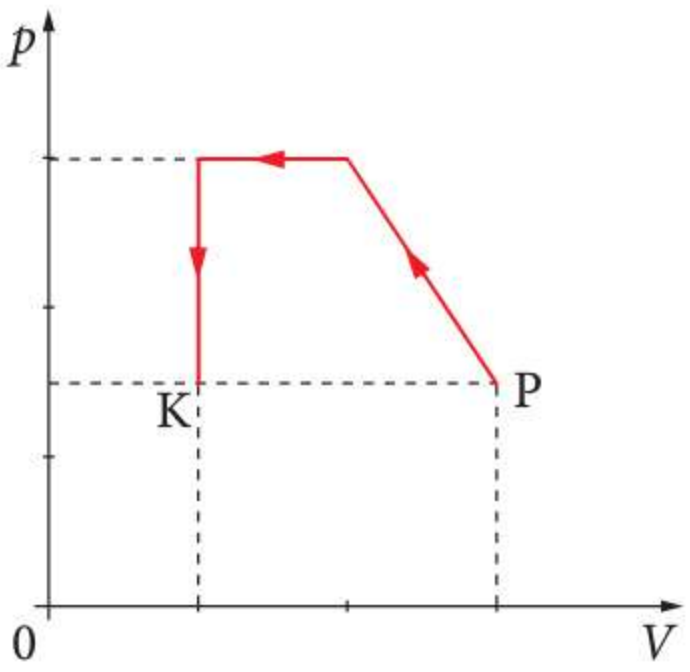
D.

3. Jednoatomowy gaz doskonały przechodzi ze stanu 1 do stanu 2, jak pokazano na wykresie zależności $p(V)$.



a) Oblicz pracę siły zewnętrznej.
b) Oblicz zmianę energii wewnętrznej gazu.
c) Oblicz ciepło wymienione między gazem a otoczeniem.

4. Gaz doskonały przechodzi od stanu początkowego P do stanu końcowego K w sposób pokazany na wykresie.



Stwierdzenie: Podczas przejścia od stanu P do stanu K gaz oddał otoczeniu pewną ilość ciepła.

Spośród A, B i C wybierz zdanie, które jest prawdziwe i stanowi uzasadnienie podanego stwierdzenia.

A. Siła zewnętrzna wykonuje pracę dodatnią, a energia wewnętrzna gazu nie ulega zmianie.
B. Siła zewnętrzna wykonuje pracę dodatnią, a zmiana energii wewnętrznej gazu jest ujemna.
C. Temperatura gazu się obniżyła.

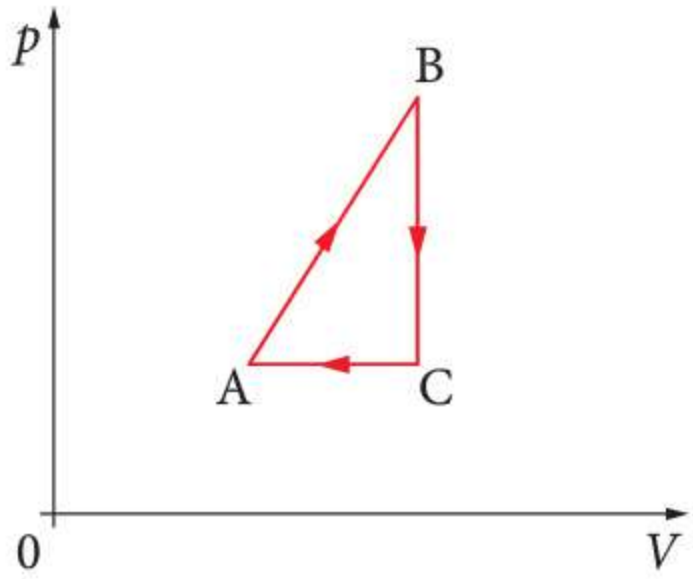
5. W zbiorniku znajduje się n moli dwuatomowego gazu doskonałego. Gaz ten ogrzewamy o ΔT pod stałym ciśnieniem.

Uzupełnij w zeszycie tabelę. Do każdego wiersza trzeciej kolumny tabeli wpisz odpowiednie wyrażenie spośród A–E.

A. $\frac{1}{2}nR \cdot \Delta T$ **B.** $nR \cdot \Delta T$ **C.** $\frac{3}{2}nR \cdot \Delta T$ **D.** $\frac{5}{2}nR \cdot \Delta T$ **E.** $\frac{7}{2}nR \cdot \Delta T$

1.	przyrost energii wewnętrznej gazu	
2.	dostarczone ciepło	
3.	przyrost energii kinetycznej ruchu postępowego cząsteczek	
4.	przyrost energii kinetycznej ruchu obrotowego cząsteczek	

6. Na wykresie w układzie współrzędnych p, V przedstawiono cykl przemian gazu doskonałego.

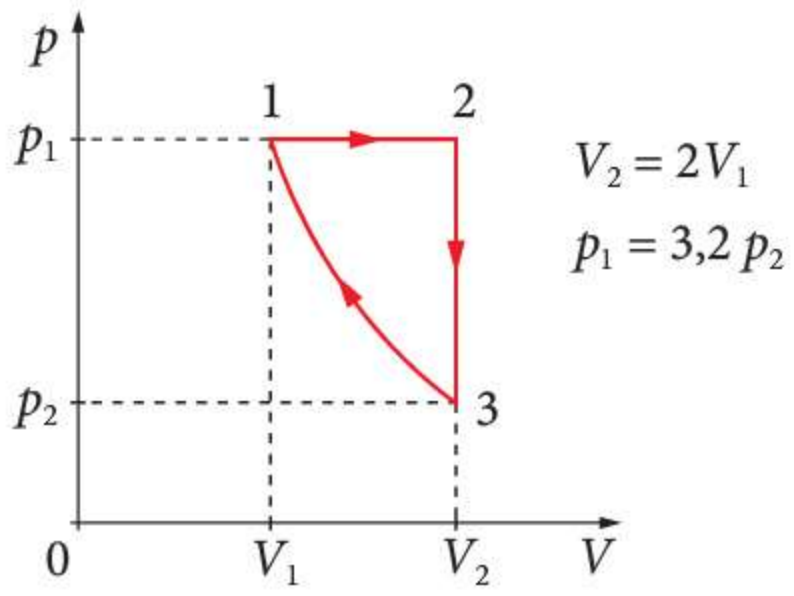


Przedstaw w zeszycie dwa rozumowania doprowadzające do wniosku, że gaz w przemianie A → B pobrał ciepło z otoczenia.

Rozumowanie I na podstawie pierwszej zasady termodynamiki:

Rozumowanie II na podstawie drugiej zasady termodynamiki:

7. Na cykl pracy silnika cieplnego składają się trzy przemiany (rysunek). Przemiana 3 → 1 to sprężanie adiabatyczne. Ciałem roboczym jest jednoatomowy gaz doskonały.



7.1. Poniżej zapisano cztery prawdziwe zdania (1–4) na temat tego cyklu.

1. Zmiana energii wewnętrznej gazu w procesie 3 → 1 jest równa pracy wykonanej przez siłę zewnętrzną.

2. W przemianie 2 → 3 praca nie jest wykonywana.

3. Przemiana 3 → 1 jest przemianą ogólną.

4. W stanie 2 gaz ma najwyższą temperaturę.

Do każdego z tych zdań dobierz jego właściwe uzasadnienie spośród A–D.

A. Iloczyn ciśnienia i objętości gazu jest największy.

B. Zmieniają się wszystkie trzy wielkości decydujące o stanie gazu.

C. Objętość gazu nie ulega zmianie.

D. Ciepło nie jest wymieniane z otoczeniem.

7.2. Oceń prawdziwość poniższych zdań odnoszących się do rysunku cyklu. Wskaż P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F, jeśli jest fałszywe.

1.	W celu obliczenia sprawności cyklu musimy najpierw obliczyć pole figury ograniczonej wykresami dla wszystkich przemian.	**P**	**F**
2.	Ciepło jest pobierane z otoczenia w przemianie 1 → 2, a oddawane w przemianie 2 → 3.	**P**	**F**
3.	Obliczenie ciepła $Q_{1\to2}$ i ciepła $Q_{2\to3}$ pozwoli łatwo obliczyć sprawność cyklu.	**P**	**F**
4.	Energia wewnętrza gazu wzrasta tylko w przemianie 3 → 1.	**P**	**F**
5.	Praca wykonana przez siłę zewnętrzną w procesie 3 → 1 jest większa od pracy wykonanej przez gaz w procesie 1 → 2.	**P**	**F**

7.3. Oblicz sprawność cyklu.

7.4. Oblicz sprawność odwracalnego silnika Carnota, którego źródło miałoby temperaturę równą najwyższej temperaturze gazu w cyklu przedstawionym na rysunku, a temperatura chłodnicy byłaby równa najniższej temperaturze tego gazu.

8. Aluminiową kulkę o promieniu $r_0 = 2\ \mathrm{cm}$ i temperaturze $t_0 = 0^\circ\mathrm{C}$ ogrzano do temperatury $t = 200^\circ\mathrm{C}$. Współczynnik rozszerzalności liniowej aluminium $\lambda = 2{,}2 \cdot 10^{-5}\,\frac{1}{\mathrm{K}}$.

Oblicz, o ile wzrosły:

a) promień kulki,

b) powierzchnia kulki,

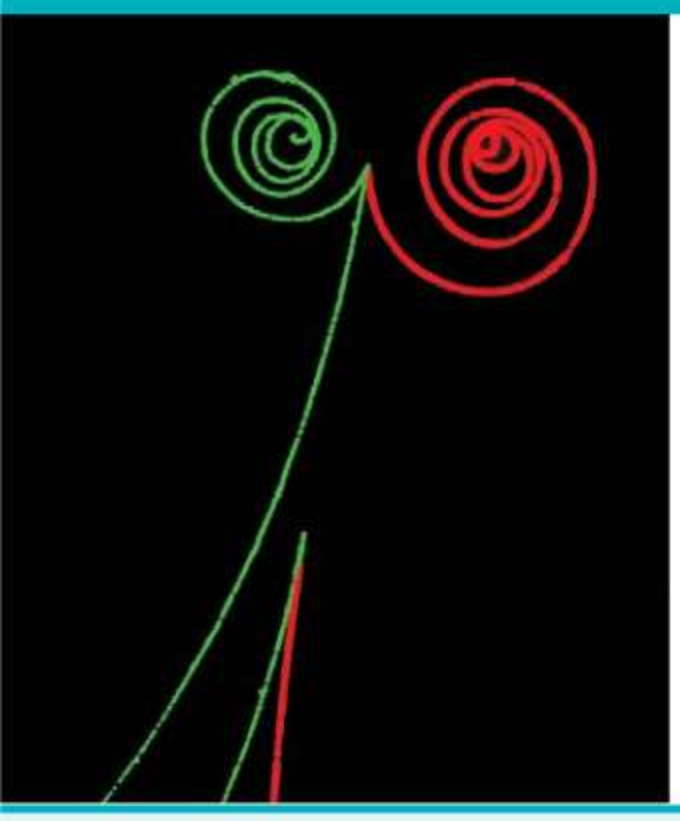
c) objętość kulki.

Uwaga: Przed obliczeniem przyrostu powierzchni kulki wyprowadź związek między współczynnikami rozszerzalności liniowej λ i powierzchniowej β substancji ($\beta = \frac{\Delta S}{S_0 \Delta T}$).

POLE ELEKTROSTATYCZNE

- Opis pola elektrostatycznego
- Przewodnik i dielektryk w polu elektrostatycznym
- Analogia pól elektrostatycznego i grawitacyjnego
- Kondensatory
- Ruch naładowanych cząstek w polu elektrostatycznym





43. Wzajemne oddziaływanie ciał naelektryzowanych

- Prawo Coulomba
- Porównanie sił grawitacji i elektrostatycznych
- Elektryzowanie ciał
- Zasada zachowania ładunku

Przypomnij sobie wiadomości o przewodnikach i izolatorach, sposobach elektryzowania ciał, oddziaływaniach ciał naelektryzowanych, ładunku elektrycznym i jego jednostce oraz budowie i zasadzie działania elektroskopu.

W przyrodzie występują dwa rodzaje ładunków elektrycznych – dodatnie i ujemne. Każde dwa ładunki, niezależnie od znaków, oddziałują ze sobą wzajemnie siłami elektrycznymi.

Jednostką ładunku elektrycznego w Międzynarodowym Układzie Jednostek Miar (SI) jest kulomb (1 C).

Ładunek elektronu $q_{\text{elektronu}} = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

Bezwzględną wartość ładunku elektronu oznaczamy literą e i nazywamy ładunkiem elementarnym:

$$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Każdy ładunek dodatni jest całkowitą wielokrotnością ładunku elementarnego: $q_+ = ne$, a ujemny – całkowitą wielokrotnością ładunku elektronu, czyli $q_- = -ne$, gdzie $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Pod względem możliwości przewodzenia ładunku elektrycznego dzielimy ciała na przewodniki, izolatory i półprzewodniki (o których będziemy mówić w podręczniku do trzeciej klasy).

W przewodniku część elektronów odłącza się od swoich macierzystych atomów[26] i tworzy tzw. gaz elektronowy, wypełniający równomiernie przestrzeń między jonami dodatnimi. Nazywamy je elektronami swobodnymi lub elektronami przewodnictwa, gdyż są one odpowiedzialne za zjawisko przewodzenia prądu elektrycznego. Należy zwrócić szczególną uwagę na fakt, że elektrony przewodnictwa, mimo że mają dużą swobodę poruszania się wewnątrz przewodnika, nie mogą łatwo wydostać się poza jego obręb, więc przewodnik nie może elektryzować się samorzutnie.

[26] Nie więcej niż jeden elektron z każdego atomu.

W dowolnie wybranym obszarze makroskopowym przewodnika nienaelektryzowanego i znajdującego się z dala od innych ciał naładowanych wartości ładunków dodatniego i ujemnego są jednakowe, jest on więc elektrycznie obojętny. Typowe przewodniki to metale.

W izolatorach nie ma elektronów swobodnych, ponieważ elektrony są silnie związane w atomach. Izolatory nie przewodzą więc prądu. Bardzo dobrym izolatorem jest kryształ diamentu. Do tej grupy substancji należą także szkło, bawełna, jedwab i tworzywa sztuczne.

Prawo Coulomba

Prawo dotyczące sił działających między ładunkami punktowymi (czyli umieszczonymi na ciałach o rozmiarach bardzo małych w porównaniu z odległością między nimi) sformułował w 1785 roku francuski fizyk Charles Coulomb. Głosi ono:

> Wartość siły wzajemnego oddziaływania dwóch ładunków[27] punktowych jest wprost proporcjonalna do iloczynu wartości bezwzględnej tych ładunków i odwrotnie proporcjonalna do kwadratu ich wzajemnej odległości.
>
> $$F = k\frac{|q_1||q_2|}{r^2}$$

Symbolem k został oznaczony współczynnik proporcjonalności charakteryzujący ośrodek, w którym oddziałują ładunki.

O czym informuje współczynnik k? Jest on liczbowo równy wartości siły, którą oddziałują dwa ciała o ładunkach $q_1 = q_2 = 1$ C znajdujące się w odległości $r = 1$ m od siebie. Jeśli oddziaływanie zachodzi w próżni, to współczynnik proporcjonalności, oznaczany symbolem k_0:

$$k_0 \approx 9 \cdot 10^9 \ \frac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{C}^2}$$

informuje, że dwa ciała o ładunkach $q_1 = q_2 = 1$ C znajdujące się w odległości $r = 1$ m od siebie oddziałują wzajemnie siłami o wartości:

$$F \approx 9 \cdot 10^9 \ \mathrm{N}$$

Współczynnik k wyraża się przez inną stałą, zwaną przenikalnością elektryczną ośrodka, oznaczaną literą ε (czytaj: epsilon):

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon}$$

Dla próżni współczynnik ε_0:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k_0} \approx 8{,}9 \cdot 10^{-12}\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2} \qquad (43.1)$$

[27] Właściwie powinniśmy powiedzieć: „...ciał punktowych naelektryzowanych ładunkiem q", ponieważ pojęcie „ładunek" jest wielkością fizyczną (oddziałują ciała naelektryzowane). Ponieważ jednak ten sposób wyrażania się jest prostszy i bardzo rozpowszechniony, my także będziemy go stosować.

nosi nazwę **przenikalności elektrycznej próżni**. Inne ośrodki mają przenikalność elektryczną ε większą od przenikalności elektrycznej próżni ($\varepsilon > \varepsilon_0$).

Siły wzajemnego oddziaływania ładunków punktowych leżą na łączącej je prostej, a zwroty tych sił zależą od znaków ładunków oddziałujących ciał (rys. 43.1).
Postać prawa Coulomba jest analogiczna matematycznie do postaci prawa powszechnej grawitacji. Różnice polegają na tym, że:

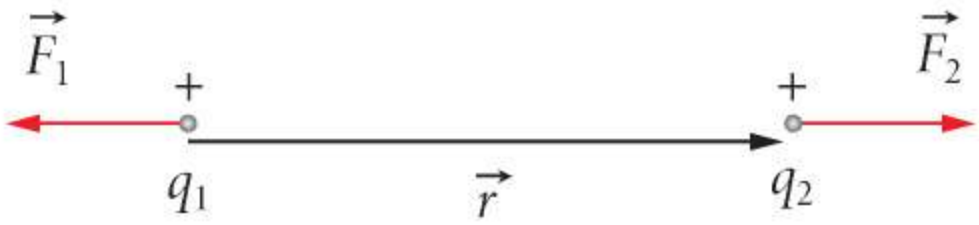
- siły grawitacji są zawsze siłami przyciągania, a siły elektrostatyczne mogą być siłami przyciągania (ładunki różnoimienne) lub odpychania (ładunki jednoimienne);
- współczynnik proporcjonalności k zależy od ośrodka, w którym ładunki oddziałują, a stała grawitacji G ma taką samą wartość liczbową w każdym ośrodku.

WIEDZIEĆ WIĘCEJ

Wzór na wektor siły elektrostatycznej

Pierwszą z wymienionych różnic musimy uwzględnić, jeśli prawo Coulomba chcemy zapisać wektorowo. Odległości między ładunkami punktowymi przyporządkujmy wektor $\vec{r}$, który zwrócimy (umownie) w stronę ładunku q_2, jak na rysunku 43.1. Jeśli ładunki q_1 i q_2 są jednakowego znaku (wzajemnie się odpychają), to ich iloczyn $q_1 q_2$ jest dodatni.

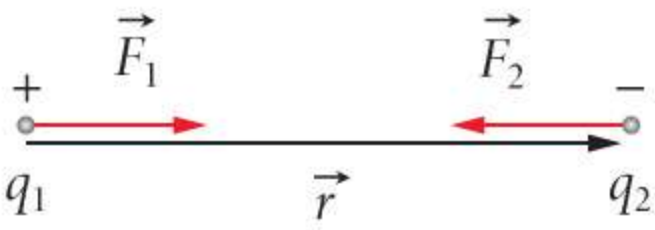
a)



$$\vec{F}_1 = -k\frac{q_1 q_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{F}_2 = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

b)



$\frac{\vec{r}}{r}$ – jest wektorem jednostkowym informującym o zwrocie wektora $\vec{r}$

Rys. 43.1

Aby wektor $\vec{F}_1$ był zwrócony przeciwnie do wektora $\vec{r}$, przed współczynnikiem k należy umieścić znak „–”. Zwrot wektora $\vec{F}_2$ jest zgodny ze zwrotem wektora $\vec{r}$.
Ładunki q_1 i q_2 mogą mieć także znaki przeciwne. Wtedy iloczyn $q_1 q_2$ ma wartość ujemną. Po podstawieniu go do wyrażeń na $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ otrzymujemy wynik jak na rysunku. Przy tak zwróconym wektorze $\vec{r}$ jak na rysunku 43.1b siła $\vec{F}_1$ działająca na q_1 jest zwrócona zgodnie ze zwrotem wektora $\vec{r}$, a siła $\vec{F}_2$ – przeciwnie. Ładunki przyciągają się wzajemnie.
Wzory na rysunku są więc słuszne w obu przypadkach.

Zastanówmy się teraz, czy siły elektrostatyczne są większe czy mniejsze od sił grawitacji. Odpowiedź zależy od tego, o jakich ciałach mówimy. Duże obiekty, takie jak Ziemia, inne planety czy satelity, mają na ogół całkowity ładunek równy zeru lub

tak mały, że ich oddziaływania elektrostatyczne można pominąć przy opisie ruchów (np. gdy opisujemy ruch Księżyca wokół Ziemi, bierzemy pod uwagę tylko oddziaływania grawitacyjne).
Zupełnie inaczej rzecz ma się z cząstkami, które są składnikami atomów. Jeśli porównamy siły elektrostatyczne z siłami grawitacji dla pary elektronów, okaże się, że te pierwsze są wiele, wiele razy większe!

Przykład 43.1

Porównanie sił grawitacyjnych i elektrostatycznych

Porównajmy wartości sił grawitacji i elektrostatycznej, którymi oddziałują wzajemnie w próżni dwa elektrony oddalone od siebie o $1\ \mathrm{m}$.

Wartość siły grawitacji:

$$F_\mathrm{g} = G\frac{m^2}{r^2}$$

Masa elektronu $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}$, więc:

$$F_\mathrm{g} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{kg^2}} \cdot (9{,}11 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg})^2}{1\ \mathrm{m^2}} \approx 5 \cdot 10^{-71}\ \mathrm{N}$$

Wartość siły elektrostatycznego odpychania elektronów:

$$F_\mathrm{el} = \frac{k_0 q^2}{r^2}$$

Ładunek elektronu $q = -1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}$, więc:

$$F_\mathrm{el} = \frac{9 \cdot 10^{9}\ \frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{C^2}} \cdot (1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C})^2}{1\ \mathrm{m^2}} \approx 2 \cdot 10^{-28}\ \mathrm{N}$$

Stosunek wartości sił (niezależny od odległości) wynosi:

$$\frac{F_\mathrm{el}}{F_\mathrm{g}} = \frac{k_0 e^2}{G m_\mathrm{e}^2} \approx \frac{2}{5} \cdot 10^{43} \approx 10^{42}$$

Siła elektrostatycznego oddziaływania elektronów ma niewyobrażalnie wielką wartość w porównaniu z siłą ich oddziaływania grawitacyjnego.

Richard P. Feynman w swoich *Wykładach* daje taki przykład ilustrujący wielkość sił elektrostatycznych: „Jeśli jedna osoba stanęłaby w odległości ramienia od drugiej osoby i jeśli każda z tych osób miałaby o 1% więcej elektronów niż protonów, to siła odpychająca byłaby niewiarygodnie wielka. Jak wielka? [...] Byłaby dostatecznie wielka, by unieść ciężar równy ciężarowi całej Ziemi”[28].

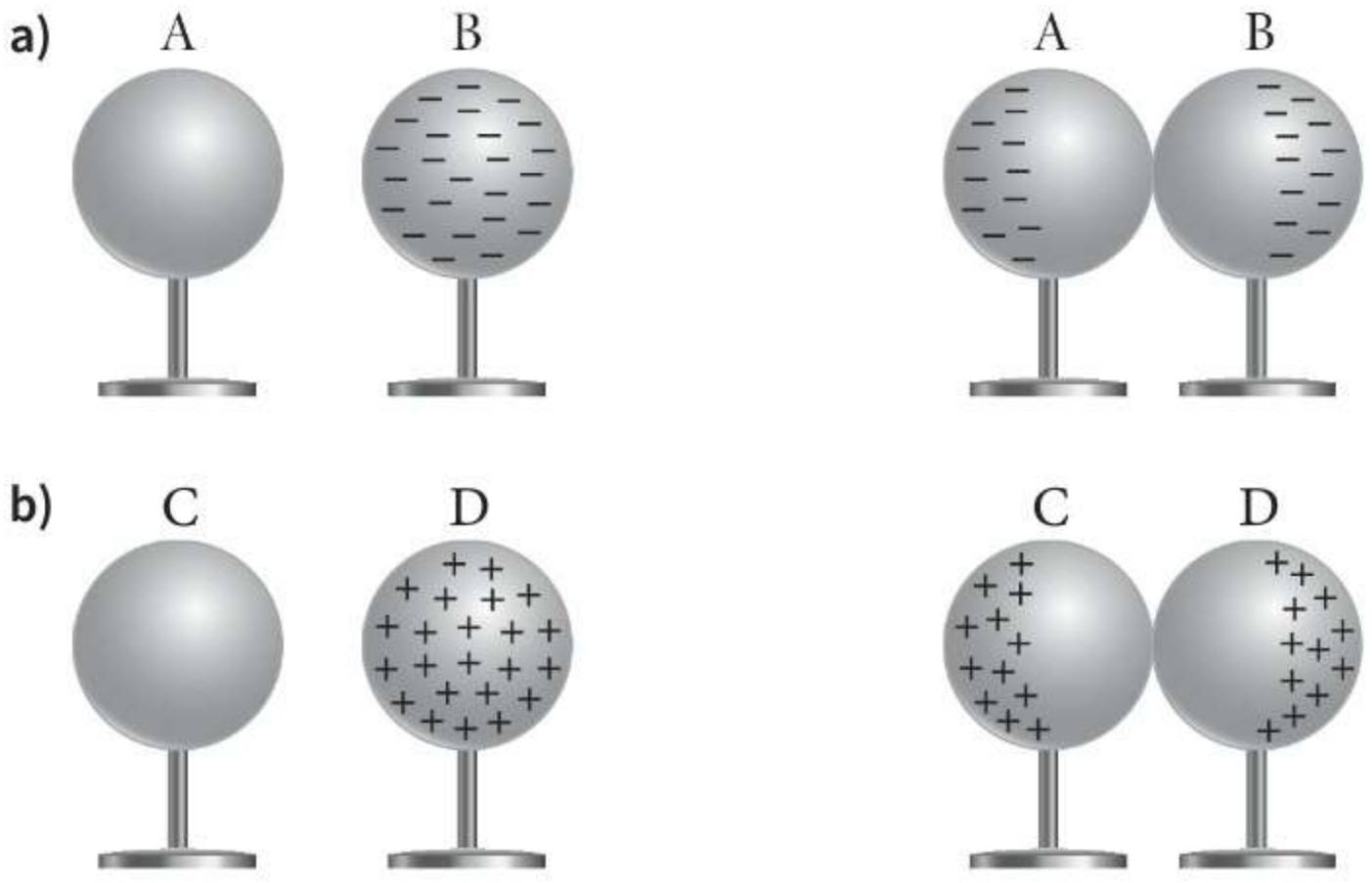
Rozważania te da się podsumować krótko: siły grawitacji można pominąć, gdy mówimy o oddziaływaniach najmniejszych cząstek materii, a gdy rozpatrujemy oddziaływania dużych ciał, można pominąć oddziaływania elektrostatyczne w porównaniu z siłami grawitacji (o ile specjalnie nie naelektryzujemy tych ciał odpowiednio dużym ładunkiem).

[28] Tłumaczenie na podst. R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, vol. 2, California Institute of Technology 1964, s. 1-1.

Elektryzowanie ciał. Zasada zachowania ładunku

Sposoby elektryzowania ciał przez zetknięcie ciała obojętnego z ciałem naelektryzowanym, pocieranie i indukcję znane ci są już ze szkoły podstawowej. Omówimy je teraz kolejno.

1. Zetknięcie ciała obojętnego elektrycznie z ciałem naelektryzowanym



Rys. 43.2 Elektryzowanie przez zetknięcie

Po dotknięciu wykonanej z przewodnika i obojętnej elektrycznie kulki A kulką B naelektryzowaną ujemnie nastąpi przejście części elektronów na kulkę A (rys. 43.2a), więc obydwie kulki po zetknięciu będą naelektryzowane ujemnie. Podobnie dotknięcie obojętnej elektrycznie kulki C naelektryzowaną dodatnio kulką D spowoduje przejście części elektronów na kulkę D naelektryzowaną dodatnio (rys. 43.2b). Po zetknięciu obydwa ciała będą naelektryzowane dodatnio. Ten sposób stosuje się zwykle podczas elektryzowania przewodników.

Najistotniejszą informację, a mianowicie: ile ładunku przejdzie z jednego ciała na drugie, aby ustaliła się równowaga, uzyskasz w dalszym ciągu nauki o elektryczności.

2. Pocieranie ciał elektrycznie obojętnych

Teoria zjawiska elektryzowania przez pocieranie jest bardzo skomplikowana i nie będziemy jej omawiać. Doświadczenia pokazują natomiast, że w celu uzyskania dużego ładunku na ciałach pocieranych i pocierających należy je odpowiednio dobrać. Na przykład elektryzującą się ujemnie pałeczkę ebonitową pocieramy zwykle wełną, a pałeczkę szklaną, elektryzującą się dodatnio – jedwabiem lub suchym papierem. Oznacza to, że podczas pocierania z wełny przechodzi na ebonit więcej elektronów niż z ebonitu na wełnę. Wełna elektryzuje się dodatnio, a ebonit – ujemnie.

Podczas pocierania jedwabiem szkło traci elektrony, które przechodzą na jedwab. Szkło elektryzuje się dodatnio, jedwab – ujemnie.

Ten sposób stosuje się zwykle podczas elektryzowania izolatorów.

3. Elektryzowanie przez indukcję (wpływ)

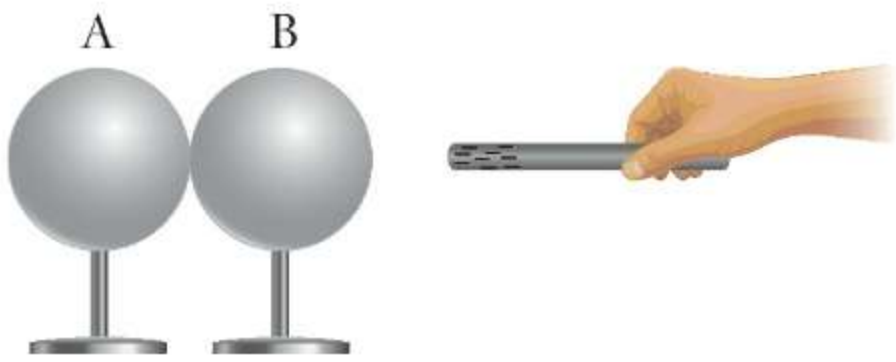
W celu przypomnienia tego zjawiska proponujemy wykonanie dwóch doświadczeń.

Doświadczenie 43.1

Badanie znaku ładunku naelektryzowanych kul

Kawałkiem folii aluminiowej owijamy koniec nitki i nadajemy folii kształt kuleczki. Kuleczkę elektryzujemy dodatnio. Tak sporządzonym „przyrządem" będziemy sprawdzać znak ładunku.

Dwie obojętne elektrycznie metalowe kule stykamy i do jednej z nich, np. B, zbliżamy naelektryzowaną pałeczkę ebonitową (rys. 43.3).



Rys. 43.3

Trzymamy pałeczkę w pobliżu tej kuli i odsuwamy kulę A. Za pomocą przygotowanego przyrządu badamy znak ładunku każdej z kul. Okazuje się, że kula B została naelektryzowana dodatnio, a kula A – ujemnie.

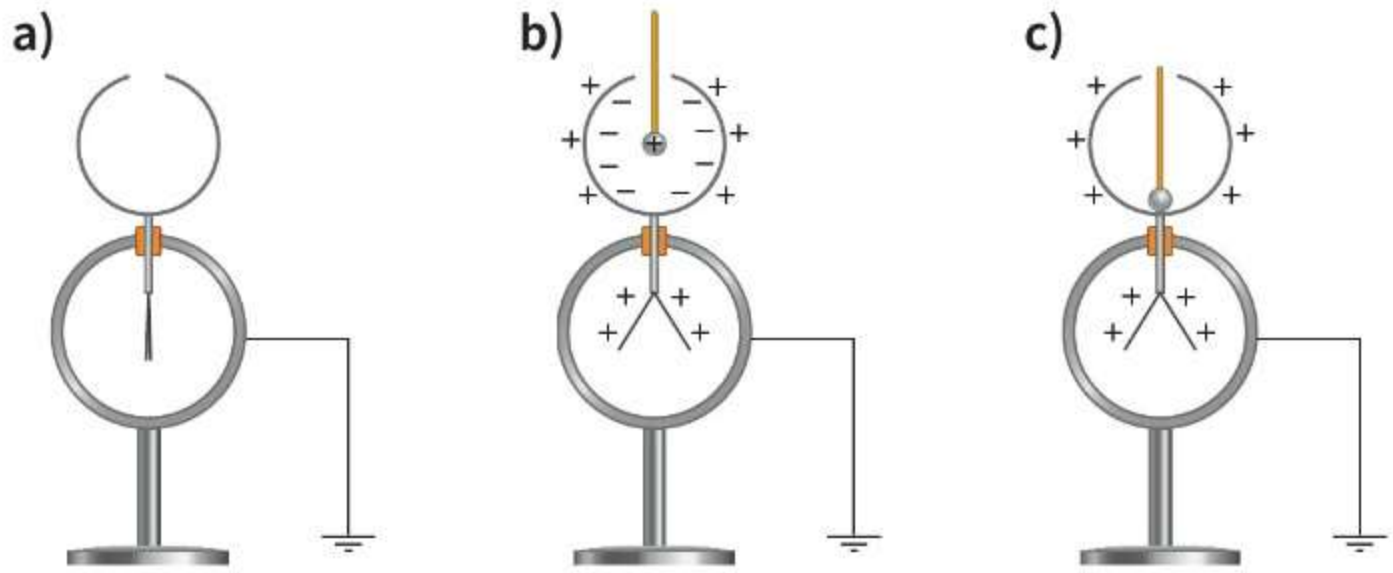
Naelektryzowana pałeczka ebonitowa spowodowała przemieszczenie części elektronów z kuli B na kulę A, czyli wpłynęła na rozmieszczenie ładunków na kulach. Taki sposób elektryzowania nazywamy elektryzowaniem przez wpływ lub indukcję.

Doświadczenie 43.2

Elektryzowanie czaszy kulistej przez indukcję

Kulistą metalową czaszę z otworem nakładamy na pręt elektroskopu (rys. 43.4a). We wnętrzu czaszy umieszczamy dodatnio naładowaną kuleczkę, trzymaną za izolujący uchwyt lub nitkę, tak jak na rysunku 43.4b.

Czasza naelektryzuje się przez indukcję: od wewnętrznej strony ujemnie, od zewnętrznej – dodatnio. Listki elektroskopu połączone z zewnętrzną stroną czaszy elektryzują się także dodatnio. Jeśli dotkniemy kulką wnętrza czaszy, zauważymy, że wychylenie listków nie ulegnie zmianie.



Rys. 43.4

Oznacza to, że ładunek indukowany ma dokładnie taką samą wartość jak indukujący go ładunek kulki i po zetknięciu kulki z wewnętrzną stroną czaszy jej ujemny ładunek zobojętnia dodatni ładunek kulki. Wyindukowany ładunek na zewnętrznej stronie czaszy nie ulega zmianie.

W procesach elektryzowania ciał mamy do czynienia z przepływem, a nie wytwarzaniem ładunku. Wszystkie wykonane dotąd przez fizyków doświadczenia pokazują, że:

> W układzie ciał izolowanych elektrycznie od wszystkich innych ciał ładunek może przemieszczać się z jednego ciała do drugiego, ale jego całkowita wartość (suma algebraiczna) nie może ulec zmianie.

Powyższe stwierdzenie nosi nazwę **zasady zachowania ładunku**.

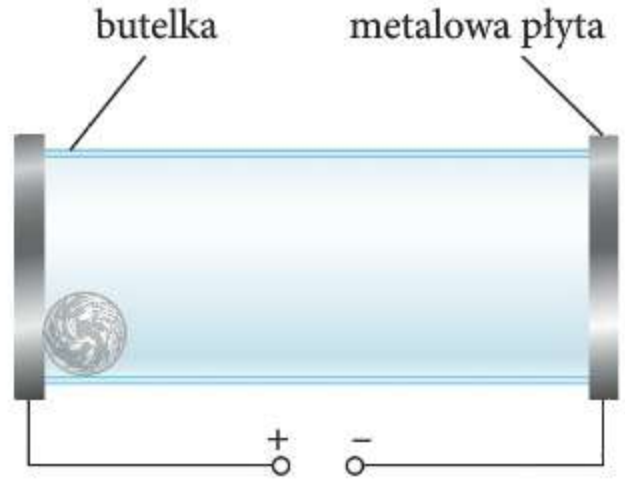
ZADANIA

1. Ładunki $Q_1 = 0{,}2\ \mu C$ i $Q_2 = 0{,}4\ \mu C$ znajdują się we wzajemnej odległości $d = 2\ m$. W środku łączącego je odcinka umieszczono trzeci ładunek $q = 0{,}1\ \mu C$. Oblicz wartość siły wypadkowej działającej na ładunek q i podaj jej zwrot.

2. Ustal, jakim ruchem oddalałyby się od siebie dwie małe kulki naelektryzowane jednoimiennie, jeśli **jedyną** siłą działającą na każdą z nich byłaby siła elektrostatyczna. Uzasadnij odpowiedź.

3. Gumowy balonik wiszący na jedwabnej nitce naelektryzowano przez pocieranie kawałkiem wełnianej szmatki. Co zaobserwujesz, jeśli po naelektryzowaniu balonika zbliżysz do niego tę samą szmatkę? Uzasadnij odpowiedź.

4. Między dwiema płytami metalowymi (np. wieczkami puszek) dołączonymi do źródła napięcia (np. maszyny elektrostatycznej) umieszczono poziomo cylindryczną część dużej plastikowej butelki (rys. 43.5). W butelce znajduje się piłeczka pingpongowa pokryta warstwą grafitu, który jest przewodnikiem. Jak zachowuje się piłeczka, jeśli w chwili początkowej dotykała jednej z płyt? Wyjaśnij obserwowane zjawisko.

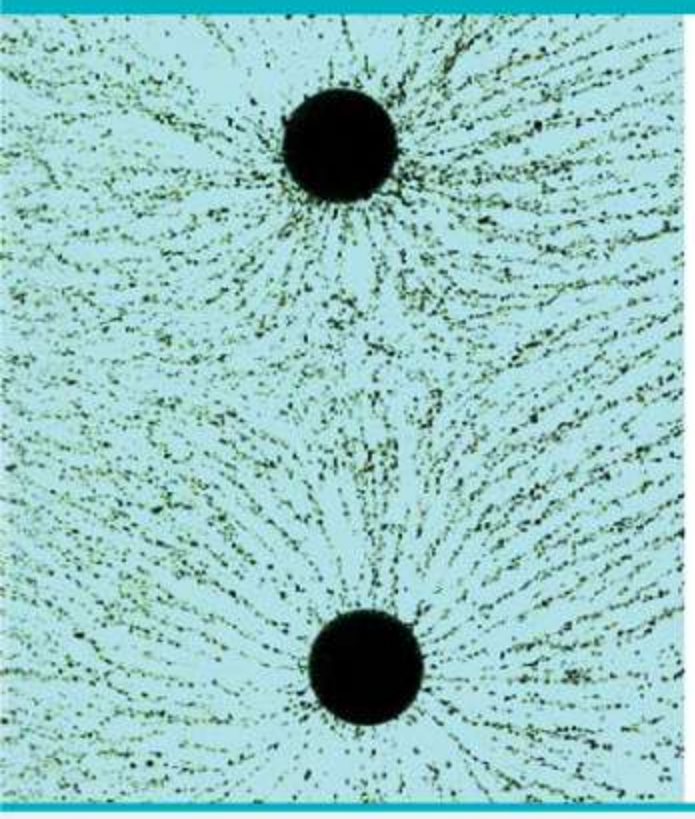


Rys. 43.5

5. Elektrofor składa się z dwóch krążków: ebonitowego i metalowego, z izolującym uchwytem (rys. 43.6). Jeśli chcemy trwale naelektryzować metalowy krążek, postępujemy tak, jak opisano poniżej.
Krążek ebonitowy pocieramy wełnianą szmatką. Następnie przykładamy do niego krążek metalowy, który trzymamy za izolujący uchwyt. W chwili, gdy krążki spoczywają jeden na drugim, dotykamy palcem metalowego krążka. Po odsunięciu palca oddalamy krążek (trzymany przez cały czas za uchwyt) od płyty ebonitowej. Tak przygotowany krążek jest trwale naelektryzowany.
Wyjaśnij zjawiska zachodzące podczas kolejnych czynności. Jaki jest znak ładunku naelektryzowanego metalowego krążka?



Rys. 43.6



44. Natężenie pola elektrostatycznego

- Definicja i sens fizyczny natężenia pola elektrostatycznego
- Od czego zależy natężenie pola elektrostatycznego?
- Badanie kształtu linii pól elektrostatycznych
- Jednorodne i centralne pole elektrostatyczne
- Zasada superpozycji natężeń pól

Przypomnij sobie wiadomości o oddziaływaniach na odległość i matematyczny opis pola grawitacyjnego (rozdział 12).

Oddziaływanie wzajemne ciał naelektryzowanych należy do oddziaływań za pośrednictwem pola. Jeśli ciało jest elektrycznie obojętne, wytwarza wokół siebie tylko pole grawitacyjne, w którym na inne znajdujące się w otoczeniu ciała działają siły grawitacji. Jeżeli rozpatrywane przez nas ciało jest naelektryzowane, stanowi także źródło pola elektrostatycznego. Na umieszczone w takim polu inne naelektryzowane ciała działa siła elektrostatyczna.

Elementem badawczym w polu grawitacyjnym było punktowe ciało próbne. Umieszczaliśmy je w różnych punktach przestrzeni i badaliśmy działającą na nie siłę. Siła ta nie charakteryzowała pola w danym punkcie, gdyż jej wartość zależała od masy ciała próbnego.

Analogiczna sytuacja ma miejsce w polu elektrostatycznym. Istnienie pola elektrostatycznego można wykryć za pomocą ciała naelektryzowanego ładunkiem q (np. kuleczki aluminiowej przygotowanej do doświadczenia 43.1). Siła działająca na naelektryzowane ciało próbne umieszczone w danym punkcie pola zależy nie tylko od pola, lecz także od ładunku ciała próbnego. Cechą siły elektrycznej jest bowiem jej proporcjonalność do ładunku q, na który działa. Przyjmujemy umownie, że **ładunek próbny jest dodatni**. Jeżeli podzielimy siłę przez ładunek ciała próbnego, otrzymamy wielkość niezależną od tego ładunku, a więc charakteryzującą pole elektrostatyczne w danym punkcie. Wielkość tę nazywamy **natężeniem pola elektrostatycznego** i oznaczamy symbolem $\vec{E}$.

Natężeniem pola elektrostatycznego w danym punkcie nazywamy iloraz siły elektrostatycznej działającej na dodatni ładunek próbny q, umieszczony w tym punkcie, i wartości tego ładunku.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_{\text{el}}}{q} \qquad (44.1)$$

Natężenie pola elektrostatycznego w danym punkcie ma zawsze zwrot zgodny ze zwrotem siły działającej na dodatni ładunek próbny.

Wymiary i ładunek ciała próbnego służącego do badania pola elektrostatycznego muszą być bardzo małe (dokładniej omówimy to zagadnienie w rozdziale 46). Idealnym modelem ciała próbnego jest naelektryzowany punkt materialny.

Jednostką natężenia pola elektrostatycznego w SI jest:

$$1\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} = 1\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{s}\cdot\mathrm{A}\cdot\mathrm{s}^2} = 1\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{A}\cdot\mathrm{s}^3}$$

Skorzystamy ze wzoru definiującego natężenie pola i zapiszemy wzór na siłę działającą na dowolny ładunek q.

$$\vec{F} = q\vec{E} \qquad (44.2)$$

Zauważ, że jeżeli ładunek q jest dodatni, to siła działająca na ten ładunek ma zwrot zgodny z wektorem $\vec{E}$, a jeśli ładunek q jest ujemny, to siła ta jest zwrócona przeciwnie do $\vec{E}$. Za pomocą wzoru (44.2) można obliczać siłę elektryczną w każdym polu elektrostatycznym, ponieważ definicja natężenia pola $\vec{E}$ jest słuszna w każdym polu, niezależnie od rozkładu ładunku będącego jego źródłem. Na przykład ładunek może być rozmieszczony na płaszczyźnie, pręcie czy kuli.

Od czego zależy wartość natężenia pola elektrostatycznego w danym punkcie?

Podobnie jak w polu grawitacyjnym: wartość natężenia pola elektrostatycznego zależy od rozkładu ładunku będącego źródłem pola. Jeśli źródłem pola są naładowane ładunkiem Q: cząstka, kulka, powłoka kulista (czyli źródło o symetrii sferycznej), to na ładunek próbny q znajdujący się na zewnątrz kuli (powłoki) w odległości r od jej środka działa siła kulombowska o wartości:

$$F = k\frac{|Q||q|}{r^2}$$

Wobec tego wartość natężenia pola w badanym punkcie w próżni:

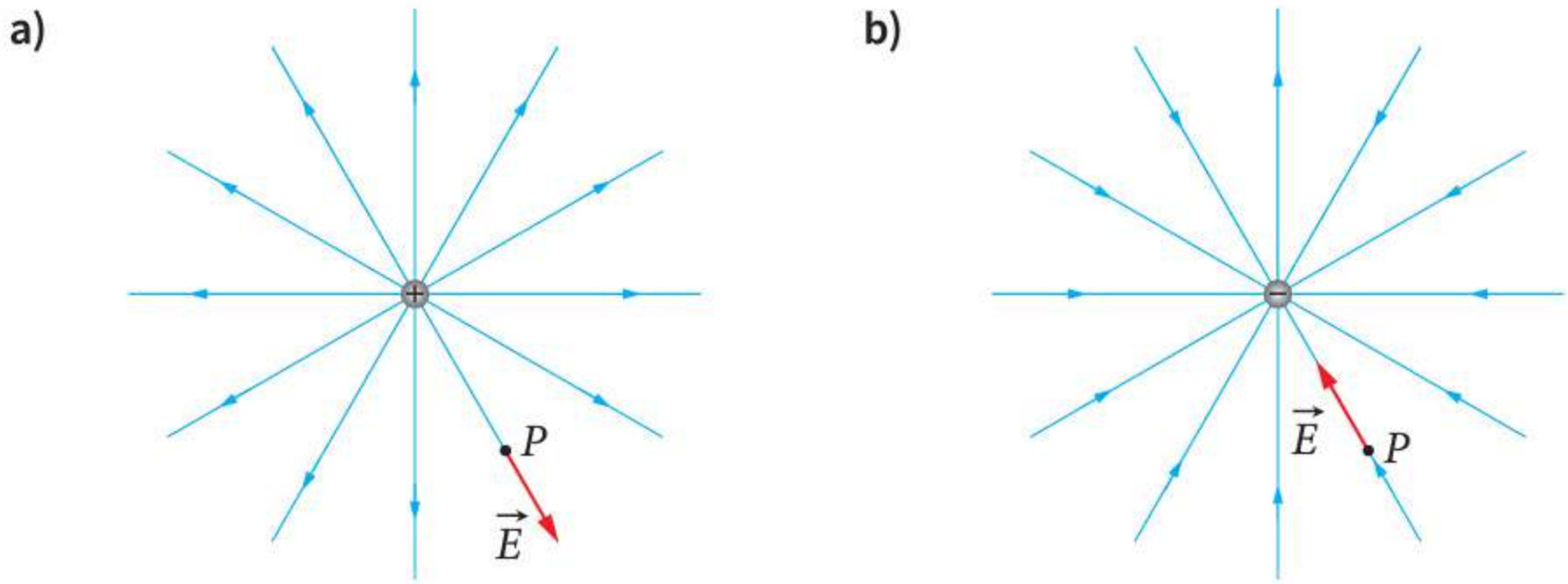
$$E = k_0\frac{|Q|}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|Q|}{r^2} \qquad (44.3)$$

W innym jednorodnym ośrodku o przenikalności elektrycznej ε:

$$E = k\frac{|Q|}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{|Q|}{r^2} \qquad (44.4)$$

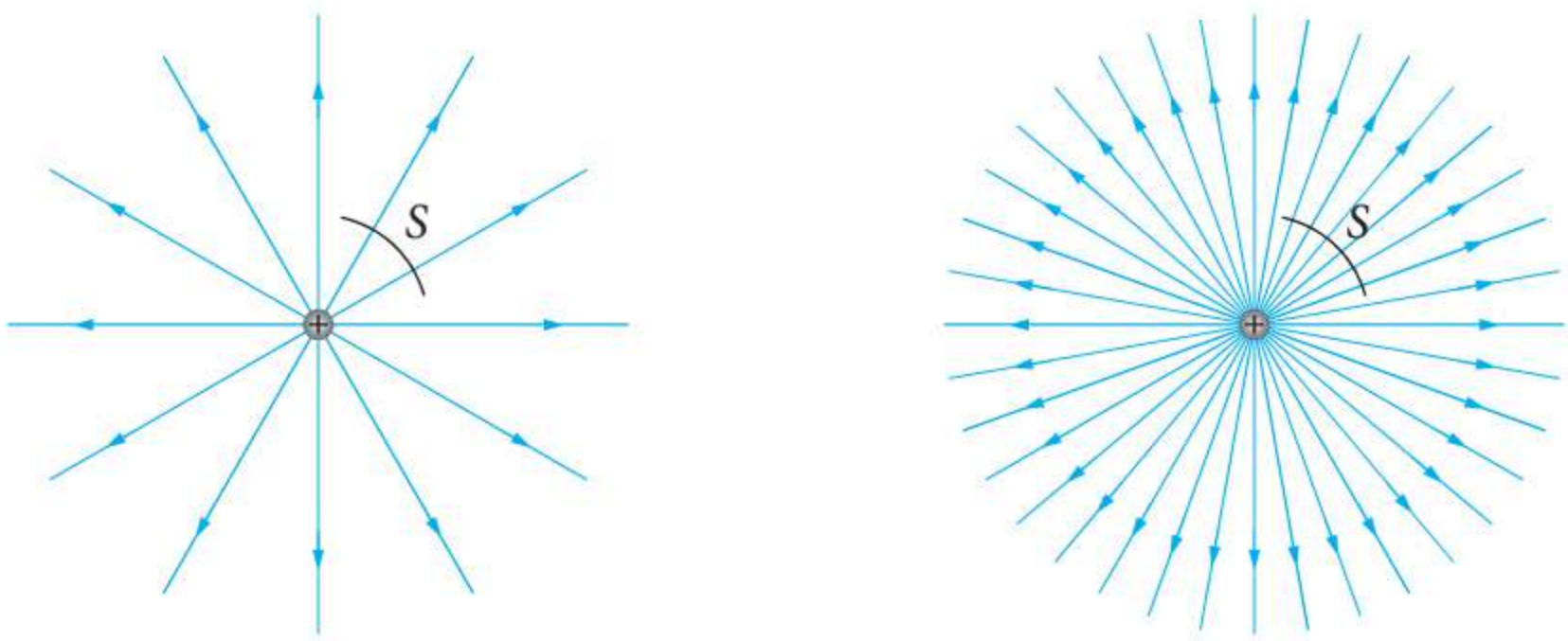
Pole elektrostatyczne o symetrii sferycznej nazywamy **polem centralnym**. Dla innych rozkładów ładunków natężenie wyraża się innymi wzorami.

W celu graficznego przedstawienia pola elektrostatycznego posługujemy się **liniami natężenia pola** (krócej – **liniami pola**). Są to krzywe (niekiedy proste!), do których wektor natężenia pola jest w każdym punkcie styczny (rys. 44.1).



Rys. 44.1 Centralne pola elektrostatyczne wytworzone przez: ładunek dodatni (a), ładunek ujemny (b)

Na podstawie liczby linii pola przecinających taką samą powierzchnię S w różnych miejscach pola wnioskujemy o wartości natężenia pola w tych miejscach. Im większa liczba linii pola – tym większe jego natężenie (rys. 44.2).

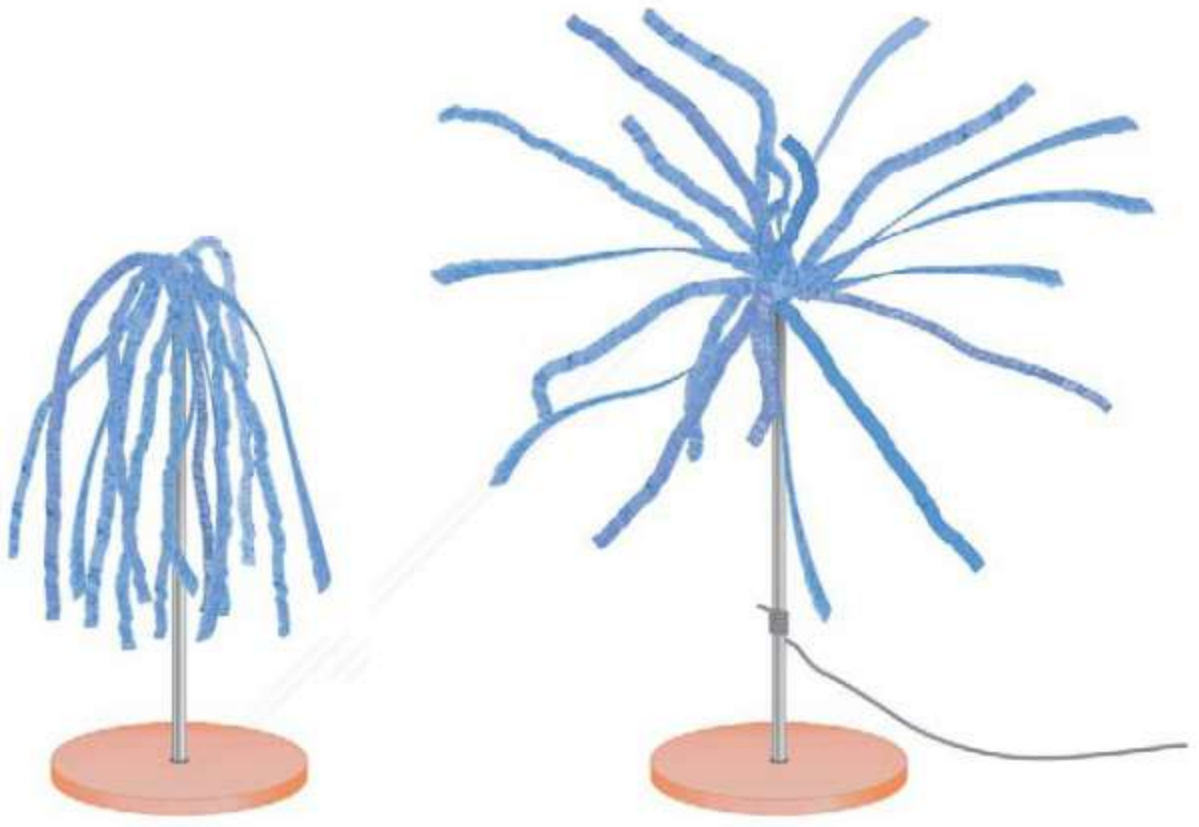


Rys. 44.2 Centralne pola elektrostatyczne o różnych natężeniach

Doświadczenie 44.1

Badanie kształtu linii centralnego pola elektrostatycznego

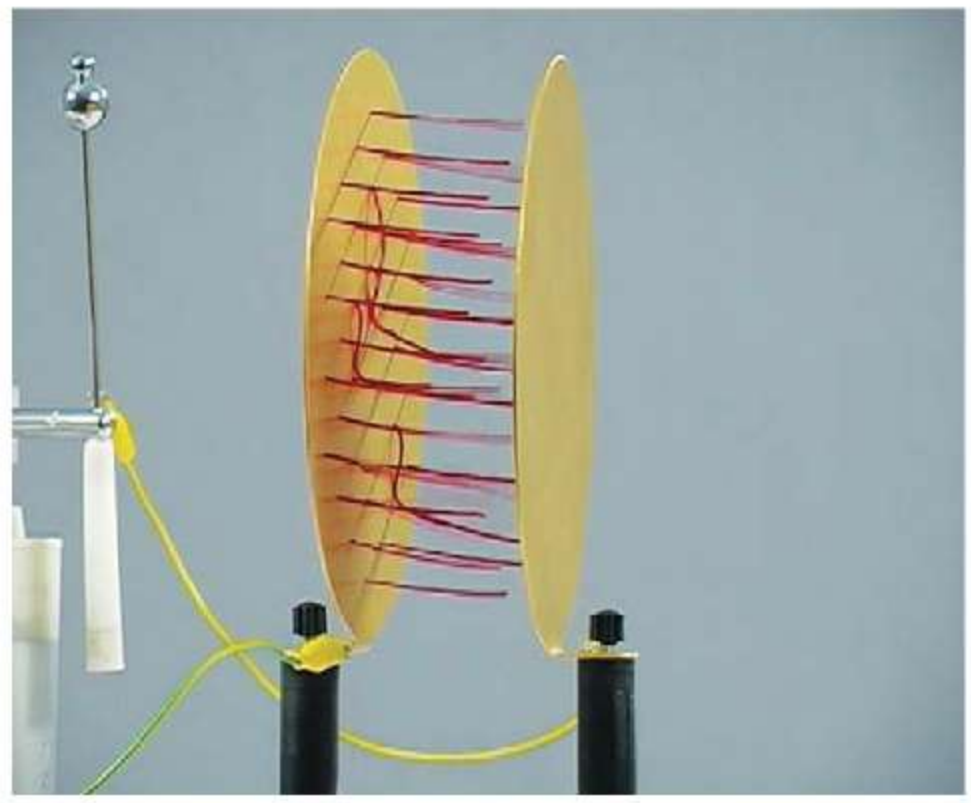
Z pasków cienkiej bibuły o długości ok. 15 cm i szerokości 3–4 mm wykonujemy pióropusz i mocujemy go na podstawce z izolatora. Łączymy pióropusz z biegunem maszyny elektrostatycznej i obserwujemy, jak układają się paski (rys. 44.3).



Rys. 44.3

Pole elektrostatyczne wytworzone między dwiema naelektryzowanymi różnoimiennie płytami (rys. 44.4) jest **polem jednorodnym**.

O polu jednorodnym (polu grawitacyjnym w pobliżu Ziemi) mówiliśmy już w rozdziale 12. W każdym polu jednorodnym linie pola są do siebie równoległe, a natężenie pola jest we wszystkich jego punktach jednakowe.



Rys. 44.4 Jednorodne pole elektrostatyczne

Zasada superpozycji natężeń pól

Aby obliczyć natężenie pola elektrostatycznego pochodzącego od kilku ładunków punktowych, możemy postąpić podobnie jak w przypadku pola grawitacyjnego, czyli zastosować **zasadę superpozycji**, a więc zsumować wektory natężeń w danym punkcie pola pochodzące od wszystkich ładunków. Ta wektorowa suma jest natężeniem pola pochodzącym od układu ładunków.

Ważną rolę w opisie wielu zjawisk fizyki i chemii fizycznej odgrywa **dipol elektryczny**. Jest to układ dwóch punktowych ładunków elektrycznych równych co do wartości, lecz o przeciwnych znakach. Zastosujmy zasadę superpozycji do znalezienia natężenia pola elektrostatycznego wytworzonego przez dipol.

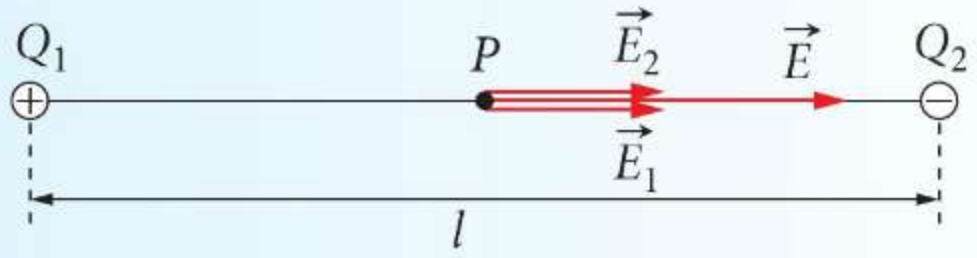
Przykład 44.1

Natężenie pola elektrostatycznego w środku dipola

Natężenie $\vec{E}$ pola elektrostatycznego w punkcie P jest sumą natężeń pól wytworzonych w tym punkcie przez ładunki Q_1 i Q_2 (rys. 44.5).

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$Q_1 = |Q_2| = Q$$



Rys. 44.5

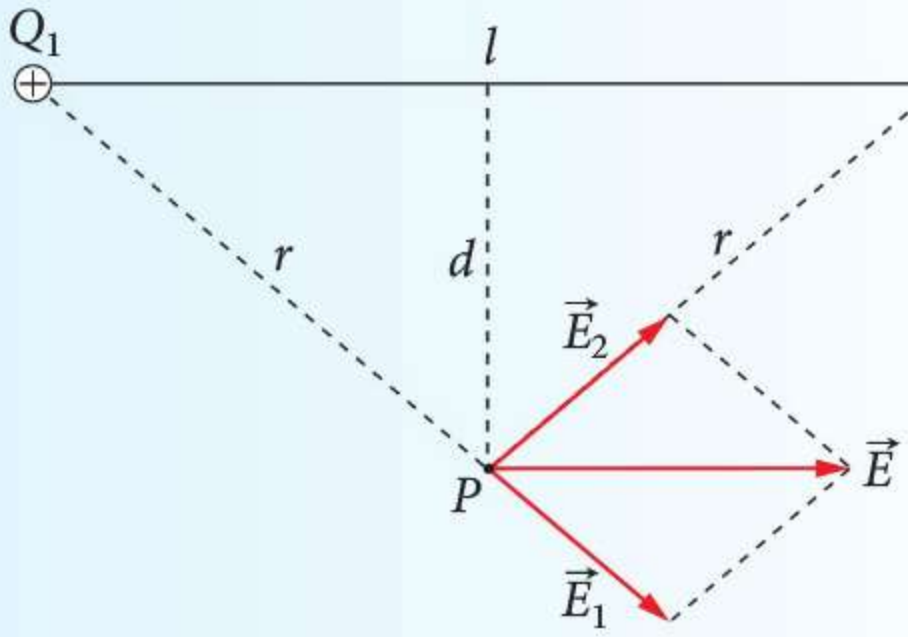
Jeśli trudno ci określić, jaki jest zwrot wektora natężenia pola elektrostatycznego wytworzonego przez ładunki Q_1 i Q_2 w punkcie P, wyobraź sobie, że umieszczasz tam ciało próbne o ładunku dodatnim q, i ustal, w którą stronę działa na nie siła elektrostatyczna pochodząca od ładunków Q_1 i Q_2. W punkcie P kierunki oraz zwroty $\vec{E}_1$ i $\vec{E}_2$ są zgodne, więc:

$$E = k_0 \frac{Q}{\left(\frac{l}{2}\right)^2} + k_0 \frac{Q}{\left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{8k_0 Q}{l^2} = \frac{2Q}{\pi\varepsilon_0 l^2}$$

Przykład 44.2

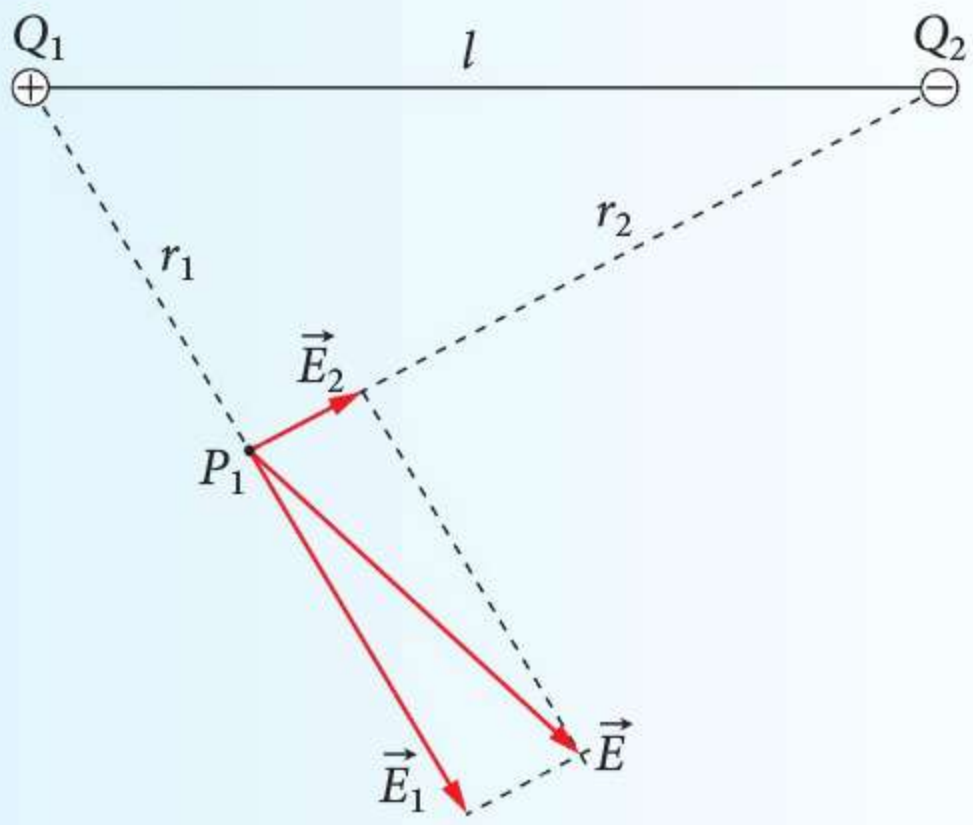
Zastosowanie zasady superpozycji do konstruowania natężenia pola wytworzonego przez dipol w dowolnym punkcie

Na rysunku 44.6 przedstawiono sposób konstrukcji geometrycznej wektora natężenia pola elektrostatycznego wytworzonego przez dipol w dowolnym punkcie symetralnej odcinka łączącego ładunki.



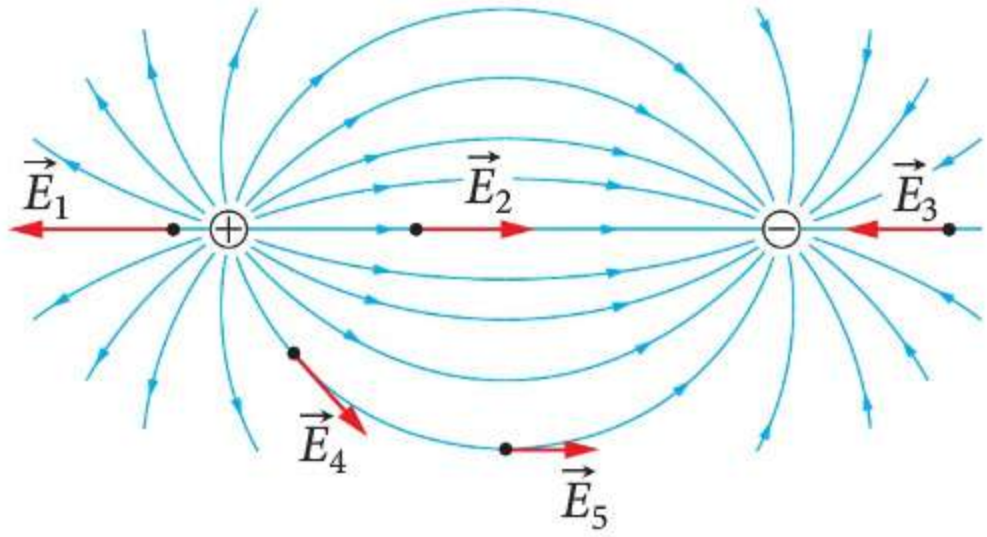
Rys. 44.6

Na rysunku 44.7 przedstawiono sposób konstrukcji geometrycznej wektora natężenia pola elektrostatycznego wytworzonego przez dipol w dowolnym punkcie przestrzeni (np. P_1).



Rys. 44.7

Jeśli znamy kierunek natężenia pola elektrostatycznego w różnych punktach przestrzeni, możemy skonstruować linie tego pola. Wektor natężenia w każdym punkcie musi być styczny do linii pola (rys. 44.8).



Rys. 44.8 Pole elektrostatyczne dipola

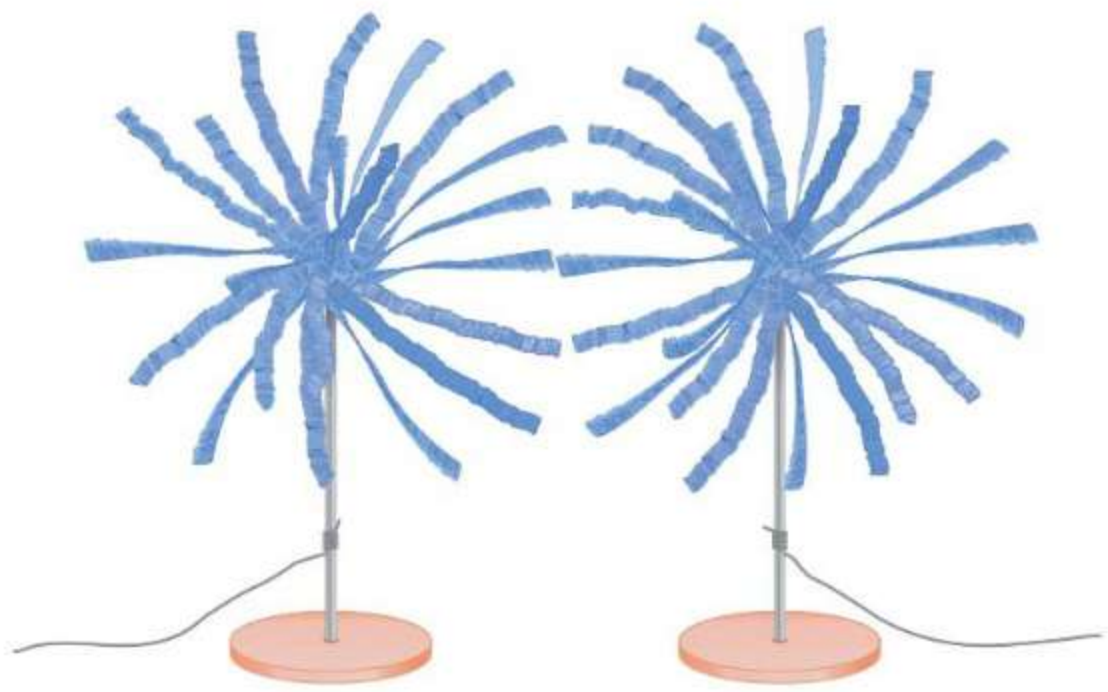
Doświadczenie 44.2

Badanie kształtu linii pola elektrostatycznego wytworzonego przez układ dwóch ładunków

Dwa pióropusze ustawiamy w odległości ok. 30 cm i łączymy:

a) każdy z innym biegunem maszyny elektrostatycznej (rys. 44.9);

b) oba z jednym biegunem maszyny elektrostatycznej.



Rys. 44.9

Obserwujemy kształt linii pola elektrostatycznego i w przypadku a porównujemy z wykonaną konstrukcją. Wykonaj samodzielnie konstrukcję linii pola dla przypadku b.

WIEDZIEĆ WIĘCEJ

Elektrofiltr przeciwsmogowy

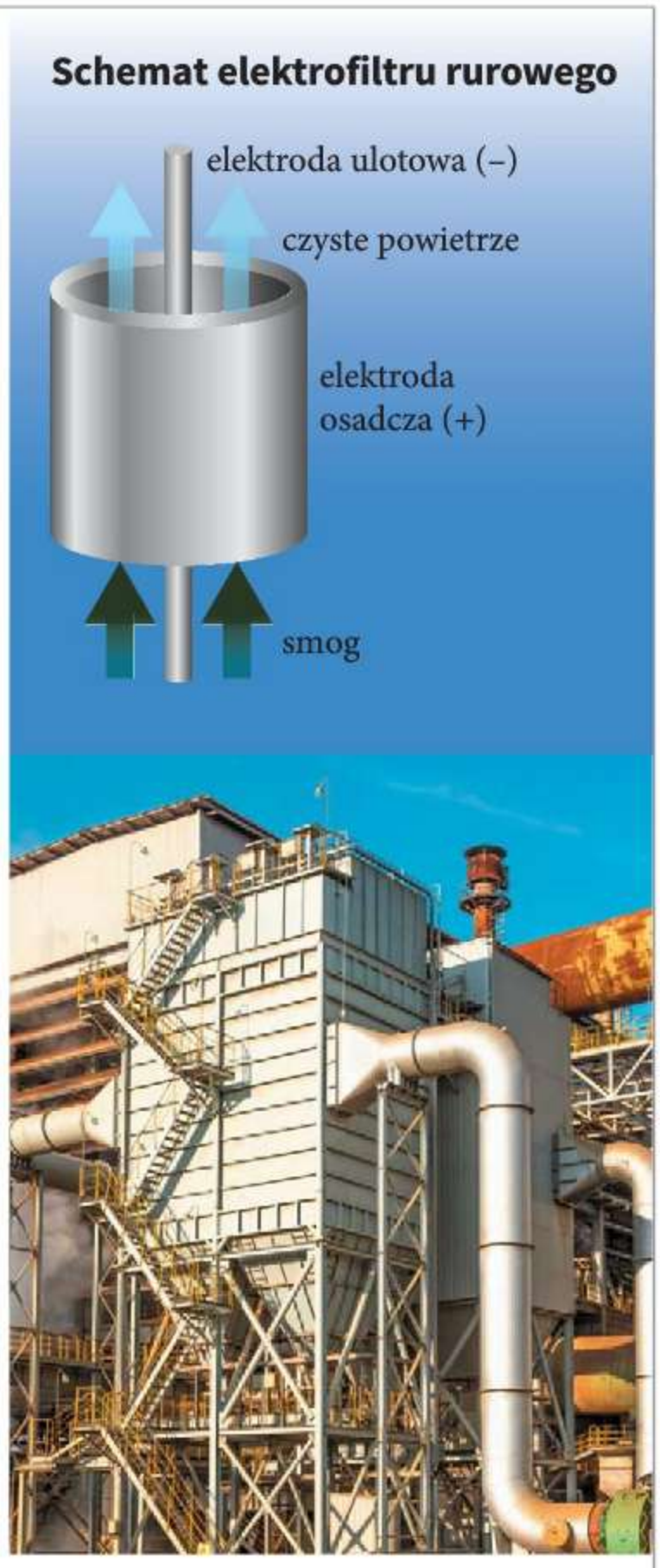
Zjawisko atmosferyczne polegające na wymieszaniu się mgły z dymem i spalinami nazywamy popularnie smogiem. Nazwa ta powstała z połączenia angielskich słów: ***smoke*** (dym) i ***fog*** (mgła). Smog zawiera przede wszystkim szkodliwe związki chemiczne w stanie gazowym (np. tlenki węgla, siarki i azotu) oraz substancje stałe, czyli tzw. pyły zawieszone. Substancje te stanowią wielkie zagrożenie dla zdrowia człowieka i bywają przyczyną alergii, astmy, zapalenia oskrzeli, niewydolności oddechowej, chorób serca i układu krwionośnego. Zwiększają także ryzyko zachorowania na nowotwory płuc.



Jednym ze sposobów na ograniczenie przenikania trujących substancji do środowiska jest montowanie na kominach przemysłowych i domowych instalacjach grzewczych elektrofiltrów przeciwsmogowych, służących do usuwania pyłów z gazów emitowanych do atmosfery. Skuteczność działania elektrofiltrów jest bardzo duża – dla cząstek o średnicy 1 μm wynosi ok. 99%.

Praca elektrofiltru opiera się na wykorzystaniu siły elektrostatycznej działającej na cząstki pyłu. Aby proces oczyszczania gazów był możliwy, trzeba naelektryzować cząstki pyłu, które na ogół są elektrycznie obojętne. Do ich naelektryzowania wykorzystuje się zjawisko tzw. ulotu (zwanego też wyładowaniem koronowym), które polega na wyładowaniu elektrycznym w silnym niejednorodnym polu elektrycznym. Pole to jest wytwarzane między dwiema elektrodami: elektrodą ulotową naładowaną ujemnie i elektrodą osadczą (zbiorczą) naładowaną dodatnio. Napięcie między nimi jest rzędu kilkudziesięciu tysięcy woltów.

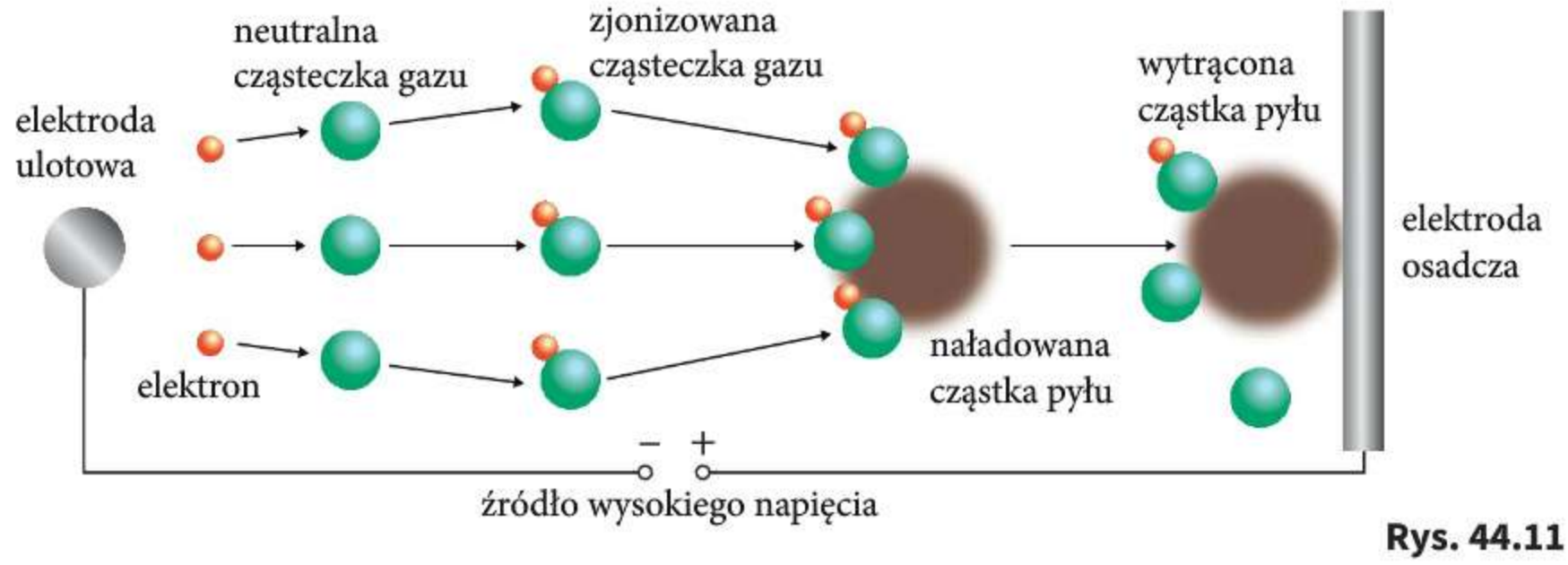
W elektrofiltrach przemysłowych elektrody ulotowe najczęściej mają kształt prętów, a elektrody zbiorcze – metalowej rury. Między tymi dwiema elektrodami przepływa strumień odpylanego gazu. Taka konstrukcja elektrofiltru nosi nazwę elektrofiltru rurowego (rys. 44.10).



Rys. 44.10

Na skutek wyładowania elektrony opuszczające elektrodę ulotową (rys. 44.11) prawie natychmiast łączą się z cząsteczkami powietrza w jony ujemne, które zderzają się z kolei z cząstkami pyłu i powodują ich elektryzowanie. Cząstki pyłu obdarzone ujemnym ładunkiem elektrycznym wędrują (migrują) dalej do elektrody osadczej (dodatniej), będącej częścią przewodu kominowego, osadzają się na niej i zobojętniają. Te neutralne elektrycznie cząstki pyłu są z elektrody osadczej strącane lub spłukiwane, a oczyszczone powietrze kierowane jest do atmosfery.

Zasada działania elektrofiltru



Rys. 44.11

ZADANIA

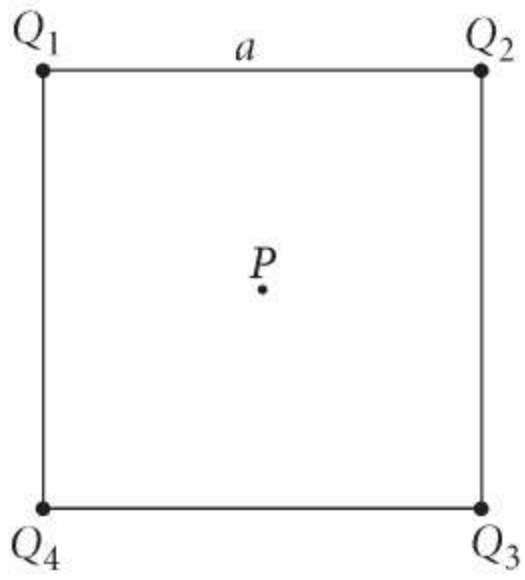
1. Ustal kierunek i zwrot natężenia pola elektrostatycznego na osi dipola (rys. 44.12):
a) w punkcie A,
b) w punkcie B.



Rys. 44.12

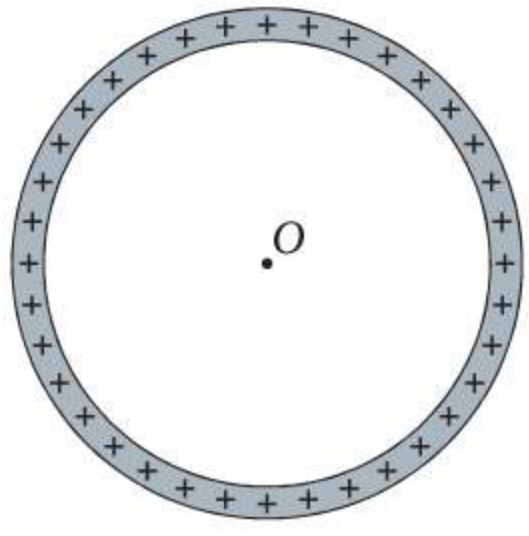
Jak zmienia się wartość natężenia pola w miarę oddalania punktu A od dipola?

2. Ustal kierunek, zwrot i wartość natężenia pola elektrostatycznego $\vec{E}$ w środku kwadratu o boku a, w którego wierzchołkach umieszczono ładunki punktowe, jak na rysunku 44.13. Przyjmij, że $a = 1\ \mathrm{m}$.



Rys. 44.13

3. Znajdź natężenie pola elektrostatycznego w środku równomiernie naładowanego pierścienia (rys. 44.14).
Wskazówka: Potraktuj ładunek pierścienia jako zbiór bardzo wielu ładunków punktowych.



Rys. 44.14

4. Ustal kierunek i zwrot natężenia pola elektrostatycznego wytworzonego przez cienki i długi, jednorodnie naelektryzowany pręt w punkcie leżącym na jego symetralnej. Czy w punktach leżących w pobliżu końców pręta kierunek $\vec{E}$ będzie taki sam?
Wskazówka: Potraktuj ładunek pręta jako zbiór bardzo wielu ładunków punktowych.

5. Wyprowadź wzór na wartość E natężenia pola wytworzonego (w próżni) przez dipol w punkcie P leżącym na symetralnej dipola w odległości d od jego środka (rys. 44.6 w przykładzie 44.2). Jako dane przyjmij $Q_1 = |Q_2| = Q$ oraz l i d.
Wskazówka: Skorzystaj z podobieństwa odpowiednich trójkątów.



45. Naelektryzowany przewodnik

- Rozkład ładunku na powierzchni przewodnika
- Klatka Faradaya
- Gęstość powierzchniowa ładunku

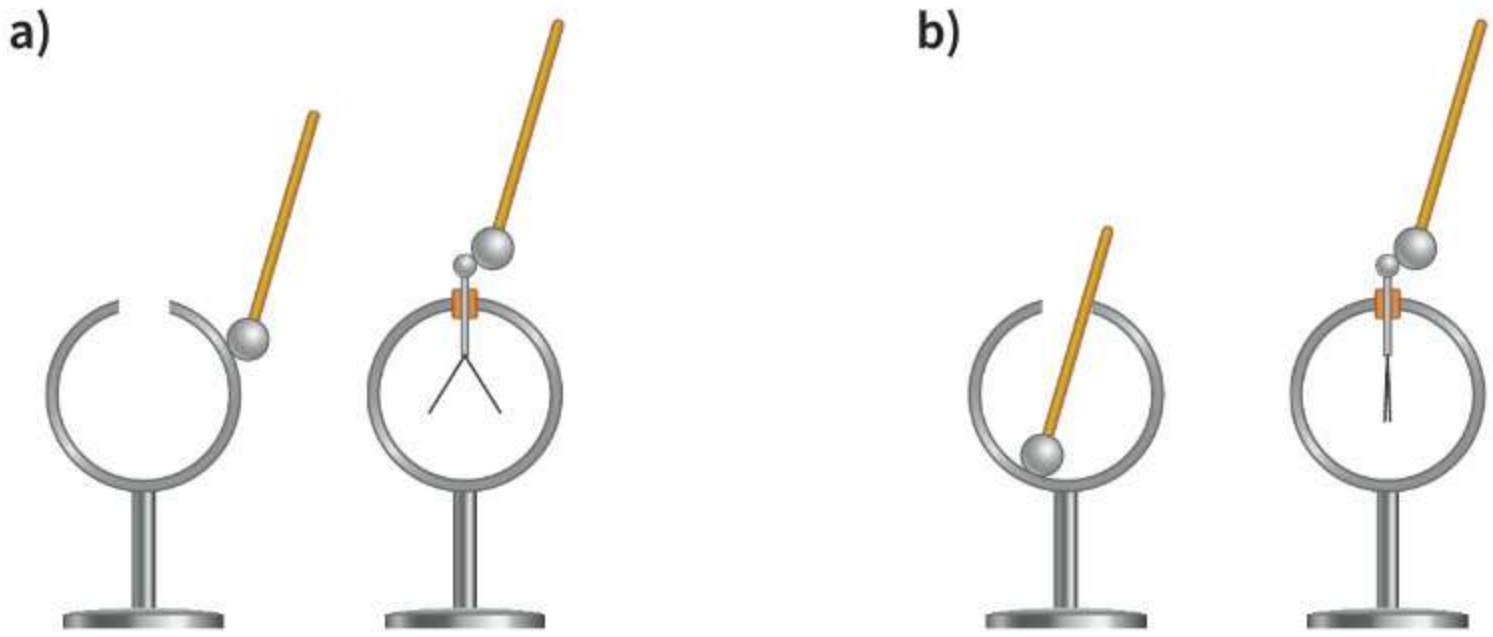
Przypomnij sobie definicję natężenia pola elektrostatycznego i wynikający z niej wzór na siłę elektrostatyczną oraz rozkładanie wektora na składowe o zadanych kierunkach.

Jakie jest natężenie pola elektrostatycznego wewnątrz naelektryzowanego przewodnika? Sprawdzimy to doświadczalnie.

Doświadczenie 45.1

Badanie ładunku wewnątrz naładowanego przewodnika

Metalowy przewodnik kulisty elektryzujemy za pomocą maszyny elektrostatycznej, następnie dotykamy zewnętrznej powierzchni przewodnika metalową kuleczką i badamy jej ładunek za pomocą elektroskopu (rys. 45.1a). Zobojętniamy kuleczkę, dotykamy teraz wewnętrznej powierzchni przewodnika i ponownie badamy jej ładunek (rys. 45.1b)



Rys. 45.1

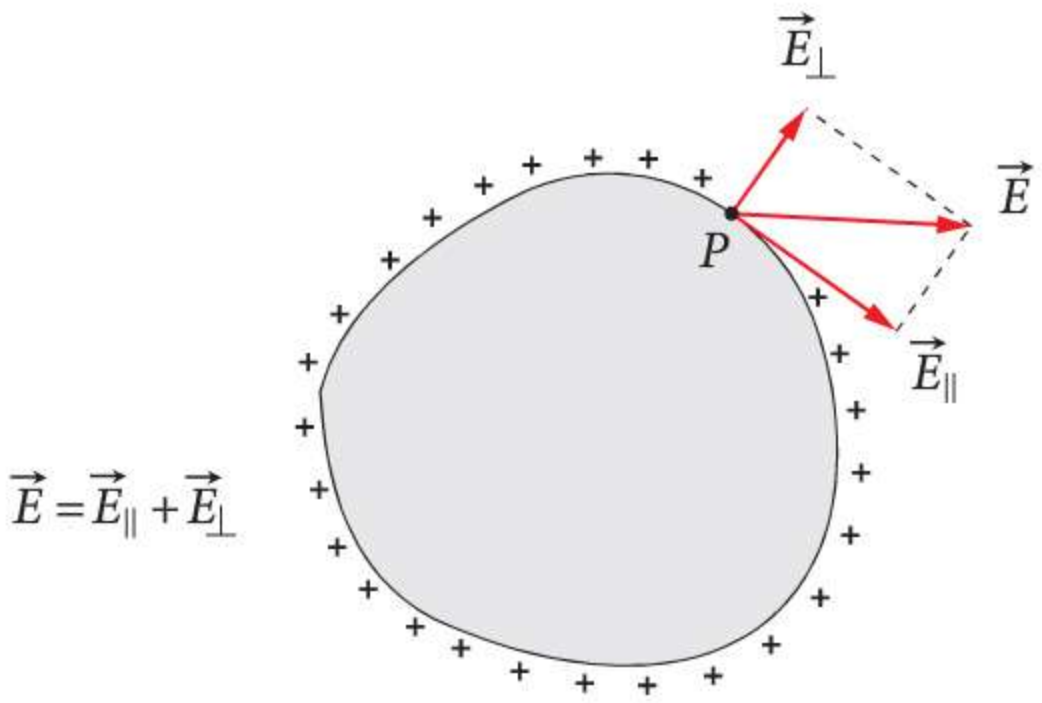
Obserwujemy, że listki elektroskopu wychylają się tylko w sytuacji a, co oznacza, że kuleczka naelektryzowała się tylko przy zetknięciu z zewnętrzną powierzchnią kulistego przewodnika. Na jego wewnętrznej powierzchni nie było ładunku (sytuacja b).

Przeprowadzone doświadczenie pokazuje, że **ładunek dostarczony przewodnikowi rozmieszcza się tylko na jego zewnętrznej powierzchni**.

Pole znika wewnątrz wszystkich naładowanych przewodników, powłok i wnęk dowolnego kształtu. Po ustaleniu się stanu równowagi rozkład ładunku na powierzchni przewodnika nie ulega zmianie.

Obecnie nie dziwią nas spostrzeżenia **Michaela Faradaya**:
„Wszedłem do metalowej skrzyni i mieszkałem w niej. Używając zapalonych świec, elektrometrów i innych przyrządów służących do sprawdzania stanu naelektryzowania, nie mogłem stwierdzić najmniejszego oddziaływania na nie [...], pomimo że przez cały czas zewnętrzna powierzchnia skrzyni była potężnie naelektryzowana i wielkie iskry wyskakiwały z każdej jej części”[29].

Zgromadzone na powierzchni przewodnika ładunki po uzyskaniu równowagi pozostają w spoczynku.
Gdyby wektor natężenia pola $\vec{E}$ w dowolnym punkcie P przewodnika miał kierunek np. taki jak na rysunku 45.2,



Rys. 45.2 Dlaczego natężenie pola przy powierzchni przewodnika (w stanie równowagi) jest do niej prostopadłe?

to na znajdujący się w punkcie P ładunek działałaby stycznie do powierzchni siła:

$$\vec{F}_\parallel = q\vec{E}_\parallel$$

powodująca przemieszczenie tego ładunku. Ponieważ ładunki spoczywają, wnioskujemy, że siła $\vec{F}_\parallel = \vec{0}$, więc natężenie pola $\vec{E}$ (i zarazem linie pola) w każdym punkcie powierzchni przewodnika w stanie równowagi jest prostopadłe do tej powierzchni.

Do opisu rozkładu ładunku na powierzchni przewodnika wprowadzamy pojęcie **gęstości powierzchniowej ładunku**.

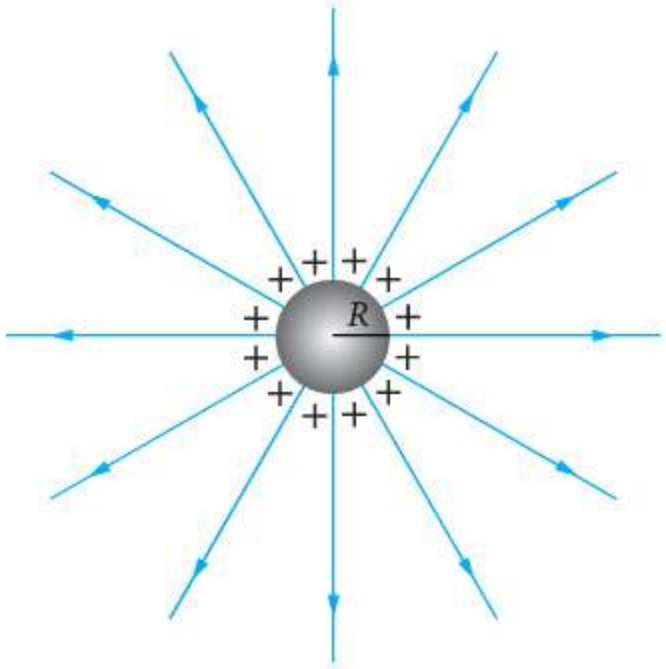
Gęstością powierzchniową ładunku σ nazywamy iloraz ładunku Q zgromadzonego na pewnej powierzchni S i tej powierzchni:

$$\sigma = \frac{Q}{S}$$

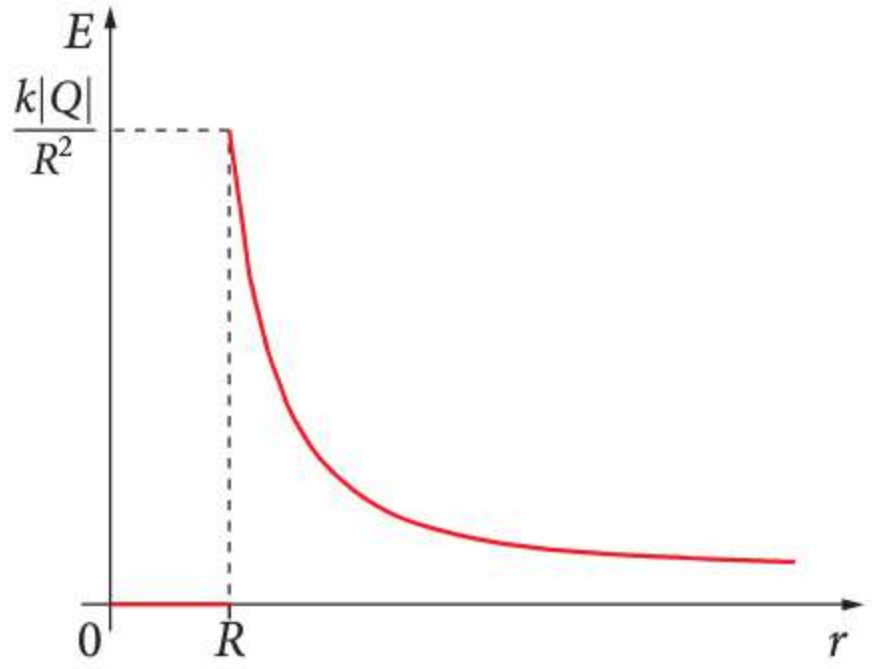
Na powierzchni kulistego przewodnika ładunek jest rozłożony równomiernie – gęstość powierzchniowa ładunku jest stała.

[29] Tłumaczenie na podst. M. Faraday, *Experimental Researches in Electricity. Eleventh Series*, „Philosophical Transactions” 1838, vol. 128, s. 5.

Pole elektrostatyczne wytworzone przez przewodnik kulisty o promieniu R naelektryzowany ładunkiem Q jest na zewnątrz kuli takie samo jak pole ładunku punktowego Q umieszczonego w środku kuli (rys. 45.3).
Natężenie tego pola dla $r \geqslant R$ ma wartość $E = \frac{k|Q|}{r^2}$, gdzie r jest odległością od środka kuli. Zależność $E(r)$ przedstawia poniższy wykres (rys. 45.4).



Rys. 45.3 Pole elektrostatyczne na zewnątrz kuli o promieniu R



Rys. 45.4 Wykres $E(r)$ dla naładowanej kuli

Jeśli jednak przewodnik ma nieregularne kształty (rys. 45.5), to gęstość powierzchniowa ładunku w obszarach A i B naładowanego przewodnika nie jest jednakowa.



Rys. 45.5 Przewodnik o nieregularnych kształtach



Rys. 45.6 Obserwacja wiatru elektronowego

Im mniejszy promień krzywizny przewodnika, tym większa gęstość zgromadzonego w tym miejscu ładunku, a więc na ostrzach gromadzi się go najwięcej. Gęstość ładunku elektrycznego na ostrzach może być tak duża, że spowoduje tzw. **wiatr elektronowy**. Można go zaobserwować, gdy zbliży się płomień świecy do naelektryzowanej maszyną elektrostatyczną kuli z ostrzem (rys. 45.6).
Jeśli przewodnik jest naelektryzowany ujemnie, to elektrony z ostrza „spływają" na cząsteczki powietrza, po czym powstałe jony ujemne są odpychane od przewodnika i oddalają się, tworząc wiatr elektronowy. Jeśli jest naelektryzowany dodatnio, to elektrony ze znajdujących się w pobliżu ostrza obojętnych cząsteczek powietrza przeskakują na ostrze. Powstałe w wyniku tego zjawiska jony dodatnie oddalają się, także tworząc wiatr. Odchylenie płomienia świecy występuje więc niezależnie od tego, jaki jest znak ładunku kuli z ostrzem. Odkrycie zjawiska gromadzenia się ładunku na ostrzach stało się podstawą budowy piorunochronów i niektórych generatorów wysokiego napięcia.

WIEDZIEĆ WIĘCEJ

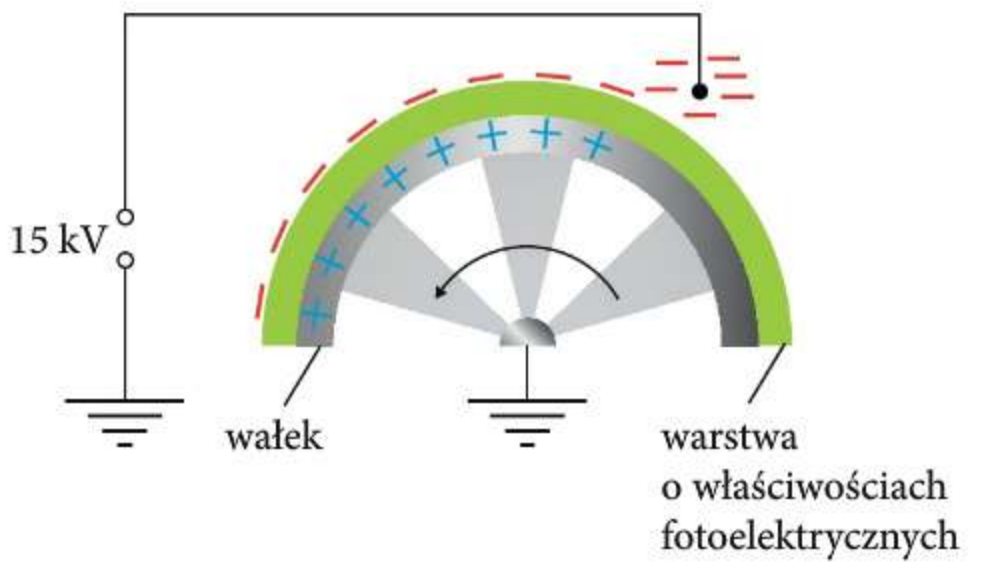
Kserokopiarka analogowa

Kserokopiarka jest urządzeniem technicznym umożliwiającym tworzenie kopii dokumentów i obrazów graficznych. „Sercem" kopiarki analogowej jest obracający się, metalowy wałek (bęben), pokryty warstwą materiałów wykazujących właściwości fotoelektryczne, które w ciemności są izolatorami, a poddane działaniu światła widzialnego stają się przewodnikami (światło generuje w nich nośniki prądu elektrycznego).

W procesie kopiowania za pomocą takiej kserokopiarki możemy wyróżnić cztery etapy:

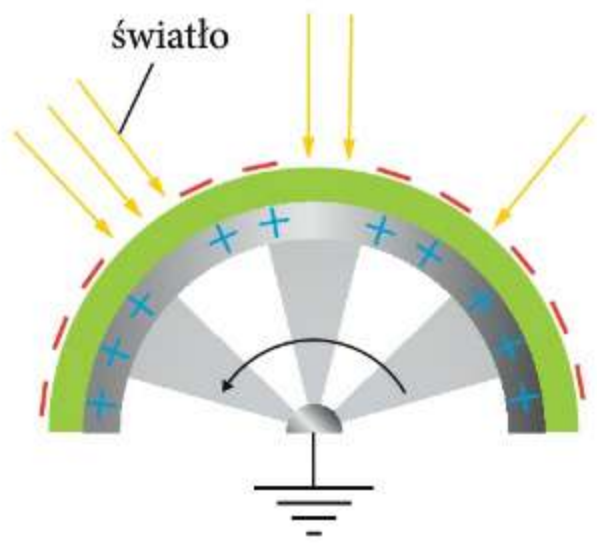
- elektryzowanie powierzchni wałka,
- przekształcenie obrazu kopiowanego dokumentu na „obraz elektrostatyczny",
- utworzenie na bębnie kserokopiarki kopii obrazu dokumentu za pomocą tonera,
- przeniesienie kopii obrazu dokumentu z bębna na papier.

Elektryzowanie powierzchni wałka



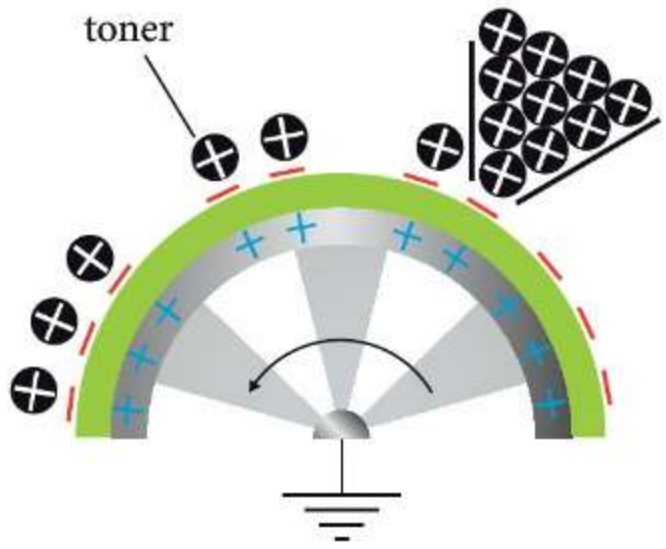
Proces powstawania kopii dokumentu rozpoczyna się od naelektryzowania powierzchni bębna kserokopiarki ładunkiem ujemnym.

Naświetlanie światłem widzialnym



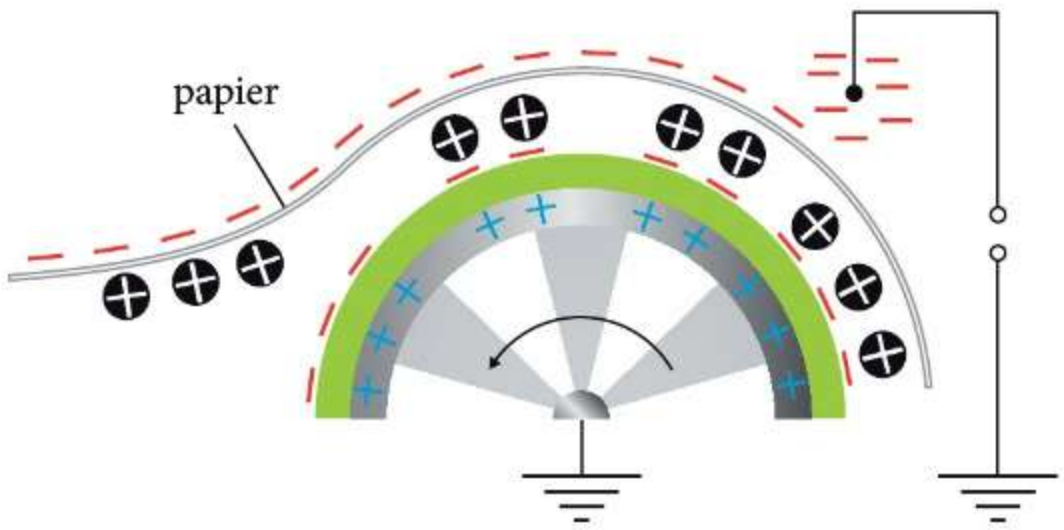
Później za pomocą specjalnego układu optycznego powierzchnia bębna jest poddawana działaniu światła widzialnego, będącego projekcją obrazu dokumentu. W miejscach odpowiadających niezadrukowanym powierzchniom dokumentu następuje neutralizacja ładunków ujemnych, a w miejscach odpowiadających powierzchniom zadrukowanym ładunek ujemny pozostaje. W ten sposób na powierzchni bębna tworzy się „obraz elektrostatyczny" dokumentu.

Nakładanie tonera



Następnie na części powierzchni bębna naelektryzowane ujemnie jest nanoszony toner, tj. proszek, którego cząstki są naelektryzowane dodatnio. Na powierzchni bębna powstaje obraz rzeczywisty oryginału dokumentu.

Tworzenie kopii na papierze



Podczas ostatniego etapu cyklu kopiowania papier, na którym ma powstać kopia dokumentu, przejmuje toner z miejsc bębna pokrytych tonerem – tak kopia dokumentu zostaje przeniesiona na papier. Proces ten ułatwia umieszczona pod papierem rolka transferowa, która też jest naładowana ujemnie i zwiększa siłę przyciągania tonera do kartki.

Aby utrwalić powstałą kopię dokumentu, papier pokryty tonerem poddawany jest działaniu wysokiej temperatury – kartka przesuwa się między dwoma wałkami ogrzanymi do temperatury ok. 200°C. W tej temperaturze toner ulega stopieniu i na stałe łączy się z papierem. Na koniec bęben jest czyszczony z resztek tonera poprzez neutralizację pozostałych cząstek naładowanych.

ZADANIA

1. Trzy baloniki zawieszone w jednym punkcie na izolujących nitkach elektryzujemy przez tarcie suknem. Baloniki odchylają się od położenia równowagi, a po zbliżeniu do nich uziemionego ostrza powracają do położenia równowagi. Wyjaśnij to zjawisko.
2. Obojętny elektrycznie metalowy przewodnik kulisty z opisanego w tym rozdziale doświadczenia 45.1 ładujemy przez dotknięcie małą naelektryzowaną kulką raz od zewnątrz, a za drugim razem od wewnątrz. W którym przypadku przewodnik zostanie silniej naelektryzowany, jeśli za każdym razem ładunek małej kulki był identyczny? Uzasadnij odpowiedź.

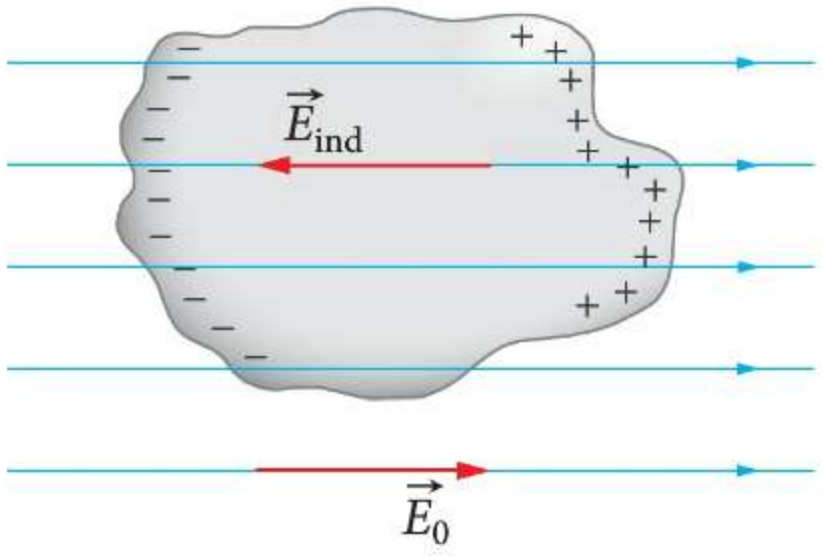


46. Przewodnik w polu elektrostatycznym

- Rozkład ładunku w przewodniku umieszczonym w zewnętrznym polu elektrostatycznym
- Natężenie pola elektrostatycznego wyindukowanego w przewodniku
- Wpływ przewodnika na pole innego naładowanego przewodnika

Przypomnij sobie wiadomości o wewnętrznej budowie przewodników.

Zastanówmy się, co dzieje się w przewodniku umieszczonym w jednorodnym polu elektrostatycznym. Zarówno na jony dodatnie tworzące sieć krystaliczną, jak i na elektrony swobodne działają siły elektrostatyczne. Jony nie mogą się przemieszczać, natomiast elektrony swobodne poruszają się zgodnie z działającą na nie siłą. Obszar, w którym będzie nadmiar elektronów, naładuje się ujemnie, a obszar pozbawiony części elektronów swobodnych – dodatnio (rys. 46.1).



Rys. 46.1 Indukowanie pola wewnątrz przewodnika po umieszczeniu go w jednorodnym polu elektrostatycznym

Uporządkowany ruch elektronów trwa do chwili, w której siły działające na swobodne elektrony ze strony pola zewnętrznego o natężeniu $\vec{E}_0$ i pola o natężeniu $\vec{E}_{ind}$ wyindukowanego wewnątrz przewodnika zrównoważą się wzajemnie. Wówczas:

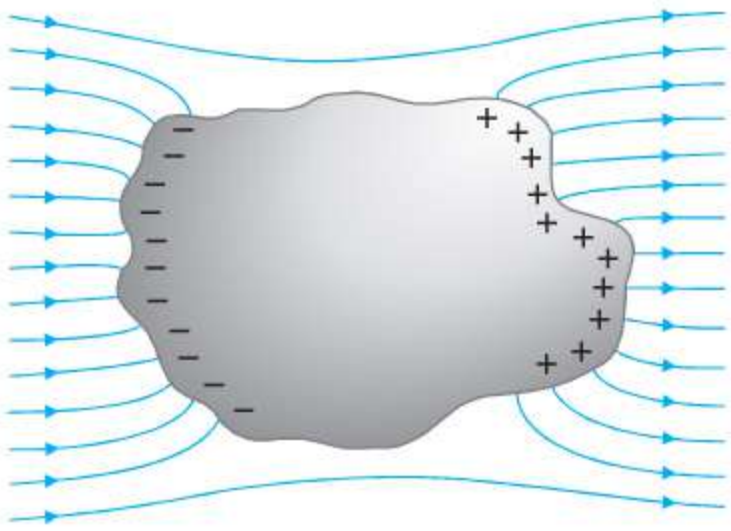
$$e\vec{E}_0 + e\vec{E}_{ind} = \vec{0}$$

$$\vec{E}_0 + \vec{E}_{ind} = \vec{0}$$

$$\vec{E}_{ind} = -\vec{E}_0 \qquad (46.1)$$

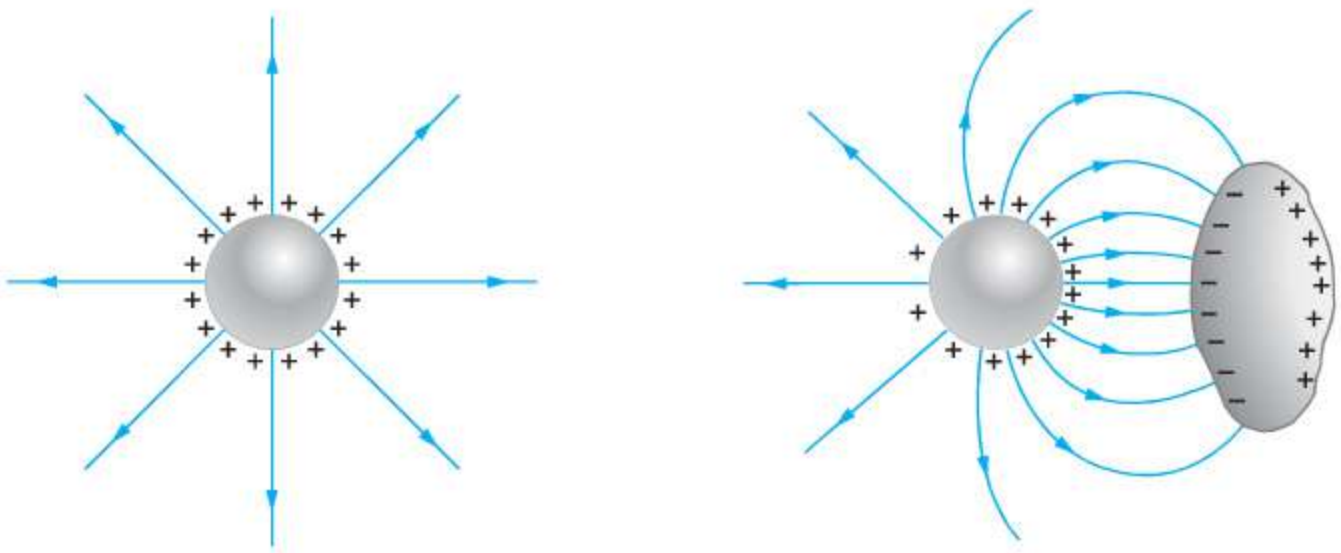
Po ustaleniu się równowagi natężenie pola wewnątrz przewodnika będzie równe zeru.

Ustalony stan pola elektrostatycznego, które pierwotnie było jednorodne, po umieszczeniu w nim przewodnika przedstawia rysunek 46.2.
Każda z linii pola elektrostatycznego jest prostopadła do powierzchni przewodnika.



Rys. 46.2 Pole elektrostatyczne w pobliżu przewodnika umieszczonego w polu jednorodnym

Uwaga: Do tej pory podczas opisywania pól elektrostatycznych wytwarzanych przez różne ciała naelektryzowane zakładaliśmy milcząco, że w ich pobliżu nie ma żadnych innych ciał. Jak widać, takie założenie jest konieczne. Naładowana kula metalowa wytwarza pole centralne, jeśli w jej pobliżu nie ma przewodnika, który spowodowałby rozsunięcie ładunków na kuli i zmianę rozmieszczenia ładunku na jej powierzchni (rys. 46.3).



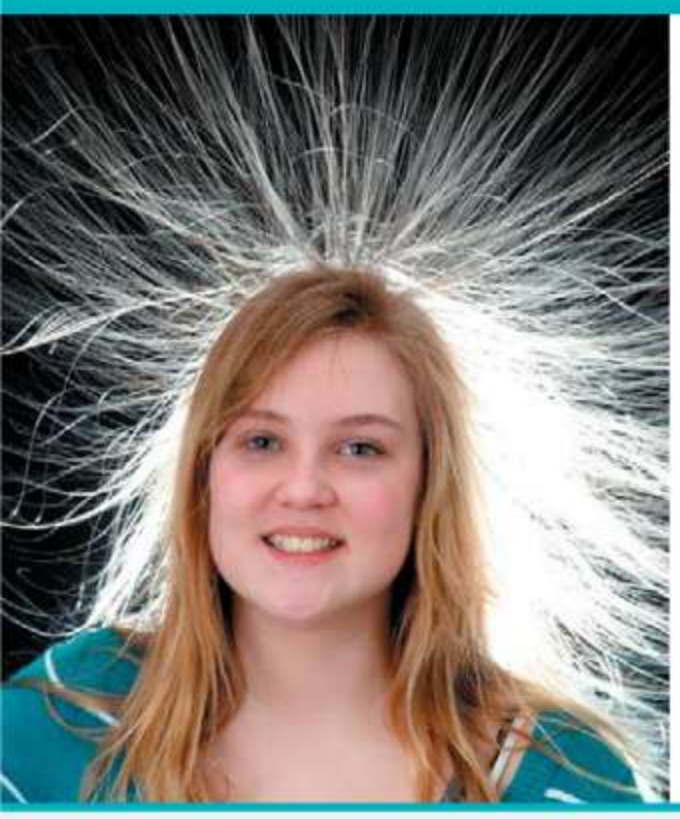
Rys. 46.3 Wpływ obecności przewodnika na pole naładowanej kuli

Zrozumiały staje się teraz warunek dotyczący rozmiarów ładunku próbnego (podany w rozdziale 44), ponieważ ładunek umieszczony w pewnym punkcie pola zmienia rozkład ładunku na ciele, którego pole badamy. Idealnym modelem ciała próbnego jest więc punkt materialny o bardzo małym ładunku dodatnim.

ZADANIA

1. Do metalowej kulki wiszącej na jedwabnej nici zbliżamy pałeczkę ebonitową naładowaną ujemnie i obserwujemy, że kulka jest przyciągana przez pałeczkę. Czy na tej podstawie możemy wnioskować, że kulka jest naładowana dodatnio? Uzasadnij odpowiedź.
2. Nienaelektryzowany przewodnik umieszczono w polu elektrostatycznym. Odpowiedz na pytania:
   - Jaką wartość ma natężenie pola **wewnątrz** przewodnika?
   - Czy natężenie pola wewnątrz przewodnika ulegnie zmianie, jeśli naelektryzujemy przewodnik?

   Uzasadnij odpowiedzi.
3. Wewnątrz metalowej osłony znajduje się metalowa kuleczka naelektryzowana ładunkiem Q. Czy pole elektrostatyczne na zewnątrz osłony ulegnie zmianie, jeżeli zmienimy położenie kuleczki wewnątrz osłony? Uzasadnij odpowiedź.



47. Analogie w opisie pól grawitacyjnego i elektrostatycznego

- Analogia sił i natężeń pól
- Praca w polu elektrostatycznym
- Energia potencjalna elektrostatyczna i potencjał pola

Przypomnij sobie prawo grawitacji, wielkości opisujące pole grawitacyjne, pojęcie grawitacyjnej energii potencjalnej i jej zmiany oraz wzór na pracę w polu grawitacyjnym.

W rozdziałach 12–15 tego podręcznika opisaliśmy centralne i jednorodne pole grawitacyjne, a przedstawione dotychczas w tym dziale wiadomości z elektrostatyki pozwoliły ci już zapewne dostrzec analogie nie tylko między wzorami przedstawiającymi wartości sił grawitacji i elektrostatycznej (prawo grawitacji Newtona i prawo Coulomba), lecz także między definicjami natężeń pól oraz wzorami pozwalającymi obliczyć wartości sił w dowolnych polach grawitacyjnych i elektrostatycznych o znanych natężeniach.

Zestawienie pojęć i wzorów dla obu pól znajduje się w tabeli 47.1.

Tabela 47.1

	Pole grawitacyjne	Pole elektrostatyczne
1.	Wartość siły grawitacji działającej między dwoma punktami materialnymi lub jednorodnymi kulami o masach M i m: $F_g = G\frac{Mm}{r^2}$	Wartość siły elektrostatycznej działającej między dwoma ładunkami punktowymi Q i q: $F_{el} = k\frac{\lvert Q\rvert\lvert q\rvert}{r^2}$
2.	Definicja natężenia pola grawitacyjnego w danym punkcie: $\vec{\gamma} = \frac{\vec{F}_g}{m}$	Definicja natężenia pola elektrostatycznego w danym punkcie: $\vec{E} = \frac{\vec{F}_{el}}{q} \qquad q > 0$
3.	Wzór na siłę grawitacji, który stosuje się w dowolnym polu grawitacyjnym: $\vec{F}_g = m\vec{\gamma}$ Z tego wzoru wynika, że siła grawitacji w danym polu jest wprost proporcjonalna do masy ciała m, na które działa.	Wzór na siłę elektrostatyczną, który stosuje się w dowolnym polu elektrostatycznym: $\vec{F}_{el} = q\vec{E}$ Z tego wzoru wynika, że wartość siły elektrostatycznej w danym polu jest wprost proporcjonalna do ładunku q, na który działa. Uwaga: Do tego wzoru wstawiamy q wraz ze znakiem. Jeśli $q < 0$, to zwroty wektorów siły i natężenia są przeciwne.

	Pole grawitacyjne	Pole elektrostatyczne
4.	Wartość natężenia centralnego pola grawitacyjnego w punkcie odległym o r od źródła: $\gamma = \frac{GM}{r^2}$ Gdy źródłem pola jest jednorodna kula o masie M, wzór nie stosuje się wewnątrz kuli.	Wartość natężenia centralnego pola elektrostatycznego w punkcie odległym o r od źródła: $E = \frac{k\lvert Q\rvert}{r^2}$ Gdy źródłem pola jest kula o symetrycznie (powierzchniowo lub objętościowo) rozmieszczonym ładunku Q, wzór nie stosuje się wewnątrz kuli.

Zauważ, że:

> Naładowana równomiernie kula (powierzchniowo lub objętościowo[30]) wytwarza na zewnątrz i na powierzchni takie pole elektrostatyczne, jakby cały jej ładunek Q był punktowy i umieszczony w środku kuli.

Z tego faktu często korzystamy w zadaniach.

Odpowiednikiem siły grawitacji jest elektrostatyczna siła przyciągania, więc analogiczny do iloczynu mas jest iloczyn ładunków różnoimiennych ($Q < 0$ i $q > 0$ lub $Q > 0$ i $q < 0$): $-Qq > 0$. Dzięki analogii pól możemy zapisać bez wyprowadzania:

- definicję zmiany elektrostatycznej energii potencjalnej ładunku q przy jego przemieszczaniu między dwoma punktami pola (A i B):
$$\Delta E_{\mathrm{p},\ \mathrm{A}\to\mathrm{B}} = W_{\text{siły zewn, A}\to\mathrm{B}}$$
- wzór na pracę siły zewnętrznej przy przemieszczaniu ładunku q w polu centralnym (z A do B):
$$W_{\text{siły zewn, A}\to\mathrm{B}} = -kQq\left(\frac{1}{r_\mathrm{A}} - \frac{1}{r_\mathrm{B}}\right)$$
- wzór na elektrostatyczną energię potencjalną ładunku q w polu centralnym:
$$E_\mathrm{p} = \frac{kQq}{r}$$

Powyższe wzory i odpowiadające im wzory opisujące pole grawitacyjne zebrano w tabeli 47.2 na s. 290.

Z definicji zmiany energii potencjalnej (pozycja 1 i 2 w tabeli 47.2) wynika, że:

- podczas oddalania ciał oddziałujących siłami przyciągania (grawitacji lub elektrostatycznymi) energia potencjalna wzrasta, a podczas zbliżania – maleje;
- podczas oddalania ciał oddziałujących siłami odpychania (elektrostatycznymi) energia potencjalna maleje, a podczas zbliżania – wzrasta.

Fakt ten nie zależy od umowy dotyczącej położenia ciała, w którym jego energia potencjalna jest równa zeru.

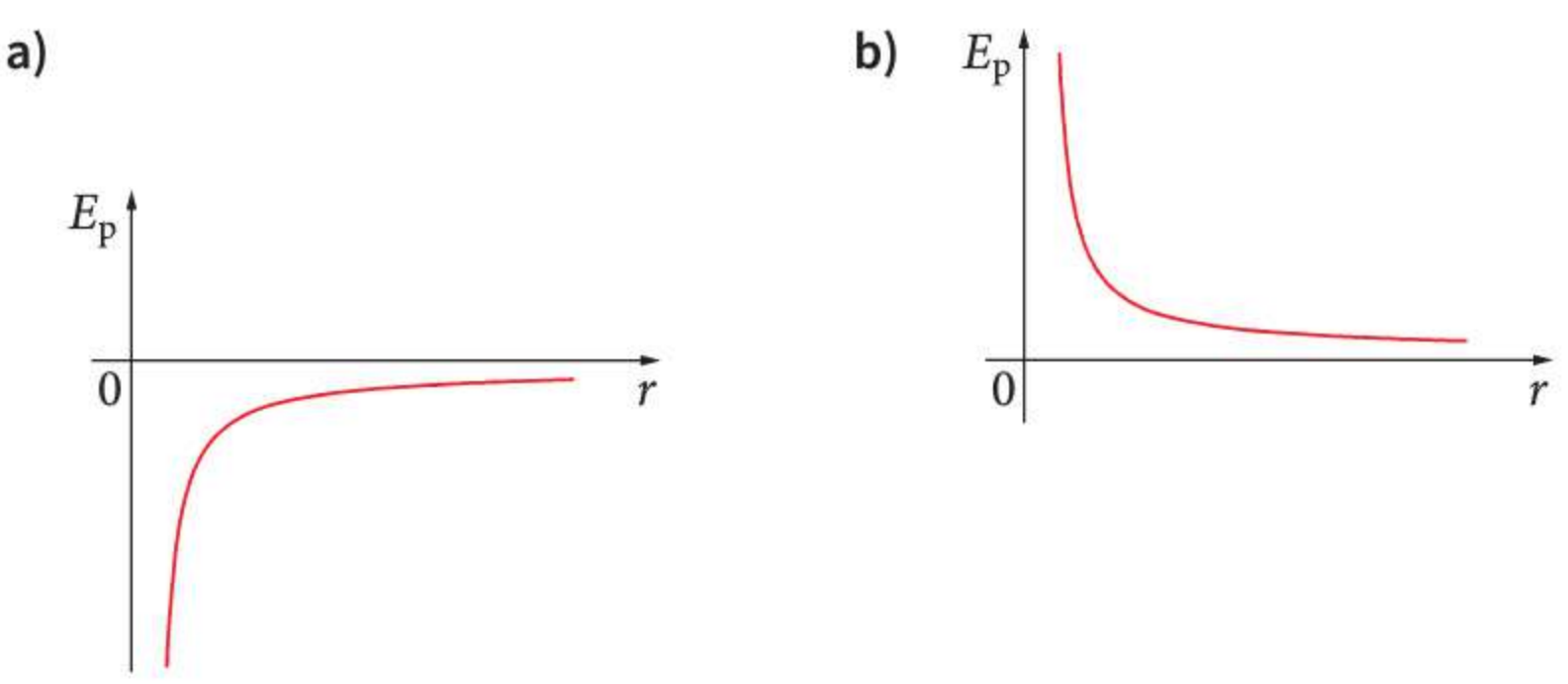
[30] Tak można naelektryzować izolator.

Tabela 47.2

	Pole grawitacyjne	Pole elektrostatyczne
1.	Definicja zmiany grawitacyjnej energii potencjalnej ciała o masie m przy jego przemieszczaniu między dwoma punktami pola (A i B): $\Delta E_{p,\,A\to B} = W_{\text{siły zewn},\,A\to B}$ $(\text{lub } \Delta E_{p,\,A\to B} = -W_{\text{siły pola},\,A\to B})$	Definicja zmiany elektrostatycznej energii potencjalnej ładunku q przy jego przemieszczaniu między dwoma punktami pola (A i B): $\Delta E_{p,\,A\to B} = W_{\text{siły zewn},\,A\to B}$ $(\text{lub } \Delta E_{p,\,A\to B} = -W_{\text{siły pola},\,A\to B})$
	Uwaga: Przez siłę zewnętrzną rozumiemy tutaj siłę, która w każdym punkcie równoważy siłę pola.	
2.	Wzór na pracę siły zewnętrznej przy przemieszczaniu ciała o masie m w polu centralnym (z A do B): $W_{\text{siły zewn},\,A\to B} = GMm\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$	Wzór na pracę siły zewnętrznej przy przemieszczaniu ładunku q w polu centralnym (z A do B): $W_{\text{siły zewn},\,A\to B} = -kQq\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$ Uwaga: Ładunki Q i q podstawiamy do wzoru wraz ze znakami.
3.	Grawitacyjna energia potencjalna ciała o masie m w polu centralnym: $E_p = -\frac{GMm}{r}$ Wzór jest słuszny pod warunkiem, że energia potencjalna ciała jest równa zeru w nieskończoności.	Elektrostatyczna energia potencjalna ładunku q w polu centralnym: $E_p = \frac{kQq}{r}$ Uwaga: Ładunki Q i q podstawiamy do wzoru wraz ze znakami. Wzór jest słuszny pod warunkiem, że energia potencjalna ładunku q jest równa zeru w nieskończoności.

Wykresy zależności energii potencjalnej ładunku punktowego umieszczonego w centralnym polu elektrostatycznym od odległości r od źródła tego pola przedstawiono na rysunku 47.1 dla dwóch przypadków:

- punktowy ładunek Q źródła pola i ładunek q umieszczony w polu są **różnoimienne** (rys. 47.1a);
- punktowy ładunek Q źródła pola i ładunek q umieszczony w polu są **jednoimienne** (rys. 47.1b).



Rys. 47.1 Wykresy $E_p(r)$ dla pola ładunku punktowego, gdy: $Qq < 0$ (a), $Qq > 0$ (b)

Podobnie jak w polu grawitacyjnym, energia potencjalna nie jest wielkością charakteryzującą pole elektrostatyczne w danym punkcie, ponieważ zależy od umieszczonego w tym punkcie ładunku. Jeśli jednak podzielimy energię potencjalną przez ładunek $q > 0$, to otrzymamy wielkość, która będzie charakteryzowała pole elektrostatyczne. Tak zdefiniowana **skalarna** wielkość fizyczna to **potencjał V**.

Potencjałem pola w danym punkcie nazywamy iloraz energii potencjalnej punktowego ciała naelektryzowanego dodatnim ładunkiem próbnym q, umieszczonego w tym punkcie, i wartości tego ładunku.

$$V = \frac{E_p}{q} \tag{47.1}$$

Potencjał informuje nas, jaką energię potencjalną w danym punkcie ma ładunek jednostkowy.

Jednostką potencjału w SI jest **wolt** (1 V). Potencjał pola w danym punkcie wynosi 1 V, jeśli ładunek 1 C umieszczony w tym punkcie ma energię potencjalną równą 1 J.

$$1\ \mathrm{V} = 1\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}} = 1\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{A}\cdot\mathrm{s}} = 1\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{A}\cdot\mathrm{s}^3}$$

Od czego zależy potencjał centralnego pola elektrostatycznego w danym punkcie?

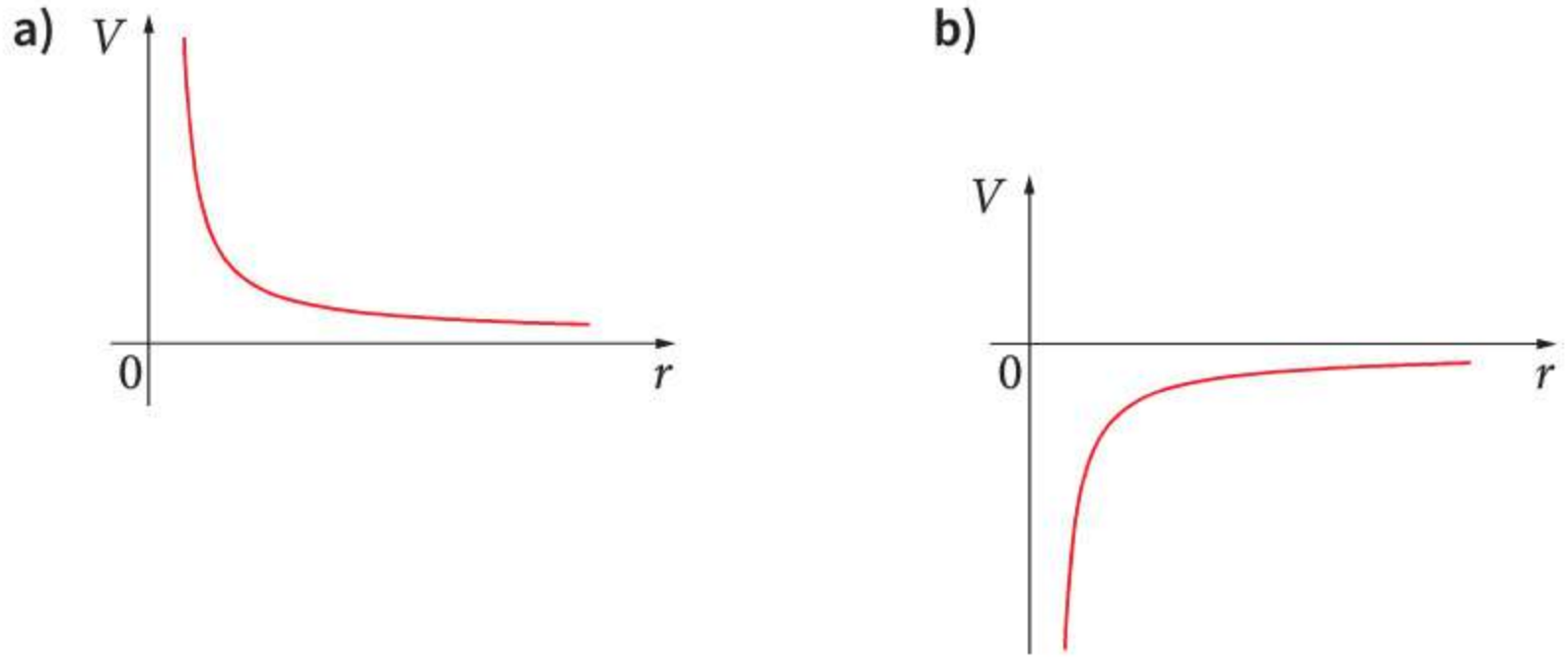
Po podstawieniu do wzoru (47.1) wyrażenia na energię potencjalną ładunku próbnego q, umieszczonego w polu ładunku punktowego Q, otrzymujemy:

$$V = \frac{k\frac{Qq}{r}}{q}$$

$$V = k\frac{Q}{r} \tag{47.2}$$

Z powyższego wzoru wynika, że:

- jeśli ładunek wytwarzający pole jest dodatni, potencjał dowolnego punktu pola jest także dodatni i maleje w miarę wzrostu odległości od źródła (rys. 47.2a);
- jeśli ładunek wytwarzający pole jest ujemny, potencjał dowolnego punktu pola jest także ujemny i rośnie przy wzroście odległości od źródła (rys. 47.2b).



Rys. 47.2 Wykresy $V(r)$ dla pola centralnego, gdy: $Q > 0$ (a), $Q < 0$ (b)

Tabela 47.3

	Pole grawitacyjne	Pole elektrostatyczne
1.	*Potencjał centralnego pola grawitacyjnego: $V = -\frac{GM}{r}$	Potencjał centralnego pola elektrostatycznego: $V = \frac{kQ}{r}$ Uwaga: Ładunek Q podstawiamy do wzoru wraz ze znakiem.
2.	*Wzór na pracę siły zewnętrznej przy przemieszczaniu ciała o masie m między dwoma punktami (z A do B) dowolnego pola grawitacyjnego: $W_{\text{siły zewn, A}\to\text{B}} = m(V_\text{B} - V_\text{A})$	Wzór na pracę siły zewnętrznej przy przemieszczaniu ładunku q między dwoma punktami (z A do B) dowolnego pola elektrostatycznego: $W_{\text{siły zewn, A}\to\text{B}} = q(V_\text{B} - V_\text{A})$ Uwaga: Do wzoru podstawiamy ładunek q wraz ze znakiem.

Przykład 47.1

Potencjał pola wytworzonego przez przewodnik kulisty

Przewodnik kulisty naelektryzowany ładunkiem Q jest źródłem centralnego pola elektrostatycznego, które na powierzchni kuli i poza nią jest takie samo jak pole wytworzone przez ładunek punktowy Q umieszczony w środku kuli. Wobec tego dla $r \geqslant R$ wartość natężenia i potencjał tego pola obliczamy ze wzorów:

$$E = \frac{k|Q|}{r^2} \qquad V = k\frac{Q}{r}$$

Wewnątrz ($r < R$) naelektryzowanego przewodnika $E = 0$, więc na ładunek q umieszczony we wnętrzu kuli nie działa siła elektrostatyczna ($F = qE = 0$). Wobec tego przesunięcie ładunku q między dwoma dowolnymi punktami (rys. 47.3) nie wymaga wykonania pracy.

Z faktu, że:

$$W_{\text{siły zewn, A}\to\text{B}} = q(V_\text{B} - V_\text{A}) = 0$$

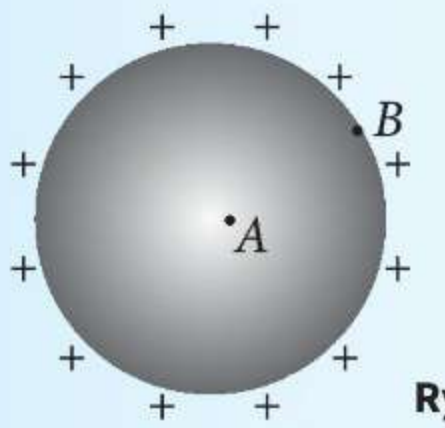
wynika, że:

$$V_\text{B} - V_\text{A} = 0 \qquad \text{czyli} \qquad V_\text{B} = V_\text{A}$$

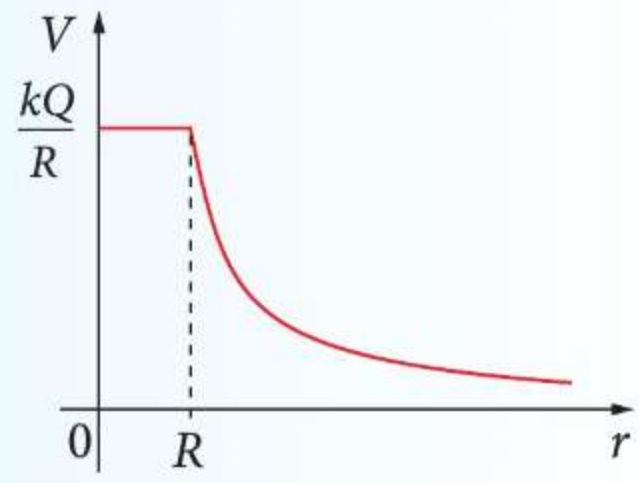
Wewnątrz naelektryzowanego przewodnika kulistego potencjał jest stały i równy potencjałowi na powierzchni kuli:

$$\boldsymbol{V = \frac{kQ}{R}}$$

Wykres zależności $V(r)$ dla $Q > 0$ przedstawiono poniżej (rys. 47.4).



Rys. 47.3



Rys. 47.4

Dla potencjałów, tak jak dla natężeń pól, stosuje się **zasadę superpozycji**. Potencjał jest skalarną wielkością fizyczną, więc suma potencjałów jest sumą algebraiczną.

ZADANIA

1. W odległości $r = 10\ \text{cm}$ od kulki A naelektryzowanej ładunkiem $q_A = 2\ \mu\text{C}$ znajduje się kulka B naelektryzowana ładunkiem $q_B = -3\ \mu\text{C}$. Oblicz pracę, którą należy wykonać, aby rozsunąć kulki na odległość $d = 100\ \text{cm}$.

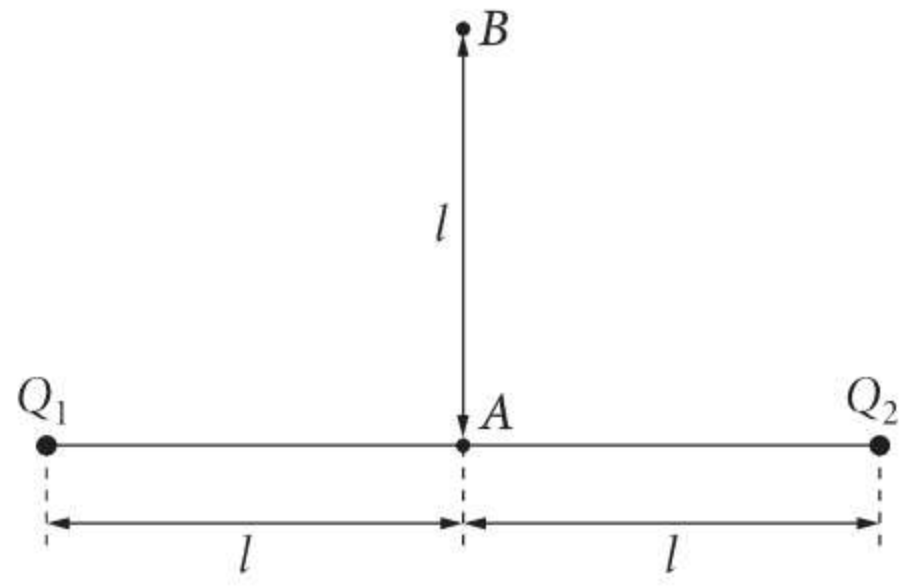
2. Dwie równoległe płytki, naelektryzowane różnoimiennie ładunkami o takiej samej wartości bezwzględnej, wytwarzają pole elektrostatyczne. Czy do obliczenia pracy siły zewnętrznej przy przesunięciu ładunku q z punktu A do B w tym polu można posłużyć się poniższym wzorem?

$$W_{z,\,A\to B} = -kQq\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

Uzasadnij odpowiedź.

3. Wyjaśnij, jaki warunek musi być spełniony, aby ładunki nie przemieszczały się z jednego przewodnika na drugi po zetknięciu naelektryzowanych przewodników.

4. Oblicz pracę wykonaną przez siłę pola wytworzonego przez ładunki $Q_1 = -10\ \mu\text{C}$ i $Q_2 = 4\ \mu\text{C}$, odległe od siebie o $2l = 40\ \text{cm}$, podczas przemieszczenia ładunku $q = 2\ \mu\text{C}$ z punktu A do B (rys. 47.5).



Rys. 47.5

5. Kulkę A o promieniu $r_1 = 6\ \text{cm}$ naelektryzowano do potencjału $V_1 = 3000\ \text{V}$, a kulkę B o promieniu $r_2 = 4\ \text{cm}$ – do potencjału $V_2 = 5000\ \text{V}$. Oblicz potencjał kulek po połączeniu ich długim, cienkim drutem.

6. Kulkę o promieniu $r_1 = 2\ \text{cm}$ naelektryzowano do potencjału $V_1 = 300\ \text{V}$ i połączono cienkim, długim drutem z drugą, nienaelektryzowaną kulką, wskutek czego potencjał kulki zmniejszył się do $V_2 = 120\ \text{V}$. Oblicz promień r_2 drugiej kulki.



48. Pojemność elektryczna ciała przewodzącego

- Co wskazuje elektroskop?
- Zależność pojemności przewodnika od zmiany położenia uziemionych przewodników
- Definicja pojemności elektrycznej przewodnika
- Pojemność elektryczna przewodnika kulistego

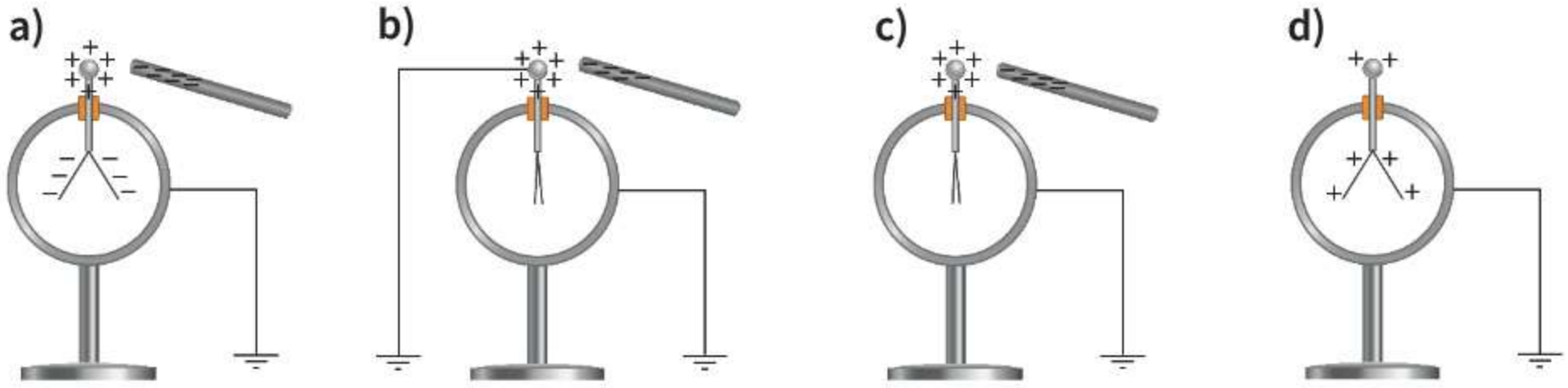
Przypomnij sobie budowę elektroskopu i wzór na potencjał naelektryzowanej kuli.

W kilku doświadczeniach, które zaproponujemy w następnych rozdziałach, będziemy korzystać z elektroskopu. Wobec tego musimy sprawdzić, co wskazuje elektroskop.

Doświadczenie 48.1 (część 1)

Co wskazuje elektroskop?

a) Gdy do kulki nienaelektryzowanego elektroskopu ($q_{\text{całk}} = 0$) zbliżymy pałeczkę ebonitową naładowaną ujemnie (rys. 48.1a), zauważymy, że listki elektroskopu rozchylają się.



Rys. 48.1

b) Jeśli – bez zmiany położenia pałeczki – dotkniemy palcem kulki elektroskopu (i uziemimy ją w ten sposób), zauważymy opadnięcie listków elektroskopu (rys. 48.1b). Dotknięcie kulki elektroskopu powoduje odpłynięcie nadmiaru elektronów z listków przez nasze ciało do ziemi. Kulka ma nadal związany ładunek dodatni, ponieważ znajdująca się w pobliżu pałeczka odpycha wszystkie elektrony, które mogłyby skompensować ładunek kulki. Całkowity ładunek elektroskopu jest zatem różny od zera: $q_{\text{całk}} \neq 0$. Mimo nadmiaru ładunku dodatniego na elektroskopie listki nie są rozchylone.

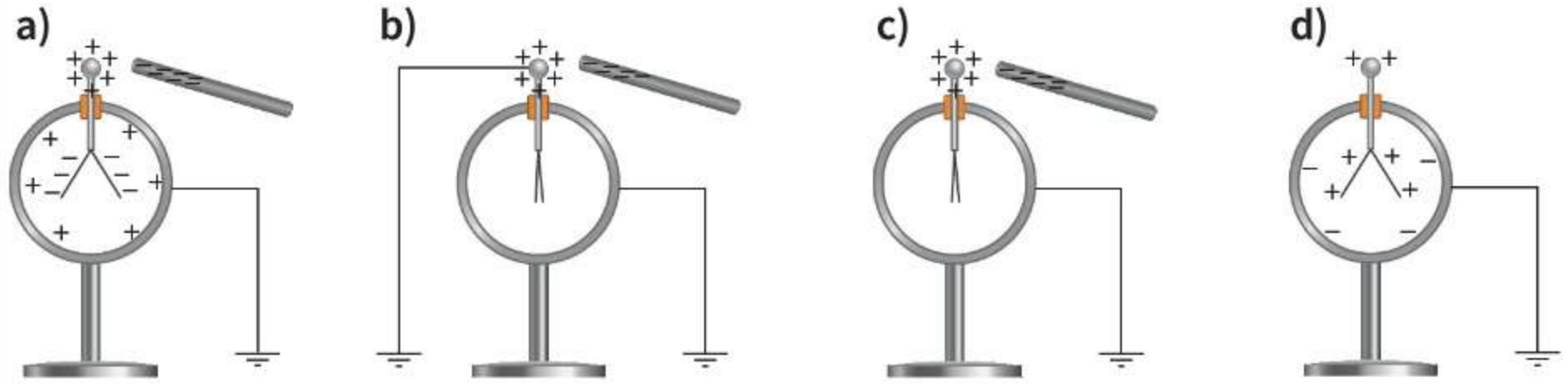
c) Taki stan utrzymuje się po odsunięciu palca, czyli odłączeniu uziemienia kulki (rys. 48.1c).

d) Jeśli teraz oddalimy pałeczkę od kulki elektroskopu, zaobserwujemy rozchylenie listków (rys. 48.1d). Część ładunków ujemnych z listków odpływa do kulki.

Zwróćmy uwagę, że w przypadku c, mimo iż całkowity ładunek elektroskopu $q_{\text{całk}} \neq 0$, listki nie rozchyliły się. Przy takim samym stanie ładunku w przypadku d obserwujemy wychylenie.

Przeprowadzone doświadczenie przekonuje nas, że **elektroskop nie stanowi przyrządu informującego o ilości dostarczonego mu ładunku**. Co więc pokazuje elektroskop?

Rozważmy w każdym z przypadków różnicę potencjałów między listkami a obudową elektroskopu.



Rys. 48.2

a) Pole elektryczne wytworzone przez ujemny ładunek listków działa na ładunki znajdujące się w osłonie elektroskopu. Elektrony swobodne odpływają do ziemi i osłona ładuje się dodatnio (rys. 48.2a). Między listkami a osłoną powstaje różnica potencjałów.

b) Uziemienie powoduje odpływ elektronów z listków i zrównanie się ich potencjału z potencjałem osłony, która też jest uziemiona (rys. 48.2b).

c) Utrzymuje się poprzedni stan (rys. 48.2c).

d) Po oddaleniu pałeczki na listkach powstaje niedomiar elektronów. Powoduje to ich napływ z ziemi na osłonę, która przez indukcję ładuje się ujemnie (rys. 48.2d). Między listkami a osłoną wytwarza się różnica potencjałów.

Z doświadczenia 48.1 wynika, że:

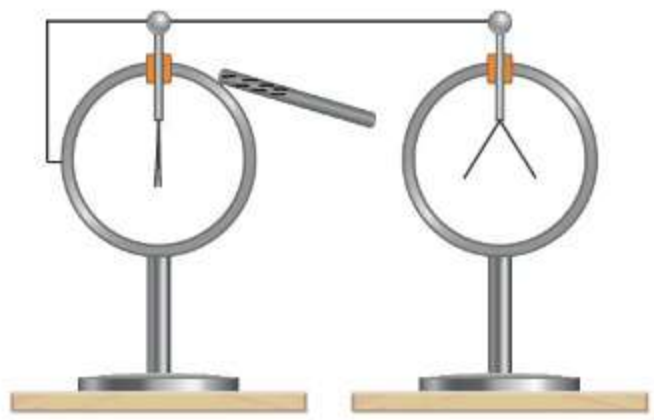
Elektroskop to przyrząd wskazujący różnicę potencjałów między listkami a obudową.

Jeśli nasz wniosek jest słuszny, to powinno być obojętne, czy elektryzujemy kulkę elektroskopu czy też jego obudowę. Aby się o tym przekonać, wykonajmy drugą część doświadczenia.

Doświadczenie 48.1 (część 2)

Co wskazuje elektroskop?

Łączymy przewodem kulkę elektroskopu z jego obudową (rys. 48.3).



Rys. 48.3

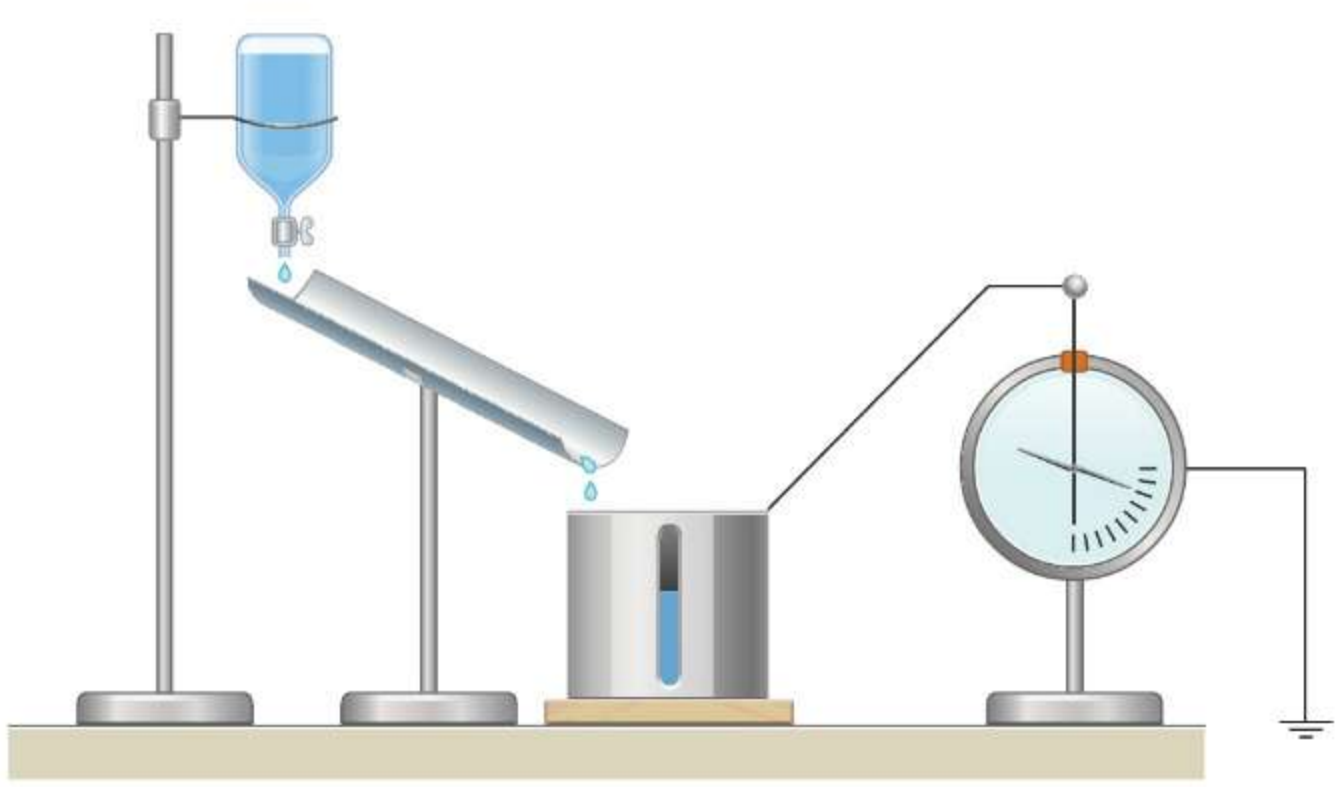
Naelektryzowaną pałeczką ebonitową dotykamy kulki lub obudowy. Kulka i obudowa elektryzują się ujemnie. Listki elektroskopu nie rozchylają się. Jeśli połączymy ten elektroskop z drugim, nienaelektryzowanym elektroskopem, możemy sprawdzić, że ten pierwszy jest naelektryzowany, bo listki drugiego elektroskopu się rozchylają.
Wniosek: Potencjał układu, który tworzą kulka–listki–obudowa pierwszego elektroskopu, jest różny od zera, ale nie ma różnicy potencjałów między listkami a obudową.

Teraz możemy już wprowadzić ważną wielkość fizyczną zwaną pojemnością elektryczną przewodnika. Wykonajmy doświadczenie.

Doświadczenie 48.2

Badanie zależności potencjału przewodnika od dostarczonego mu ładunku

Na statywie mocujemy butelkę, z której woda kapie pojedynczymi kroplami na nachyloną rynienkę pokrytą stearyną (rys. 48.4).



Rys. 48.4

Naelektryzowane przez tarcie o rynienkę krople wpadają do metalowego naczynia połączonego z elektrometrem. Naczynie (np. wewnętrzne naczynie kalorymetru) stoi na izolującej podstawce i wraz z kulką, prętem i listkami elektrometru (elektroskopu z podziałką) stanowi przewodnik, któremu porcjami dostarczamy ładunek. Porcją jest ładunek pojedynczej kropli. Obserwujemy stopniowe wychylanie się wskazówki elektrometru.

Wobec tego potencjał przewodnika rośnie w miarę wzrostu zgromadzonego na nim ładunku. Jeśli dysponujemy dokładnym elektrometrem, to możemy stwierdzić, że potencjał przewodnika V jest wprost proporcjonalny do dostarczonego mu ładunku Q.

$$V \sim Q$$

A zatem:

Iloraz $\frac{Q}{V}$ jest dla danego ciała przewodzącego wielkością stałą.

Jeśli przeprowadzimy to samo doświadczenie z innym naczyniem (np. zewnętrznym naczyniem kalorymetru), okaże się, że wzrost wychylenia wskazówki będzie wolniejszy niż poprzednio, tzn. ta sama liczba kropli powoduje inne wychylenie wskazówki elektrometru, ale również i w tym przypadku $V \sim Q$. Iloraz $\frac{Q}{V}$ oznaczamy literą C i nazywamy **pojemnością elektryczną** przewodnika.

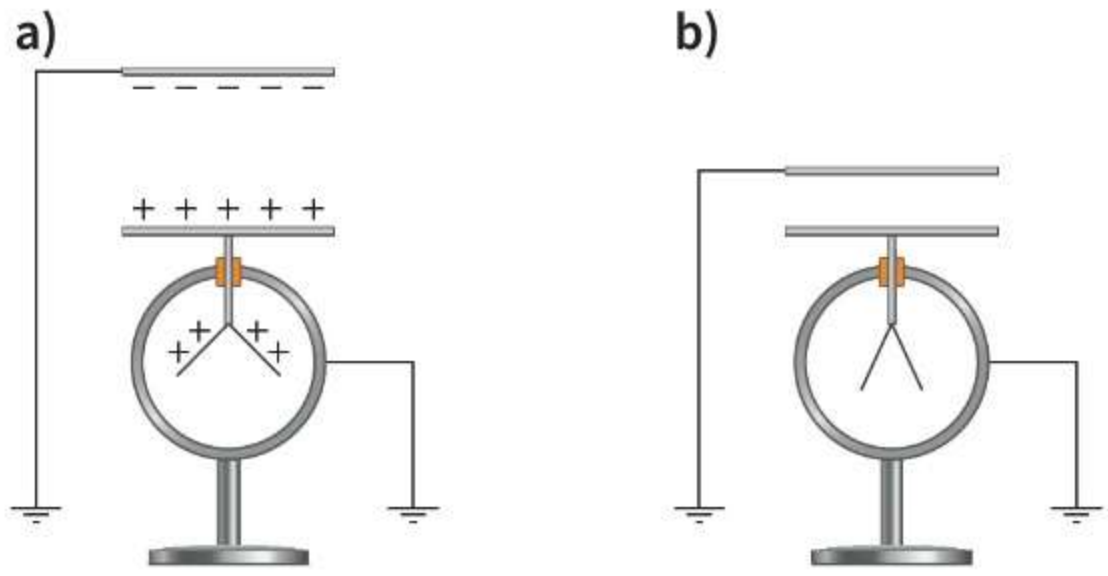
$$C = \frac{Q}{V} \qquad (48.1)$$

Pojemność elektryczna informuje nas, jaki ładunek należy wprowadzić na przewodnik, aby jego potencjał był równy 1 V.
Zanim sformułujemy pełną definicję pojemności, wykonajmy jeszcze jedno doświadczenie.

Doświadczenie 48.3

Wpływ zmiany położenia uziemionych przewodników na pojemność elektryczną przewodnika

Kulkę elektroskopu zastępujemy płaską metalową płytką i elektryzujemy ją dodatnio. Na statywie mocujemy drugą podobną uziemioną płytkę i zbliżamy ją od góry do elektroskopu (rys. 48.5).



Rys. 48.5

Obserwujemy zmniejszanie się rozchylenia listków elektroskopu, co oznacza, że potencjał elektroskopu maleje. Ładunek układu elektroskop–płytka nie uległ zmianie, więc **pojemność $C = \frac{Q}{V}$ wzrosła w wyniku zmiany położenia innego przewodnika, znajdującego się w pobliżu badanego ciała**.

Definicję pojemności formułujemy następująco:

> Pojemnością elektryczną ciała przewodzącego nazywamy stały dla tego ciała iloraz wprowadzonego na nie ładunku i uzyskanego przez nie potencjału elektrycznego. Stosunek ten jest dla każdego ciała stały pod warunkiem, że w pobliżu nie zmienia się ułożenie innych przewodników.

Jednostką pojemności w SI jest **farad** (1 F).

$$1\ \mathrm{F} = \frac{1\ \mathrm{C}}{1\ \mathrm{V}} = 1\,\frac{\mathrm{A}\cdot\mathrm{s}}{\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{A}\cdot\mathrm{s}}} = 1\,\frac{\mathrm{A}^2\cdot\mathrm{s}^2}{\mathrm{kg}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}} = 1\,\frac{\mathrm{A}^2\cdot\mathrm{s}^4}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2}$$

1 farad jest bardzo dużą jednostką; często używa się więc jednostek mniejszych, takich jak milifarad ($1\ \mathrm{mF} = 10^{-3}\ \mathrm{F}$), mikrofarad ($1\ \mu\mathrm{F} = 10^{-6}\ \mathrm{F}$), nanofarad ($1\ \mathrm{nF} = 10^{-9}\ \mathrm{F}$), pikofarad ($1\ \mathrm{pF} = 10^{-12}\ \mathrm{F}$).
W wielu doświadczeniach, np. z elektroskopem, stosuje się uziemienie, tzn. łączy się jakiś przewodnik z ziemią. Elektrony z ziemi napływają na przewodnik lub spływają z przewodnika do ziemi. Mimo to potencjał Ziemi uważamy za zerowy. Teraz rozumiesz, że

Ziemię traktuje się jako ciało o tak wielkiej pojemności, że dostarczenie jej lub odebranie takiego ładunku, jak w naszych doświadczeniach, nie zmienia jej potencjału. Pojemność różnych ciał przewodzących zależy od ich kształtu i wielkości.

Przykład 48.1

Pojemność elektryczna kuli

Wyprowadzimy wzór na pojemność przewodzącej kuli o promieniu R.

Po naelektryzowaniu kuli ładunkiem Q jej potencjał:

$$V = \frac{k_0 Q}{R}$$

Po podstawieniu do wzoru (48.1) definiującego pojemność otrzymamy:

$$C = \frac{Q}{\frac{k_0 Q}{R}} = \frac{R}{k_0} = 4\pi\varepsilon_0 R$$

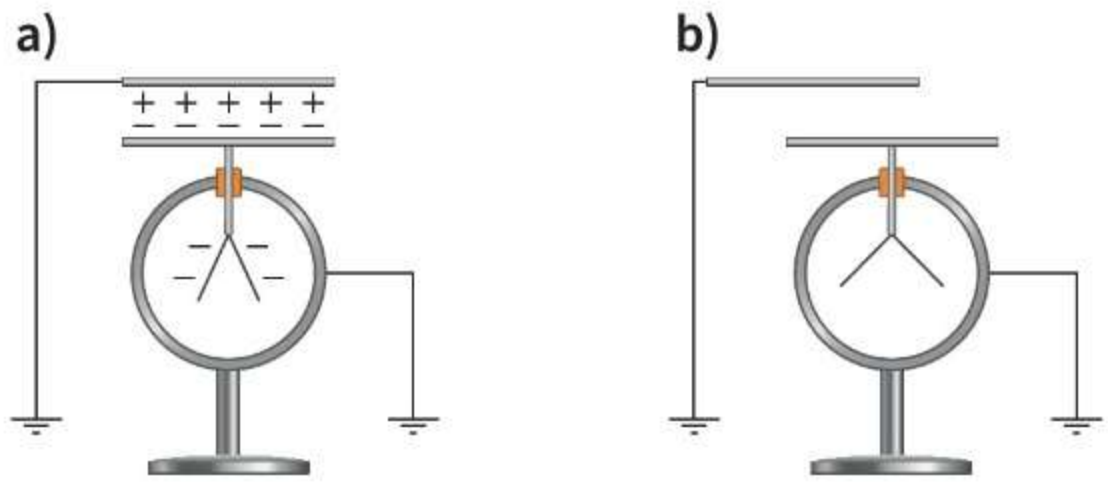
Pojemność elektryczna kuli jest wprost proporcjonalna do jej promienia. Na przykład pojemność kuli ziemskiej ($R = 6{,}37 \cdot 10^6$ m):

$$C_Z = 4\pi \cdot 8{,}9 \cdot 10^{-12} \frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}^2} \cdot 6{,}37 \cdot 10^6 \text{ m} \approx 712 \text{ μF}$$

co stanowi bardzo mały ułamek farada.

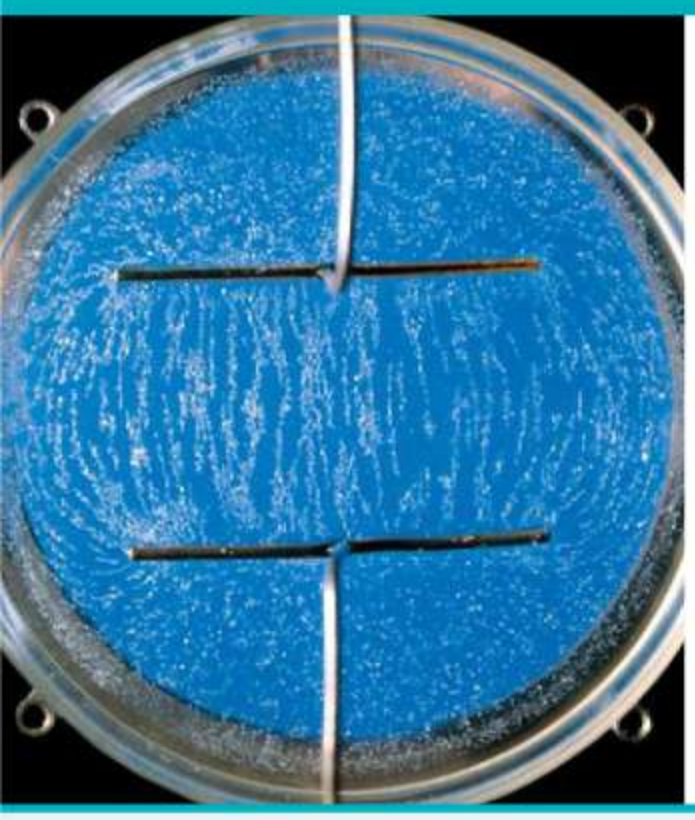
ZADANIA

1. Wyjaśnij, dlaczego po przesunięciu górnej płytki (rys. 48.6) listki elektroskopu bardziej się rozchyliły.



Rys. 48.6

Czy wynik doświadczenia byłby taki sam, gdyby elektroskop był naelektryzowany ładunkiem przeciwnego znaku? Uzasadnij odpowiedź.



49. Kondensator

- Definicja pojemności kondensatora
- Pojemność kondensatora płaskiego
- Związek natężenia pola z napięciem między okładkami kondensatora płaskiego
- Łączenie kondensatorów

Przypomnij sobie doświadczenie 48.3 z poprzedniego rozdziału i wynikające z niego wnioski.

Z doświadczenia 48.3, omówionego w poprzednim rozdziale, wynika, że zmiana położenia uziemionej płytki względem płytki połączonej z elektroskopem powoduje zmianę potencjału tej drugiej płytki względem uziemionej obudowy. Układ przewodników, w którym obecność jednego wpływa na pojemność drugiego, nazywamy **kondensatorem**, a tworzące go przewodniki – okładkami kondensatora.

Napięcie U między okładkami kondensatora, tzn. wartość bezwzględna różnicy potencjałów, jest wprost proporcjonalne do dodatniego ładunku zgromadzonego na jednej okładce kondensatora:

$$U \sim Q$$

Podobnie do pojemności przewodnika można zdefiniować pojemność kondensatora.

Pojemnością kondensatora nazywamy iloraz dodatniego ładunku zgromadzonego na jednej jego okładce i napięcia między okładkami.

$$C = \frac{Q}{U} \tag{49.1}$$

Uwaga: Do definicji pojemności kondensatora wstawiamy zawsze ładunek okładki naładowanej dodatnio. Na drugiej, uziemionej okładce gromadzi się (przez indukcję) ładunek o takiej samej wartości bezwzględnej, lecz o przeciwnym znaku.

Pojemność elektryczna informuje nas, jaki ładunek należy wprowadzić na jedną z okładek kondensatora, aby napięcie między okładkami wyniosło 1 V.

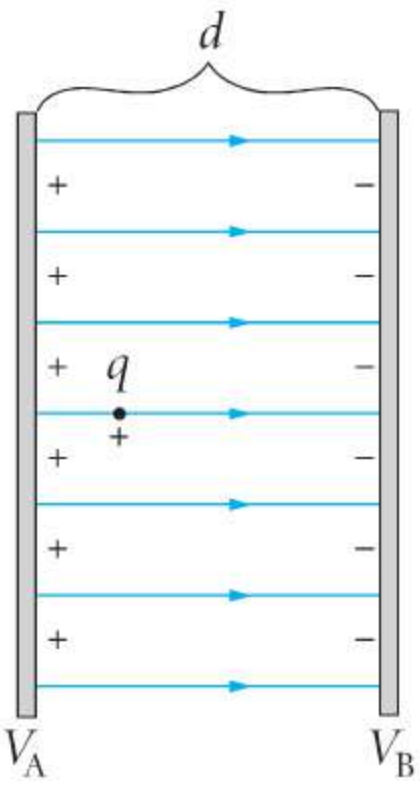
Jednostką pojemności kondensatora, podobnie jak pojedynczego przewodnika, jest farad.

Kondensator składający się z dwóch metalowych, równoległych płyt o powierzchni S każda, odległych o d, nazywa się **kondensatorem płaskim**. Pojemność kondensatora

płaskiego próżniowego (tzn. takiego, w którym między okładkami jest próżnia lub powietrze) wyraża się wzorem:

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

Jeśli okładki są przesunięte względem siebie, do wzoru wstawiamy powierzchnię tej części okładki, nad którą znajduje się druga okładka (rys. 48.6b).



Rys. 49.1 Pole elektrostatyczne w kondensatorze płaskim

Napięcie U między okładkami kondensatora płaskiego jest związane z wartością E natężenia pola elektrostatycznego między nimi. Aby wyprowadzić związek między E i U, zapiszemy dwoma sposobami pracę siły pola elektrostatycznego wykonaną nad ładunkiem q przy przemieszczaniu go między okładkami (rys. 49.1).

$$W_{\text{siły pola}} = F \cdot d = Eqd$$

$$W_{\text{siły pola}} = q(V_A - V_B) = qU \qquad (49.2)$$

Porównujemy prawe strony powyższych wzorów i otrzymujemy:

$$Eqd = qU$$

skąd:

$$E = \frac{U}{d}$$

Wartość natężenia pola jest zawsze dodatnia (jako wartość wektora), więc:

$$U = V_A - V_B > 0 \quad \Rightarrow \quad V_A > V_B$$

Wobec tego wektor natężenia pola jest zwrócony w stronę malejącego potencjału.

Uwaga: Możemy skorzystać ze wzoru (49.2) i zdefiniować jednostkę energii: **elektronowolt**, która stosowana jest w fizyce jądrowej, fizyce cząstek elementarnych czy fizyce ciała stałego.

Jeden elektronowolt (1 eV) to **energia kinetyczna**, jaką uzyska (początkowo spoczywająca) cząstka o ładunku elementarnym e przyspieszona między dwoma punktami pola elektrycznego, których potencjały różnią się o 1 V.

$$1\ \text{eV} = 1e \cdot 1\ \text{V} \approx 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 1\ \text{V} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

W praktyce często stosowane są jednostki większe: $1\ \text{keV} = 10^3\ \text{eV}$, $1\ \text{MeV} = 10^6\ \text{eV}$, $1\ \text{GeV} = 10^9\ \text{eV}$.

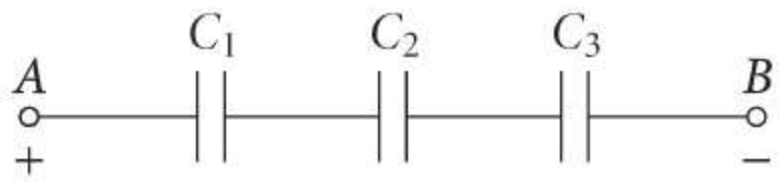
WIEDZIEĆ WIĘCEJ

Łączenie kondensatorów

W różnych urządzeniach elektronicznych zamiast pojedynczych kondensatorów stosuje się układy kondensatorów połączonych ze sobą. Kondensatory możemy łączyć szeregowo lub równolegle.

a) Łączenie szeregowe kondensatorów

Jeśli trzy kondensatory o różnych pojemnościach C_1, C_2, C_3 połączymy tak, jak pokazano na rysunku 49.2, i między punktami A i B przyłożymy napięcie U, to lewa okładka pierwszego kondensatora naładowana dodatnio wytwarza pole elektrostatyczne oddziałujące na znajdujące się w pobliżu ładunki.



Rys. 49.2

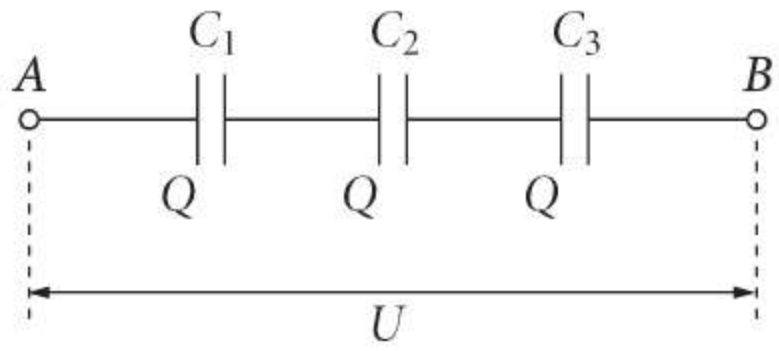
Z lewej okładki drugiego kondensatora na prawą okładkę pierwszego spływa ładunek ujemny równy co do wartości dodatniemu ładunkowi lewej okładki (elektryzowanie przez indukcję). Przepływ elektronów na tę okładkę powoduje ich niedobór na lewej okładce drugiego kondensatora. Jest więc ona naładowana ładunkiem dodatnim o takiej samej wartości. Prawa okładka drugiego kondensatora także naładuje się przez indukcję itd. Tym sposobem **ładunek zgromadzony na każdym kondensatorze będzie jednakowy**.

Różnica potencjałów U między punktami A i B rozkłada się na wszystkie kondensatory w taki sposób, że:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 \tag{49.3}$$

gdzie: $U_1 = \frac{Q}{C_1}$, $U_2 = \frac{Q}{C_2}$, $U_3 = \frac{Q}{C_3}$.

Rozważany układ kondensatorów można zastąpić jednym kondensatorem, tzn. tak dobrać jego pojemność, aby wytworzenie między okładkami takiego samego napięcia U spowodowało zgromadzenie na jego okładkach takiego ładunku Q, jaki znajdował się na każdym z kondensatorów połączonych szeregowo (rys. 49.3).



Rys. 49.3

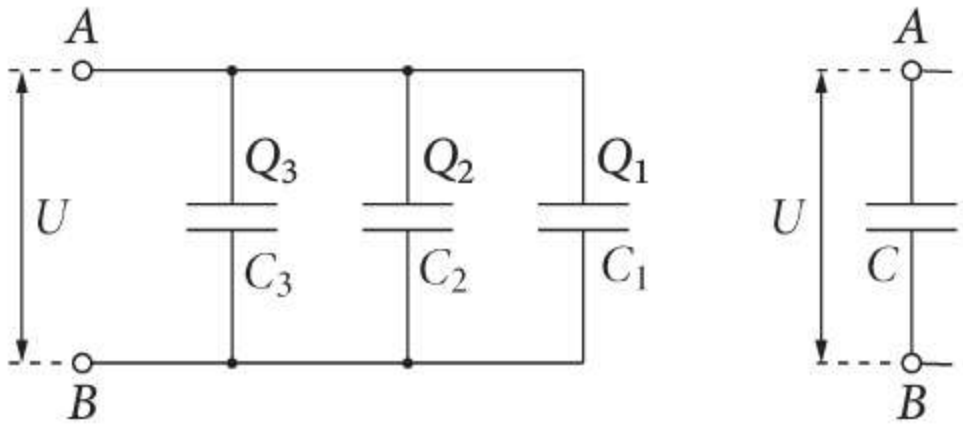
$$U = \frac{Q}{C}$$

Podstawiamy tak wyrażone napięcia do (49.3) i otrzymujemy:

$$\frac{Q}{C} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} \qquad \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

Pojemność zastępcza (wypadkowa) C jest mniejsza od najmniejszej pojemności w układzie. Rozdzielenie napięcia U na kilka kondensatorów połączonych szeregowo zapobiega przebiciu, czyli przepływowi ładunków (przez izolator) z jednej okładki danego kondensatora na drugą. Takie zjawisko byłoby oczywiście niepożądane.

b) Łączenie równoległe kondensatorów



Rys. 49.4

W tym przypadku różnica potencjałów między okładkami każdego z kondensatorów jest jednakowa i równa się U. Ładunek zgromadzony na okładkach wynosi odpowiednio:

$$Q_1 = UC_1 \qquad Q_2 = UC_2 \qquad Q_3 = UC_3$$

Taki układ kondensatorów można zastąpić jednym, tzn. tak dobrać jego pojemność, aby wytworzenie na jego okładkach takiego samego napięcia U spowodowało zgromadzenie na nim ładunku Q równego sumie ładunków na wszystkich kondensatorach układu:

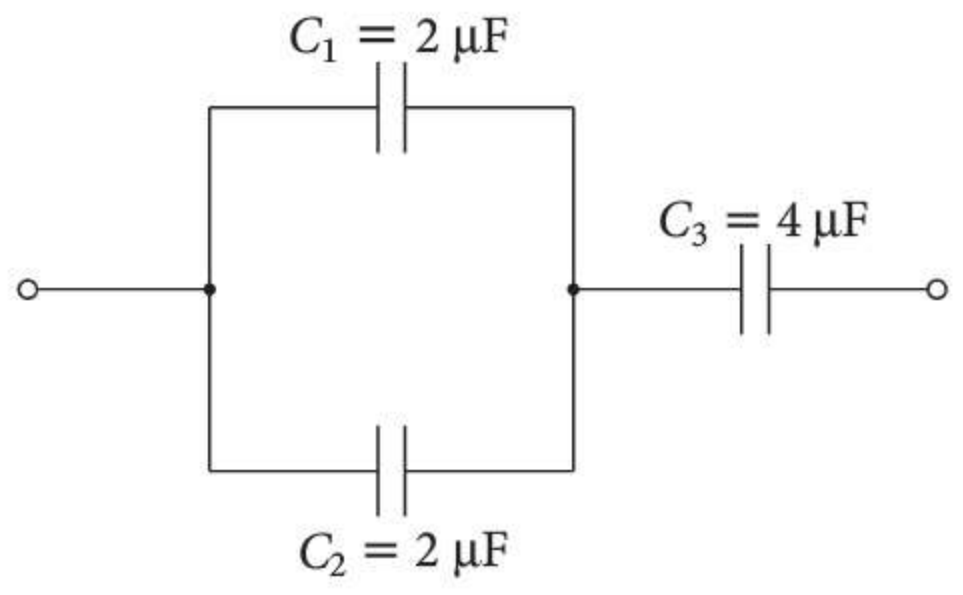
$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

$$C = C_1 + C_2 + C_3 \qquad (49.4)$$

Dzięki równoległemu połączeniu kondensatorów uzyskujemy większą pojemność.

c) Łączenie mieszane kondensatorów

Oprócz łączenia szeregowego i równoległego możliwe są także łączenia mieszane. Przykładowy układ kondensatorów przedstawiono na poniższym schemacie (rys. 49.5).

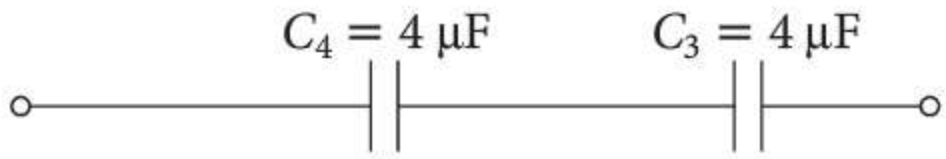


Rys. 49.5

Aby znaleźć pojemność układu kondensatorów przedstawionego na tym rysunku, obliczamy najpierw zastępczą pojemność dwóch kondensatorów połączonych równolegle:

$$C_4 = 2\,\mu\text{F} + 2\,\mu\text{F} = 4\,\mu\text{F}$$

Następnie obliczamy pojemność układu kondensatorów połączonych szeregowo (rys. 49.6).



Rys. 49.6

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{4\ \mu\mathrm{F}} + \frac{1}{4\ \mu\mathrm{F}} = \frac{2}{4\ \mu\mathrm{F}}$$

$$C = 2\ \mu\mathrm{F}$$

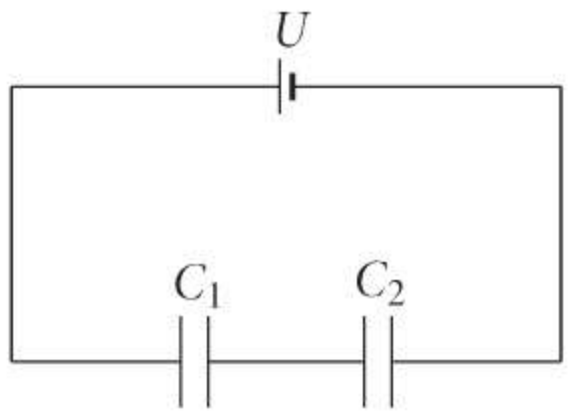
Pojemność układu kondensatorów jest równa $2\ \mu\mathrm{F}$.

ZADANIA

1. Kondensator płaski, którego płytki o powierzchni $S = 100\ \mathrm{cm}^2$ każda są oddalone o $d = 1\ \mathrm{cm}$, połączono ze źródłem napięcia $U = 200\ \mathrm{V}$. Oblicz:
a) ładunek zgromadzony na kondensatorze,
b) wartość natężenia pola między płytkami kondensatora.

Uwaga: Zanim przystąpisz do rozwiązywania zadań 2 i 3, przeczytaj *Wiedzieć więcej* o łączeniu kondensatorów.

2. Na podstawie danych z rysunku 49.7 oblicz różnicę potencjałów między okładkami drugiego kondensatora.

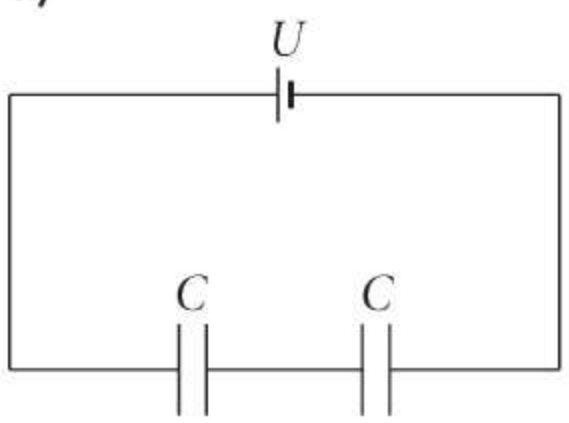


$U = 3\ \mathrm{V}$
$C_1 = 1\ \mu\mathrm{F}$
$C_2 = 2\ \mu\mathrm{F}$

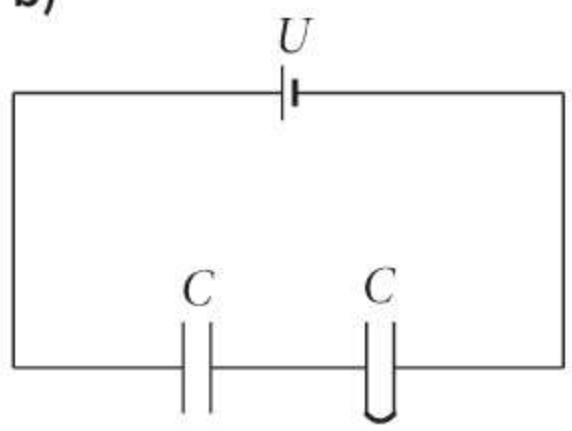
Rys. 49.7

3. Ustal, jak zmieni się ładunek jednego z kondensatorów połączonych ze źródłem napięcia (rys. 49.8a), jeśli okładki drugiego połączymy grubym drutem (rys. 49.8b).

a)



b)



Rys. 49.8



50. Dielektryk w polu elektrostatycznym

- Zjawisko polaryzacji dielektryka
- Wpływ obecności dielektryka na pojemność kondensatora
- Stała dielektryczna

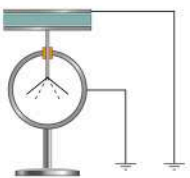
Przypomnij sobie, jak zbudowany jest atom oraz jaka jest różnica między wewnętrzną budową przewodników i izolatorów (dielektryków).

W dielektryku (czyli w izolatorze) nie ma swobodnych elektronów, więc w polu elektrostatycznym zachodzą w nim inne zjawiska niż w przewodniku.

Doświadczenie 50.1

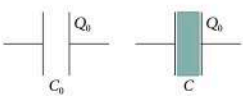
Badanie wpływu dielektryka na pojemność kondensatora

Na pręt elektroskopu nakładamy płytkę metalową, a nad nią mocujemy na statywie drugą płytkę uziemioną (rys. 50.1). Tak zbudowany kondensator ładujemy – listki się rozchylają. Między okładki wkładamy kolejno płytki z dielektryka: szklaną, ebonitową, plastikową.



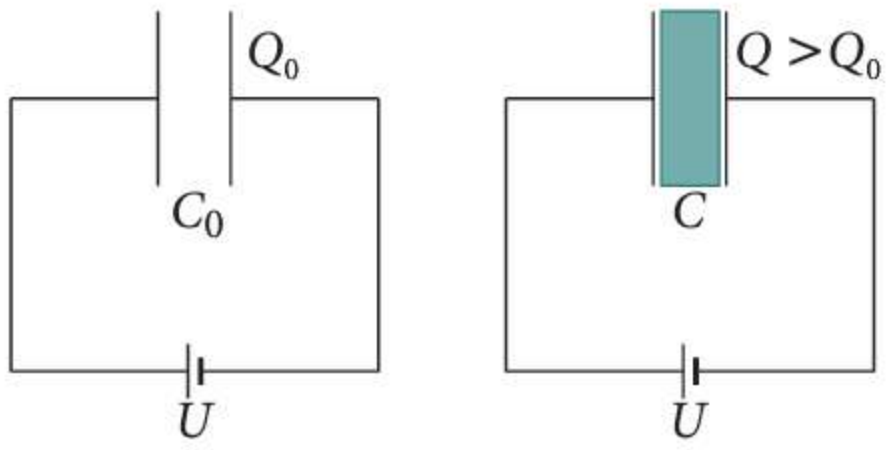
Rys. 50.1

Zmniejszenie wychylenia listków po wsunięciu dielektryka w każdym przypadku świadczy o zmniejszeniu się napięcia między okładkami kondensatora. Ładunek kondensatora nie ulega zmianie, więc pojemność kondensatora wzrasta. Napięcie między okładkami zależy od rodzaju wkładanej między nie płytki, zatem pojemność jest zależna od rodzaju dielektryka umieszczonego między okładkami kondensatora.
Kondensator w tym doświadczeniu nie był połączony ze źródłem napięcia (rys. 50.2).



Rys. 50.2 Wpływ dielektryka na pojemność kondensatora odłączonego od źródła napięcia

Jeśli do tego samego kondensatora próżniowego dołączonego do źródła napięcia U wkładalibyśmy płytki dielektryczne, a następnie mierzyli jego pojemność (rys. 50.3), okazałoby się, że pojemność tego kondensatora także wzrasta tyle samo razy, ile wzrastała przy włożeniu płytki z danego materiału do kondensatora odłączonego od źródła.



$$\left.\begin{aligned} C_0 &= \frac{Q_0}{U} \\ C &= \frac{Q}{U} \\ Q &> Q_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad C > C_0$$

Rys. 50.3 Wpływ dielektryka na pojemność kondensatora połączonego ze źródłem napięcia

Tak więc stosunek $\frac{C}{C_0}$ jest dla danego dielektryka wypełniającego kondensator wielkością stałą. Nazywamy ją **stałą dielektryczną** ε_r.

Stała ε_r zależy od rodzaju dielektryka i informuje, ile razy pojemność danego kondensatora z dielektrykiem jest większa od pojemności kondensatora próżniowego.

$$\frac{C}{C_0} = \varepsilon_r \tag{50.1}$$

Zamiast wyrażać się w sposób opisowy i mówić, że umieszczenie między okładkami kondensatora na przykład warstwy szkła powoduje mniej więcej dziesięciokrotny wzrost jego pojemności, mówimy, że stała dielektryczna szkła wynosi w przybliżeniu dziesięć.

Pojemność kondensatora płaskiego, w którym cała przestrzeń jest wypełniona dielektrykiem, zapisujemy następująco:

$$C = \varepsilon_r C_0 \qquad \text{więc} \qquad C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d}$$

W tabeli 50.1 podano stałe dielektryczne różnych dielektryków.

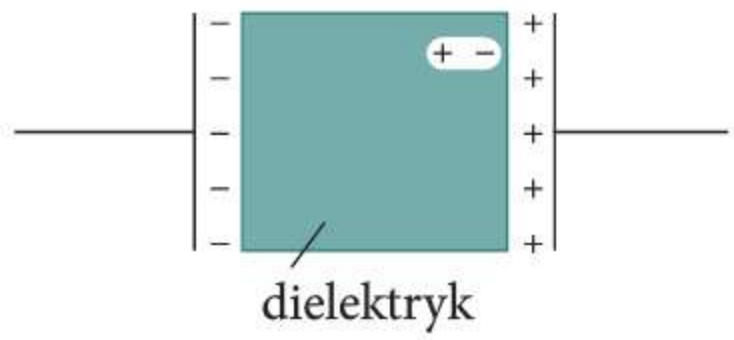
Tabela 50.1

Dielektryk	Stała dielektryczna ε_r
próżnia	1
powietrze	1,0006
nafta	2
ebonit	2,8
różne gatunki szkła	5–10
woda	81
masy ceramiczne kondensatorowe	40–160
masy ceramiczne z tytanianem baru	1000–10 000

Powróćmy do doświadczenia 50.1, w którym dielektryk był wkładany do kondensatora odłączonego od źródła napięcia. Ze związku $E = \frac{U}{d}$ wnioskujemy, że równocześnie ze zmniejszeniem się napięcia między okładkami zmalała wartość natężenia pola elektrostatycznego $\vec{E}$ między nimi.

Pamiętamy, że w przewodniku umieszczonym w polu elektrostatycznym elektrony swobodne przemieszczają się i powstaje, zwrócone przeciwnie do zewnętrznego, indukowane pole o natężeniu $\vec{E}_{\text{ind}} = -\vec{E}_0$, gdzie $\vec{E}_0$ jest natężeniem pola zewnętrznego. Dielektryki nie mają ładunków swobodnych, wszystkie elektrony są mocno związane z macierzystymi jądrami. Liczba ładunków dodatnich w jądrze atomu i elektronów na powłokach jest jednakowa, a ich rozkład powoduje, że pola elektryczne wytworzone przez ładunki dodatnie i ujemne na zewnątrz atomu wzajemnie się znoszą.

W zewnętrznym polu elektrostatycznym na wszystkie ładunki wchodzące w skład atomu działają siły elektryczne (na ładunki dodatnie w jedną, na ujemne w drugą stronę) i powodują ich przemieszczenie w obrębie atomu. Rozkład ładunków w atomie ulega zmianie, w rezultacie czego z jednej strony przeważa ładunek dodatni, a z drugiej – ujemny (patrz rys. 50.4). Tak zdeformowany atom wytwarza zewnętrzne pole przypominające pole pochodzące od dipola elektrycznego.

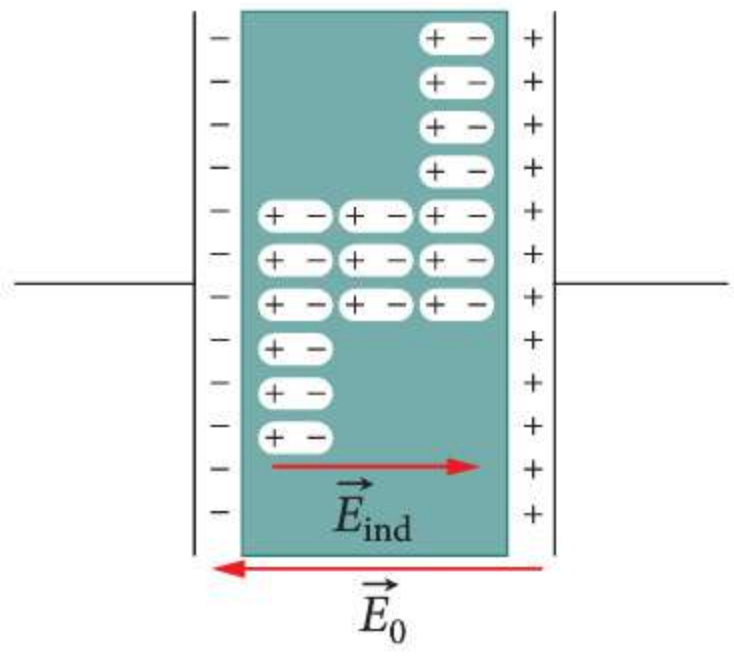


Rys. 50.4 Polaryzacja atomu dielektryka w polu elektrostatycznym

Oprócz dielektryków zbudowanych z pojedynczych atomów istnieją dielektryki zbudowane z cząsteczek (woda, tworzywa sztuczne). Jeśli cząsteczki mają budowę symetryczną, własne pole wytwarzają dopiero po umieszczeniu w zewnętrznym polu elektrostatycznym. Nazywamy je cząsteczkami niepolarnymi. Niesymetrycznie zbudowana cząsteczka wytwarza własne pole także pod nieobecność zewnętrznego pola elektrycznego. Ze względu na różny sposób ułożenia tych cząsteczek w przestrzeni pola te znoszą się, jeśli dielektryk nie znajduje się w zewnętrznym polu elektrycznym. Natomiast umieszczenie go w tym polu powoduje obrót cząsteczek i indukowanie się pola $\vec{E}_{\text{ind}}$ jak w innych rodzajach dielektryków.

W płytce dielektrycznej umieszczonej między okładkami kondensatora dipole dążą do ustawienia się jak na rys. 50.5.

Wewnątrz dielektryka ładunki dodatnie i ujemne kompensują się wzajemnie. Nieskompensowane pozostają jedynie ładunki powierzchniowe, związane siłami przyciągania przez ładunki



Rys. 50.5 Indukowanie pola wewnątrz dielektryka umieszczonego w polu elektrostatycznym; $E_{\text{ind}} \neq E$

na okładkach: ujemne na jednej i dodatnie na drugiej powierzchni dielektryka. To zjawisko nosi nazwę **polaryzacji dielektryka**. Kierunek linii pola wytworzonego przez te ładunki pokrywa się z kierunkiem linii pola zewnętrznego, a zwroty są przeciwne.

Obserwacja listków elektroskopu w przeprowadzonym doświadczeniu wskazuje, że indukowane pole $\vec{E}_{\text{ind}}$ nie kompensuje pola zewnętrznego $\vec{E}_0$, tylko je zmniejsza, oraz że ten efekt zależy od rodzaju dielektryka wkładanego między okładki. Jeśli więc przez $\vec{E}_0$ oznaczymy natężenie pola, jakie panowałoby w przestrzeni niezawierającej dielektryka, a przez $\vec{E}_{\text{ind}}$ – natężenie pola elektrostatycznego, jakie powstaje dodatkowo w dielektryku w wyniku zmian wywołanych w nim pod wpływem pola zewnętrznego, to natężenie całkowitego pola $\vec{E}$ w dielektryku:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{\text{ind}}$$

a jego wartość:

$$E = E_0 - E_{\text{ind}}$$

Pojemność kondensatora w obu przypadkach wynosi:

$$C_0 = \frac{q_0}{U_0} = \frac{q_0}{E_0 d} \qquad \text{i} \qquad C = \frac{q_0}{U} = \frac{q_0}{Ed}$$

gdzie d jest odległością między płytkami.

Zależność $\vec{E}$ od rodzaju dielektryka można wyrazić tak:

$$\frac{C}{C_0} = \varepsilon_{\text{r}} = \frac{E_0}{E} \qquad \text{lub} \qquad \vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_{\text{r}}}$$

ZADANIA

1. Oblicz powierzchnię płytki kondensatora płaskiego, którego pojemność byłaby równa obliczonej w przykładzie 48.1 pojemności elektrycznej kuli ziemskiej. Przyjmij, że $\varepsilon_{\text{r}} = 5000$ i odległość między płytkami $d = 0{,}01\ \text{mm}$.
2. Płaski kondensator naładowano do pewnej różnicy potencjałów i stwierdzono, że płytki przyciągają się wzajemnie siłą o wartości F. Jak zmieni się siła przyciągania płytek, jeśli kondensator zanurzymy w nafcie, której stała dielektryczna jest równa ε_{r}? Rozpatrz przypadek, gdy:
   a) kondensator przed zanurzeniem w dielektryku odłączono od źródła napięcia,
   b) kondensator przez cały czas pozostaje połączony z baterią.



51. Energia naładowanego kondensatora

- Rozumowanie prowadzące do wzoru na energię naładowanego kondensatora
- Przykłady zamiany energii naładowanego kondensatora w inne rodzaje energii

Przypomnij sobie definicję pojemności elektrycznej kondensatora, wzór na pracę wykonywaną przez siłę zewnętrzną przy przemieszczaniu ładunku oraz jej związek z elektrostatyczną energią potencjalną.

Ładowanie kondensatora jest związane z wykonywaniem pracy, tak jak wzajemne zbliżanie (lub oddalanie) punktowych ładunków. Naładowany kondensator ma energię równą pracy potrzebnej do jego naładowania.

Aby wyprowadzić wzór na tę pracę, wyobraźmy sobie, że z jednej z dwu początkowo obojętnych okładek „wyrywamy" ładunek porcjami i przenosimy na drugą okładkę. Z przenoszeniem kolejnych porcji ładunku jest związany wzrost napięcia między okładkami. Dla kondensatora o pojemności C:

$$U = \frac{1}{C}Q$$

gdzie Q jest ładunkiem przeniesionym z jednej okładki na drugą, więc jedna okładka zyskuje ładunek dodatni, a druga – ujemny. Napięcie między okładkami rośnie **liniowo** od 0 do U wraz ze wzrostem ładunku na tych okładkach.
W takim przypadku (patrz rozdział 47) pracę wykonaną przez siłę zewnętrzną przy przemieszczaniu ładunku (a więc i przyrost energii potencjalnej kondensatora) możemy obliczyć jako:

$$W = QU_{\text{śr}}$$

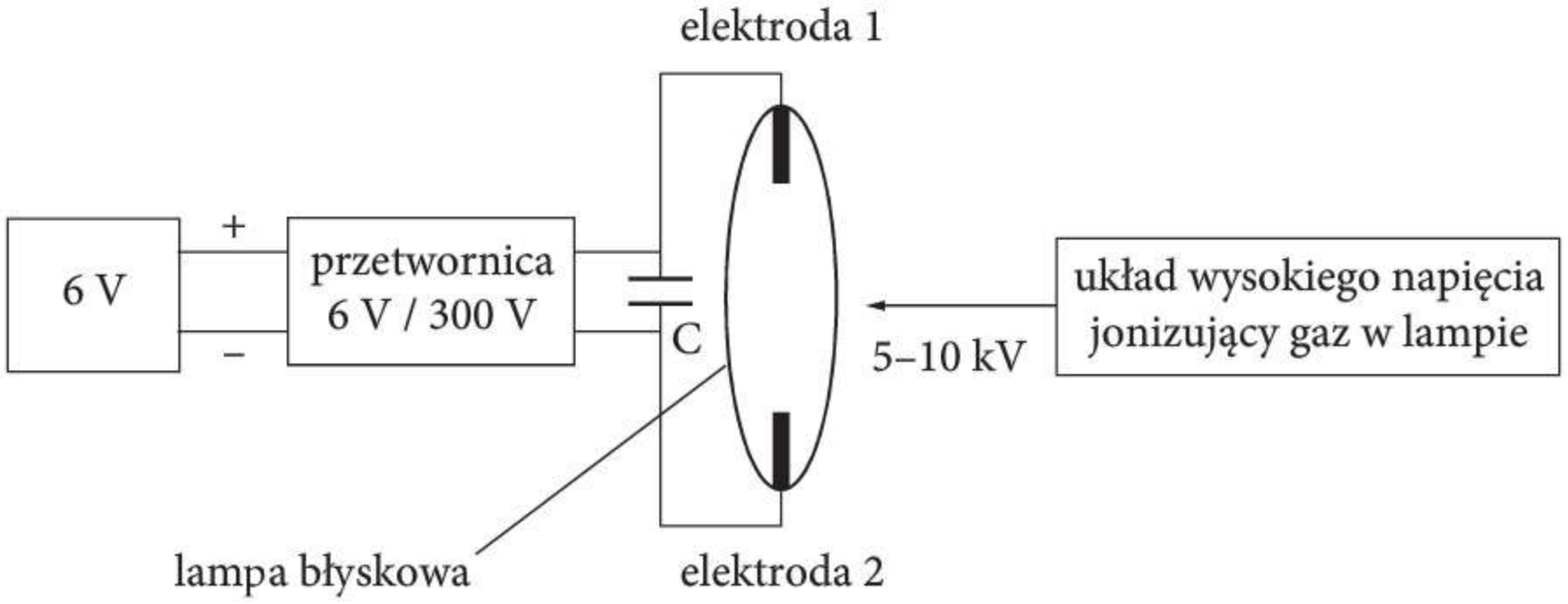
gdzie $U_{\text{śr}}$ to napięcie obliczone jako średnia arytmetyczna napięcia początkowego i napięcia po zakończeniu ładowania, czyli:

$$U_{\text{śr}} = \frac{0 + U}{2} = \frac{U}{2}$$

Energię potencjalną naładowanego kondensatora (lub krótko: **energię kondensatora**) możemy więc wyrazić wzorami:

$$E_{\text{p}} = \frac{1}{2}QU \qquad \text{lub} \qquad E_{\text{p}} = \frac{1}{2}CU^2 \qquad \text{lub} \qquad E_{\text{p}} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \tag{51.1}$$

Energia naładowanego kondensatora może być zamieniana na inne rodzaje energii. Przykładem jest lampa błyskowa, w którą wyposażone są wszystkie współczesne aparaty fotograficzne.
Uproszczony schemat całego urządzenia przedstawiono na rysunku 51.1.



Rys. 51.1 Schemat układu z lampą błyskową

Zespół kilku ogniw (np. 4×1,5 V) zasila przetwornicę napięcia stałego (6 V/300 V), która ładuje kondensator C do napięcia ok. 300 V. Napięcie to jest przyłożone między elektrody 1 i 2 lampy wyładowczej (błyskowej) wypełnionej ksenonem. Przy napięciu o tej wartości atomy ksenonu są w większości elektrycznie obojętne, więc nie może nastąpić przepływ prądu w lampie (i błysk światła). Aby przepływ taki nastąpił, należy wcześniej zjonizować gaz w lampie za pomocą wysokiego napięcia rzędu kilku tysięcy woltów, wygenerowanego w specjalnym układzie elektrycznym.
Następstwem jonizacji ksenonu jest **gwałtowne rozładowanie kondensatora C** i przepływ krótkotrwałego prądu elektrycznego (jonowego) między elektrodami 1 i 2 lampy. Towarzyszy temu intensywny błysk światła.

Po zwolnieniu przycisku migawki aparatu fotograficznego lampa jest gotowa do wykonania kolejnego zdjęcia.

ZADANIA

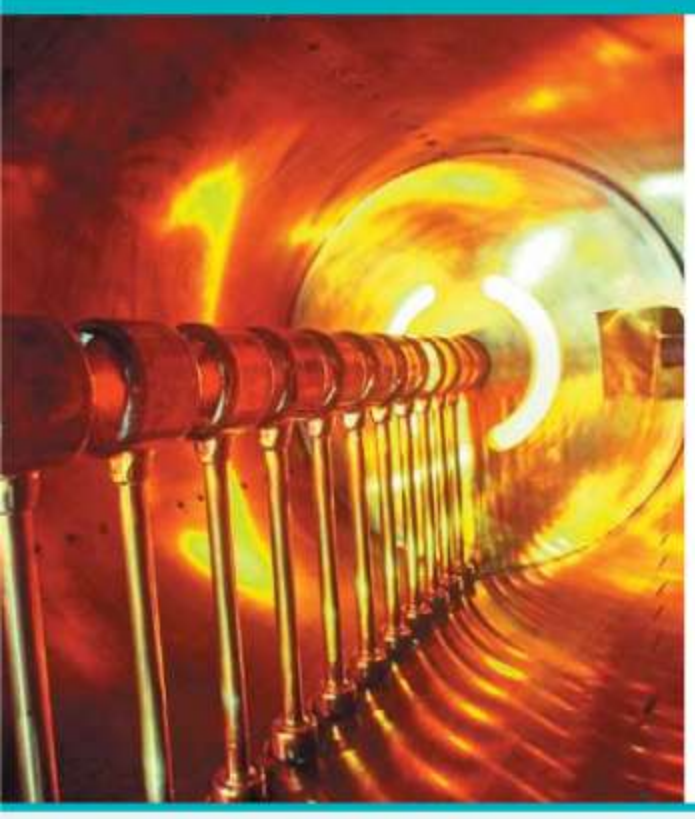
1. Płaski kondensator próżniowy naładowano i odłączono od źródła napięcia. Przeprowadź odpowiednie rozumowanie i ustal, jak podczas oddalania okładek kondensatora będą się zmieniać:
- pojemność kondensatora (C),
- ładunek kondensatora (Q),
- napięcie między okładkami kondensatora (U),
- wartość natężenia pola między okładkami kondensatora (E),
- energia kondensatora (E_p).

2. Płaski kondensator próżniowy jest podłączony do źródła o napięciu U. Przeprowadź odpowiednie rozumowanie i ustal, jak w wyniku oddalenia okładek kondensatora zmienią się:
- pojemność kondensatora (C),
- napięcie między okładkami kondensatora (U),
- ładunek kondensatora (Q),
- wartość natężenia pola między okładkami kondensatora (E),
- energia kondensatora (E_p).

***3.** Płaski kondensator powietrzny składa się z dwóch płytek o powierzchni $S = 200\ \mathrm{cm}^2$ każda, znajdujących się w odległości $l_1 = 0{,}3\ \mathrm{cm}$ jedna od drugiej. Oblicz pracę, którą należy wykonać, aby zwiększyć odległość między okładkami do $l_2 = 0{,}5\ \mathrm{cm}$. Zadanie rozwiąż dla dwóch przypadków:
a) kondensator ładujemy do $U_0 = 600\ \mathrm{V}$ i odłączamy od baterii;
b) kondensator pozostaje przez cały czas połączony z baterią podtrzymującą stałą różnicę potencjałów $U_0 = 600\ \mathrm{V}$.

4. Kondensator został naładowany i odłączony od źródła. Załóżmy, że ładunek przenosimy jednakowymi porcjami z jednej okładki kondensatora na drugą. Rozstrzygnij, czy za każdym razem wykonujemy taką samą pracę.
a) Podaj uzasadnienie na podstawie definicji pracy.
b) Sporządź wykres napięcia U pomiędzy okładkami od ładunku Q kondensatora.

***5.** Do układu naładowanych i połączonych szeregowo kondensatorów o pojemnościach $C_1 = 2\ \mu\mathrm{F}$ i $C_2 = 8\ \mu\mathrm{F}$ przyłożono różnicę potencjałów $300\ \mathrm{V}$.
a) Oblicz energię tego układu kondensatorów.
b) Naładowane i połączone szeregowo kondensatory odłączono od źródła napięcia, rozłączono, a następnie połączono razem ich dodatnie okładki oraz razem ujemne. Ile wynosi teraz energia układu?
c) Naładowane i połączone szeregowo kondensatory rozłączono, a następnie połączono ich okładki o przeciwnych znakach. Oblicz energię tego układu.



52. Ruch naładowanej cząstki w polu elektrostatycznym

- Ruch naładowanej cząstki w polu jednorodnym
- Budowa i zasada działania lampy oscyloskopowej
- Budowa i zasada działania akceleratora liniowego

Przypomnij sobie analogie między polem grawitacyjnym i elektrostatycznym oraz opis ruchu ciała w jednorodnym polu grawitacyjnym (spadanie swobodne, rzut pionowy w górę i w dół, rzut poziomy).

Na umieszczoną w polu elektrostatycznym cząstkę naładowaną działa, zgodnie z definicją natężenia pola (44.1), siła $\vec{F} = \vec{E}q$. Załóżmy, że jest to jedyna siła działająca na cząstkę w tym polu, a pole to jest jednorodne. W takim przypadku ruch cząstki pod wpływem siły $\vec{F}$ będzie się odbywał ze stałym przyspieszeniem:

$$\vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m}$$

Tor ruchu cząstki naładowanej zależy od kąta, jaki tworzy jej początkowa prędkość z kierunkiem linii pola.

Łatwo dostrzec analogię między ruchem cząstki naładowanej w jednorodnym polu elektrostatycznym ($\vec{E}$ = const) a ruchem ciała o masie m w jednorodnym polu grawitacyjnym ($\vec{g}$ = const).

Przeanalizuj samodzielnie ruch cząstki naładowanej dodatnio i cząstki naładowanej ujemnie w jednorodnym polu elektrostatycznym w następujących przypadkach:

- $\vec{v}_0 = \vec{0}$,
- $\vec{v}_0 \parallel \vec{E}$,
- $\vec{v}_0 \perp \vec{E}$,

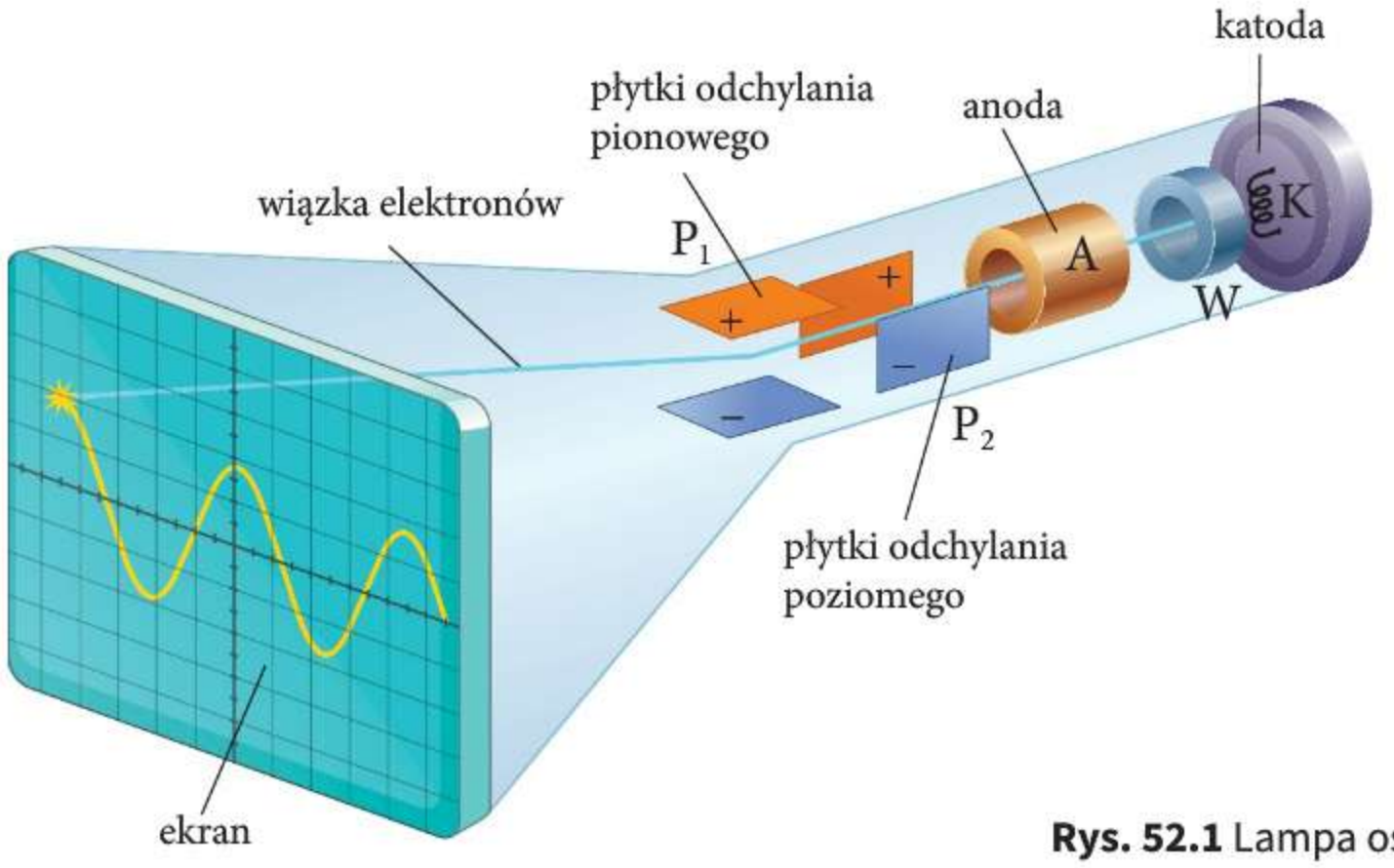
gdzie $\vec{v}_0$ to prędkość początkowa cząstki.

Lampa oscyloskopowa

Szczególne znaczenie praktyczne ma oddziaływanie pola elektrycznego na swobodne elektrony wykorzystywane w lampach rentgenowskich i oscyloskopowych, stanowiących główną część oscylografów, elektrokardiografów i urządzeń radarowych.

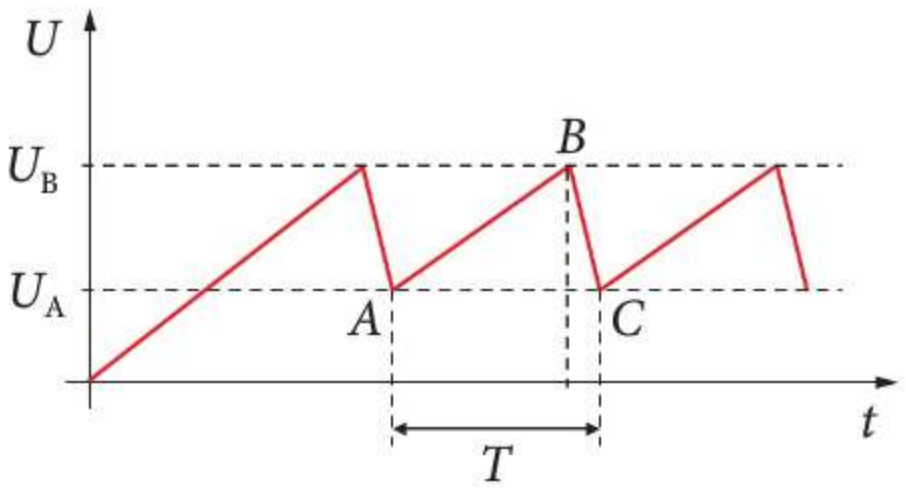
Lampę oscyloskopową (rys. 52.1 na następnej stronie) stanowi opróżniona z powietrza bańka szklana. Źródłem elektronów jest w niej żarzona katoda K. Otacza ją cylinder Wehnelta W, którego potencjał można regulować. Potencjał cylindra Wehnelta decyduje o szerokości i natężeniu wiązki elektronów biegnącej we wnętrzu lampy. Układ anod A powoduje przyspieszenie elektronów.

Istotną część lampy stanowi układ dwóch par płytek P_1 i P_2. Odchylają one wiązkę elektronów w zależności od przyłożonego do nich napięcia. Nieodchylona wiązka daje świecącą plamkę na środku ekranu pokrytego substancją fluoryzującą.

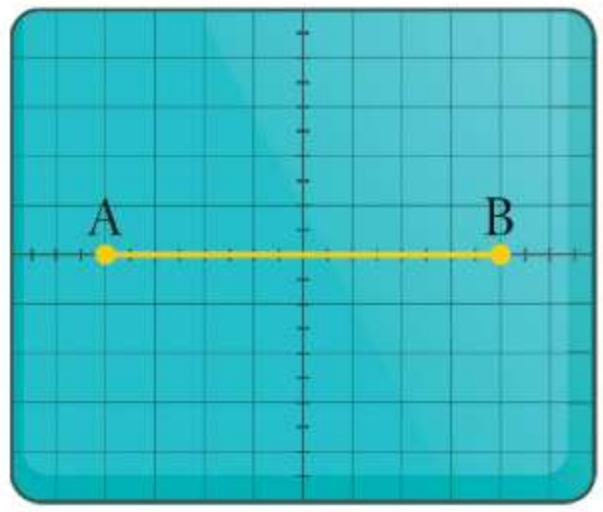


Rys. 52.1 Lampa oscyloskopowa

Jeśli za pomocą oscyloskopu chcemy zbadać krótkotrwały przebieg zjawiska lub proces okresowy o bardzo krótkim okresie, zachodzące zmiany (np. drgania akustyczne lub mechaniczne) musimy przetworzyć na zmiany napięcia. To zmienne badane napięcie przykładamy do pary płytek odchylających elektrony pionowo. Do drugiej pary płytek włączamy napięcie powodujące przesuwanie plamki ruchem jednostajnym wzdłuż odcinka poziomego od jednego do drugiego końca ekranu. Takie napięcie (rys. 52.2) uzyskuje się w tzw. generatorze drgań relaksacyjnych (zwanym też generatorem podstawy czasu). Czas, w którym napięcie wzrasta liniowo od U_A do U_B, jest równy czasowi przesuwania plamki na ekranie lampy od punktu *A* do *B* (rys. 52.3).



Rys. 52.2 Napięcie w generatorze podstawy czasu



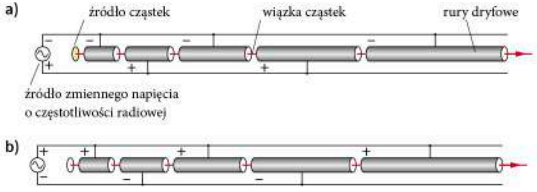
Rys. 52.3 Obraz plamki na ekranie

Odcinek *BC* odpowiada gwałtownemu powrotowi plamki do punktu *A*. Odstęp czasu *T* (okres drgań relaksacyjnych) można regulować w zależności od szybkości przebiegu badanego zjawiska. Gdy przyłożymy równocześnie do płytek P_2 drgania relaksacyjne i do płytek P_1 zmiany napięcia odpowiadające badanemu przebiegowi, zobaczymy na ekranie wykres tych zmian w funkcji czasu.

Akcelerator liniowy

Szerokie zastosowanie w badaniach naukowych i medycynie znalazły **akceleratory liniowe**, w których naładowane cząstki są przyspieszane w polu elektrostatycznym i uzyskują bardzo duże energie kinetyczne. Obecnie istnieje wiele typów tych urządzeń. Opiszemy tylko jeden z nich, w którym cząstki naładowane są kierowane do tzw. rur dryfowych ustawionych wzdłuż jednej prostej (rys. 52.4). Kolejne rury dryfowe są podłączone do przeciwnych biegunów źródła zmiennego napięcia.

Cząstki naładowane są przyspieszane w polu elektrostatycznym wytwarzanym w obszarach między rurami dryfowymi, a wewnątrz nich poruszają się ze stałą prędkością.



Rys. 52.4 Schemat budowy akceleratora liniowego

Różnica potencjałów zmienia znak, gdy cząstki znajdują się wewnątrz rury dryfowej, czyli w obszarze, w którym nie ma pola elektrostatycznego. Długości kolejnych rur dryfowych i częstotliwość zmian napięcia są tak dobrane, by cząstka zawsze trafiała na pole przyspieszające między rurami.

Najdłuższy na świecie akcelerator liniowy, **Stanford Linear Accelerator**, znajduje się w Kalifornii (Stany Zjednoczone) i ma 3,2 km długości (rys. 52.5). Dzięki eksperymentom – przeprowadzonym z udziałem tego akceleratora w latach 1966–2000 – naukowcy dokonali licznych i spektakularnych odkryć, które m.in. zostały uhonorowane trzema Nagrodami Nobla w dziedzinie fizyki.

W akceleratorze przyspieszano elektrony do energii 50 GeV.



Rys. 52.5 Akcelerator liniowy w Kalifornii

ZADANIA

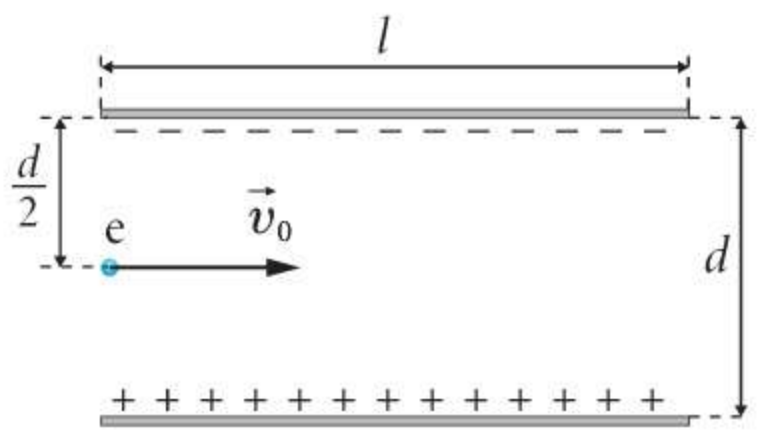
1. Między okładkami włączonego do źródła o napięciu U_0 próżniowego kondensatora płaskiego, w którym płytki są odległe o d, umieszczono cząstkę o masie m i ładunku q (szybkość początkowa cząstki $v_0 = 0$). Wyraź wzorem:

a) wartość przyspieszenia, z którym będzie się poruszała ta cząstka,

b) szybkość, którą cząstka uzyska po przebyciu drogi s w polu elektrostatycznym w tym kondensatorze,

c) wartość pędu tej cząstki po przebyciu przez nią drogi x między dwoma punktami pola, jeśli różnica potencjałów między tymi punktami wynosi U.

2. Elektron przyspieszony za pomocą napięcia $U_1 = 400\ \mathrm{V}$ wpada między okładki kondensatora płaskiego prostopadle do linii pola elektrostatycznego (rys. 52.6) i po pewnym czasie opuszcza kondensator.



Rys. 52.6

Napięcie między okładkami $U_2 = 30\ \mathrm{V}$, odległość między nimi $d = 3\ \mathrm{cm}$, długość okładki $l = 8\ \mathrm{cm}$. Stosunek ładunku elementarnego do masy elektronu $\frac{e}{m} = 1{,}8 \cdot 10^{11}\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{kg}}$. Niejednorodności pola na brzegach kondensatora należy pominąć.

a) Wykonaj rysunek przedstawiający tor ruchu elektronu wewnątrz kondensatora.

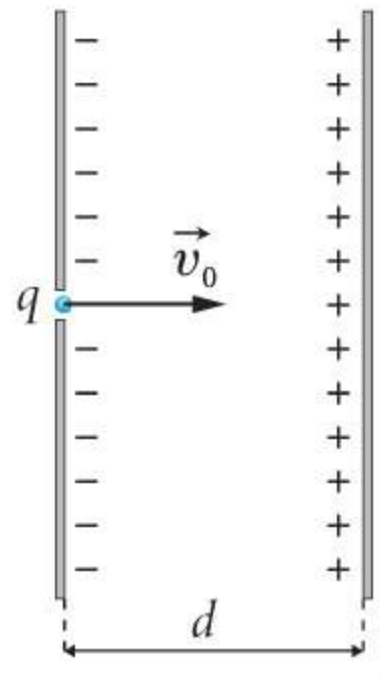
b) Oblicz wartość prędkości, z którą elektron wpada do kondensatora, i czas przelotu elektronu przez kondensator.

c) Oblicz wartość przyspieszenia elektronu wewnątrz kondensatora.

d) Oblicz odległość, o jaką zostanie odchylony (od kierunku pierwotnego) tor tego elektronu do chwili, w której opuści on kondensator.

***3.** Elektron wlatuje z szybkością $v_0 = 10^6\ \mathrm{m/s}$ w przestrzeń między okładkami próżniowego kondensatora płaskiego przez otworek w dodatniej okładce kondensatora. Kąt między kierunkiem prędkości elektronu a liniami pola elektrostatycznego w kondensatorze $\alpha = \frac{\pi}{6}$, odległość między okładkami $d = 0{,}01\ \mathrm{m}$. Oblicz maksymalną wartość natężenia pola elektrostatycznego w kondensatorze, przy której elektron doleci do okładki ujemnej. Przyjmij, że $\frac{e}{m} = 1{,}8 \cdot 10^{11}\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{kg}}$.

4. Ujemnie naładowana cząstka o ładunku q i masie m wpada w obszar pomiędzy okładkami kondensatora z prędkością $\vec{v}_0$ (rys. 52.7). Różnica potencjałów między okładkami wynosi U. Oblicz względną zmianę energii kinetycznej cząstki po przejściu między okładkami.



Rys. 52.7



Wzajemne oddziaływanie ciał naelektryzowanych

W przyrodzie występują dwa rodzaje ładunków elektrycznych – dodatnie i ujemne.
Jednostką ładunku w SI jest **kulomb** $(1\ \mathrm{C})$.
Każdy ładunek dodatni jest całkowitą wielokrotnością ładunku elementarnego $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}$, a ujemny – całkowitą wielokrotnością ładunku elektronu $q_{\text{elektronu}} = -e$.

Oddziaływanie ładunków punktowych jest opisane **prawem Coulomba**:

Wartość siły wzajemnego oddziaływania dwóch ładunków punktowych jest wprost proporcjonalna do iloczynu bezwzględnej wartości tych ładunków i odwrotnie proporcjonalna do kwadratu ich wzajemnej odległości.

$$F = k\frac{|q_1||q_2|}{r^2}$$

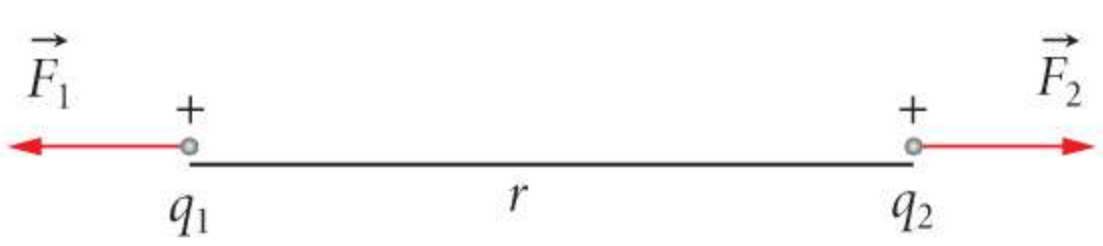
gdzie $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon}$, a ε jest przenikalnością elektryczną ośrodka, w którym oddziałują ładunki.
Dla próżni:

$$k_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

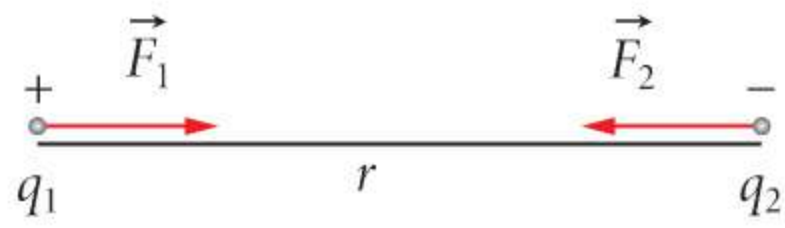
$$\varepsilon_0 \approx 8{,}9 \cdot 10^{-12}\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}^2}$$

Siły wzajemnego oddziaływania ładunków punktowych leżą na łączącej je prostej, a zwroty tych sił zależą od znaków ładunków oddziałujących ciał.

a)



b)



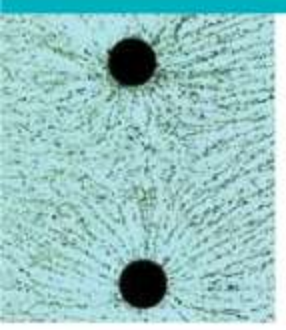
Ciała można naelektryzować przez:

- zetknięcie ciała obojętnego elektrycznie z ciałem naelektryzowanym,
- pocieranie ciał elektrycznie obojętnych,
- indukcję (wpływ).

W procesach elektryzowania ciał mamy do czynienia z przepływem ładunku zgodnie z **zasadą zachowania ładunku**, w myśl której:

W układzie ciał izolowanych elektrycznie od wszystkich innych ciał ładunek może przemieszczać się z jednego ciała do drugiego, ale jego całkowita wartość (suma algebraiczna) nie może ulec zmianie.

Ciało naelektryzowane jest źródłem **pola elektrostatycznego**.



Natężenie pola elektrostatycznego

Natężenie pola jest wektorową wielkością fizyczną charakteryzującą to pole.

Natężeniem pola elektrostatycznego w danym punkcie nazywamy iloraz siły elektrycznej działającej na dodatni ładunek próbny q, umieszczony w tym punkcie, i wartości tego ładunku:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_{\text{el}}}{q}$$

Zwrot natężenia pola elektrostatycznego jest w każdym punkcie pola zgodny ze zwrotem siły działającej tam na dodatni ładunek próbny.

Jednostką natężenia pola elektrostatycznego w SI jest:

$$1\ \frac{\text{N}}{\text{C}} = 1\ \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s} \cdot \text{A} \cdot \text{s}^2} = 1\ \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{A} \cdot \text{s}^3}$$

Jeśli znamy natężenie pola elektrostatycznego, możemy znaleźć siłę działającą w dowolnym punkcie tego pola (bez względu na rozkład ładunku źródłowego) na dowolny ładunek q:

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

Jeżeli $q > 0$, to zwroty siły i natężenia są zgodne, a jeśli $q < 0$ – zwroty siły i natężenia są przeciwne.

Wartość natężenia pola elektrostatycznego w danym punkcie zależy od rozkładu ładunku będącego źródłem pola i od ośrodka, w którym pole jest wytworzone. Dla pola centralnego wytworzonego przez źródło punktowe o ładunku Q:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|Q|}{r^2} \qquad \text{w próżni}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{|Q|}{r^2} \qquad \text{w ośrodku o przenikalności } \varepsilon$$

Aby obliczyć natężenie pola elektrostatycznego pochodzącego od kilku ładunków punktowych, stosujemy **zasadę superpozycji natężeń pól**, czyli dodajemy (w danym punkcie) wektory $\vec{E}_i$ natężeń pól pochodzących od wszystkich n ładunków.

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i$$



Naelektryzowany przewodnik

Ładunek dostarczony przewodnikowi rozmieszcza się tylko na jego zewnętrznej powierzchni, więc natężenie pola elektrostatycznego wewnątrz wszystkich naładowanych przewodników, powłok i wnęk dowolnego kształtu jest równe zeru.

Wartość natężenia pola centralnego wytworzonego przez przewodnik kulisty to:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{|Q|}{r^2} \qquad \text{dla} \qquad r \geqslant R$$

$$E = 0 \qquad \text{dla} \qquad r < R$$

Do opisu rozkładu ładunku na powierzchni przewodnika wprowadzamy pojęcie gęstości powierzchniowej ładunku. **Gęstością powierzchniową ładunku** σ nazywamy iloraz ładunku Q zgromadzonego na pewnej powierzchni S i tej powierzchni:

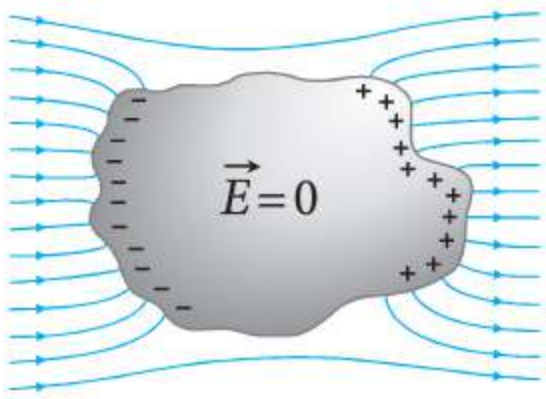
$$\sigma = \frac{Q}{S}$$

Na powierzchni kulistego przewodnika w stanie równowagi elektrostatycznej gęstość powierzchniowa ładunku jest stała. Im mniejszy promień krzywizny przewodnika, tym większa gęstość zgromadzonego w tym miejscu ładunku.



Przewodnik w polu elektrostatycznym

W przewodniku umieszczonym w jednorodnym polu elektrostatycznym indukuje się pole elektrostatyczne. Elektrony swobodne przemieszczają się w przewodniku do chwili zrównoważenia się działających na nie sił pola zewnętrznego i pola wyindukowanego. W stanie równowagi suma natężeń tych pól **wewnątrz przewodnika** jest równa zeru.



$$\vec{E}_0 + \vec{E}_{\text{ind}} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_{\text{ind}} = -\vec{E}_0$$



Analogie w opisie pól grawitacyjnego i elektrostatycznego

Pole elektrostatyczne charakteryzują dwie wielkości fizyczne – natężenie i potencjał. **Natężenie** jest wielkością **wektorową**, a **potencjał** wielkością **skalarną**.

Potencjałem V pola w danym punkcie nazywamy iloraz energii potencjalnej punktowego ciała naelektryzowanego dodatnim ładunkiem próbnym q, umieszczonego w tym punkcie, i wartości tego ładunku:

$$V = \frac{E_{\text{p}}}{q} \qquad q > 0$$

Potencjał informuje, jaką energię potencjalną ma w danym punkcie pola ładunek jednostkowy.

Jednostką potencjału w SI jest **wolt** (1 V).

$$1\ \text{V} = 1\frac{\text{J}}{\text{C}} = 1\frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{A}\cdot\text{s}} = 1\frac{\text{kg}\cdot\text{m}^2}{\text{A}\cdot\text{s}^3}$$

	Pole grawitacyjne	Pole elektrostatyczne
1.	Wartość siły grawitacji działającej między dwoma punktami materialnymi lub jednorodnymi kulami o masach M i m: $F_{\text{g}} = G\frac{Mm}{r^2}$	Wartość siły elektrostatycznej działającej między dwoma ładunkami punktowymi Q i q: $F_{\text{el}} = k \cdot \frac{\lvert Q\rvert \cdot \lvert q\rvert}{r^2}$
2.	Definicja natężenia pola grawitacyjnego w danym punkcie: $\vec{\gamma} = \frac{\vec{F}_{\text{g}}}{m}$	Definicja natężenia pola elektrostatycznego w danym punkcie: $\vec{E} = \frac{\vec{F}_{\text{el}}}{q} \qquad q > 0$

	Pole grawitacyjne	Pole elektrostatyczne
3.	Ogólny wzór na siłę grawitacji, który stosuje się w dowolnym polu grawitacyjnym: $\vec{F}_g = m\vec{\gamma}$ Z tego wzoru wynika, że siła grawitacji w danym polu jest wprost proporcjonalna do masy ciała m, na które działa.	Ogólny wzór na siłę elektrostatyczną, który stosuje się w dowolnym polu elektrostatycznym: $\vec{F}_{el} = q\vec{E}$ Z tego wzoru wynika, że wartość siły elektrostatycznej w danym polu jest wprost proporcjonalna do ładunku q, na który działa. Uwaga: Do wzoru wstawiamy q wraz ze znakiem.
4.	Wartość natężenia centralnego pola grawitacyjnego w punkcie odległym o r od źródła: • ciała punktowego o masie M $\gamma = \frac{GM}{r^2}$ • jednorodnej kuli o masie M i promieniu R $\gamma = \frac{GM}{r^2}$ dla $r \geqslant R$ $\gamma = \frac{4}{3}\pi G\rho r$ dla $r < R$	Wartość natężenia centralnego pola elektrostatycznego w punkcie odległym o r od źródła: • ładunku punktowego Q $E = \frac{k\lvert Q\rvert}{r^2}$ • kuli o promieniu R $E = \frac{k\lvert Q\rvert}{r^2}$ dla $r \geqslant R$ $E = 0$ dla $r < R$
5.	Definicja zmiany grawitacyjnej energii potencjalnej ciała o masie m przy jego przemieszczaniu między dwoma punktami pola (A i B): $\Delta E_{p,A\to B} = W_{\text{siły zewn},A\to B}$ lub $\Delta E_{p,A\to B} = -W_{\text{siły pola},A\to B}$	Definicja zmiany elektrostatycznej energii potencjalnej ładunku q przy jego przemieszczaniu między dwoma punktami pola (A i B): $\Delta E_{p,A\to B} = W_{\text{siły zewn},A\to B}$ lub $\Delta E_{p,A\to B} = -W_{\text{siły pola},A\to B}$
	Uwaga: Przez siłę zewnętrzną rozumiemy tutaj siłę, która w każdym punkcie równoważy siłę pola.	
6.	Wzór na pracę siły zewnętrznej przy przemieszczaniu ciała o masie m w polu centralnym (z A do B): $W_{\text{siły zewn},A\to B} = GMm\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$	Wzór na pracę siły zewnętrznej przy przemieszczaniu ładunku q w polu centralnym (z A do B): $W_{\text{siły zewn},A\to B} = -kQq\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$ Uwaga: Ładunki Q i q podstawiamy do wzoru wraz ze znakami.
7.	Grawitacyjna energia potencjalna ciała o masie m w polu centralnym (zależność od M i r): $E_p = -\frac{GMm}{r}$ Wzór jest słuszny pod warunkiem, że energia potencjalna ciała jest równa zeru w nieskończoności.	Elektrostatyczna energia potencjalna ładunku q w polu centralnym (zależność od Q i r): $E_p = \frac{kQq}{r}$ Uwaga: Ładunki Q i q podstawiamy do wzoru wraz ze znakami. Wzór jest słuszny pod warunkiem, że energia potencjalna ładunku q jest równa zeru w nieskończoności.

	Pole grawitacyjne	Pole elektrostatyczne
8.	*Definicja potencjału grawitacyjnego w danym punkcie pola: $V = \frac{E_p}{m}$	Definicja potencjału elektrostatycznego w danym punkcie pola: $V = \frac{E_p}{q} \quad q > 0$
9.	*Potencjał centralnego pola grawitacyjnego: $V = -\frac{GM}{r}$	Potencjał centralnego pola elektrostatycznego: • ładunku punktowego Q $V = \frac{kQ}{r}$ • kuli o promieniu R $V = \frac{kQ}{r} \quad \text{dla} \quad r \geqslant R$ $V = \frac{kQ}{R} \quad \text{dla} \quad 0 < r < R$ Uwaga: Ładunek Q podstawiamy do wzoru wraz ze znakiem.
10.	*Wzór na pracę siły zewnętrznej przy przemieszczaniu ciała o masie m między dwoma punktami (z A do B) dowolnego pola grawitacyjnego: $W_{\text{siły zewn, A}\to\text{B}} = m(V_B - V_A)$	Wzór na pracę siły zewnętrznej przy przemieszczaniu ładunku q między dwoma punktami (z A do B) dowolnego pola elektrostatycznego: $W_{\text{siły zewn, A}\to\text{B}} = q(V_B - V_A)$ Uwaga: Do wzoru podstawiamy ładunek q wraz ze znakiem.



Pojemność elektryczna ciała przewodzącego

Pojemnością elektryczną ciała przewodzącego nazywamy stały dla tego ciała iloraz wprowadzonego na nie ładunku i uzyskanego przez nie potencjału elektrycznego. Iloraz ten jest dla każdego ciała stały pod warunkiem, że w pobliżu nie zmienia się ułożenie innych przewodników.

$$C = \frac{Q}{V}$$

Jednostką pojemności w SI jest **farad** (1 F).

$$1\ \text{F} = \frac{1\ \text{C}}{1\ \text{V}} = 1\ \frac{\text{A}\cdot\text{s}}{\frac{\text{J}}{\text{A}\cdot\text{s}}} = 1\ \frac{\text{A}^2\cdot\text{s}^2}{\text{kg}\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = 1\ \frac{\text{A}^2\cdot\text{s}^4}{\text{kg}\cdot\text{m}^2}$$

Mniejsze jednostki to: $1\ \text{mF} = 10^{-3}\ \text{F}$, $1\ \mu\text{F} = 10^{-6}\ \text{F}$, $1\ \text{nF} = 10^{-9}\ \text{F}$, $1\ \text{pF} = 10^{-12}\ \text{F}$.

Pojemność elektryczną przewodzącej kuli o promieniu R wyrażamy wzorem:

$$C = \frac{Q}{\frac{kQ}{R}} = \frac{R}{k} = 4\pi\varepsilon R$$

Pojemność kuli jest wprost proporcjonalna do jej promienia.



Kondensator

Układ przewodników, w którym obecność jednego wpływa na pojemność drugiego przewodnika, nazywamy **kondensatorem**, a tworzące go przewodniki – okładkami kondensatora.

Pojemnością kondensatora nazywamy iloraz dodatniego ładunku zgromadzonego na jednej jego okładce i napięcia między okładkami.

$$C = \frac{Q}{U}$$

Pojemność kondensatora zależy od jego kształtu i rozmiarów oraz rodzaju wypełniającego go dielektryka. Dielektryki charakteryzuje **stała dielektryczna** ε_r, która informuje, ile razy pojemność danego kondensatora z dielektrykiem jest większa od pojemności kondensatora bez dielektryka (próżniowego).

$$\varepsilon_r = \frac{C}{C_0}$$

Pojemność kondensatora płaskiego wyrażamy wzorem:

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d}$$

gdzie ε_r jest stałą dielektryczną dielektryka wypełniającego kondensator.
Dla kondensatora próżniowego $\varepsilon_r = 1$, więc:

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

Związek między napięciem U między okładkami kondensatora płaskiego a wartością E natężenia pola elektrostatycznego w kondensatorze ma postać:

$$E = \frac{U}{d}$$

Natężenie jest zwrócone w stronę malejącego potencjału.



Dielektryk w polu elektrostatycznym

W dielektryku wypełniającym wnętrze kondensatora zachodzi zjawisko polaryzacji. W atomach lub cząsteczkach rozkład ładunku ulega zmianie pod wpływem zewnętrznego pola elektrostatycznego $\vec{E}_0$, wytworzonego przez ładunki zgromadzone na płytkach. W dielektryku powstają dipole, które ustawiają się wzdłuż linii pola zewnętrznego i wytwarzają elektrostatyczne pole indukowane o natężeniu $\vec{E}_{ind}$.
Całkowite pole elektrostatyczne wewnątrz kondensatora jest wtedy równe:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{ind}$$

Ze względu na przeciwne zwroty wektorów $\vec{E}_0$ i $\vec{E}_{ind}$ wypadkowe natężenie pola elektrostatycznego wewnątrz kondensatora się zmniejsza.

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_r}$$

Jeśli naładowany ładunkiem q_0 kondensator jest odłączony od źródła napięcia ($q_0 = \text{const}$), to na skutek zmniejszenia wartości natężenia pola jego pojemność wzrasta.

$$C = \frac{q_0}{Ed}$$



Energia naładowanego kondensatora

Naładowany kondensator ma energię równą pracy potrzebnej do jego naładowania. Energię kondensatora o pojemności C naładowanego ładunkiem Q do napięcia U możemy wyrazić wzorami:

$$E_p = \frac{1}{2}QU \qquad \text{lub} \qquad E_p = \frac{1}{2}CU^2 \qquad \text{lub} \qquad E_p = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$



Ruch naładowanej cząstki w polu elektrostatycznym

W jednorodnym polu elektrostatycznym na cząstkę naładowaną działa stała siła elektrostatyczna o wartości $F_{el} = qE$. (Siłę grawitacji pomijamy ze względu na jej znikomą wartość; np. dla elektronu $\frac{F_{el}}{F_g} \approx 10^{42}$).

Opis ruchu cząstki jest analogiczny do opisu ruchu ciała w jednorodnym polu grawitacyjnym. W przypadku cząstki o ładunku dodatnim, gdy:

- $\vec{v}_0 = \vec{0}$ – ruch jest jednostajnie przyspieszony z przyspieszeniem o wartości $a = \frac{Eq}{m}$, zwróconym zgodnie ze zwrotem linii pola (analogia do spadania swobodnego w polu grawitacyjnym);
- $\vec{v}_0 \parallel \vec{E}$ i zwrot prędkości początkowej jest zgodny ze zwrotem linii pola – ruch jest jednostajnie przyspieszony z przyspieszeniem o wartości $a = \frac{Eq}{m}$, zwróconym zgodnie ze zwrotem linii pola (analogia do rzutu pionowego w dół w polu grawitacyjnym);
- $\vec{v}_0 \parallel \vec{E}$ i zwrot prędkości początkowej jest przeciwny do zwrotu linii pola – ruch jest jednostajnie zmienny z przyspieszeniem o wartości $a = \frac{Eq}{m}$, najpierw jednostajnie opóźniony do zatrzymania, następnie jednostajnie przyspieszony (analogia do rzutu pionowego w górę w polu grawitacyjnym);
- $\vec{v}_0 \perp \vec{E}$ – ruch jest złożony z ruchu jednostajnego w kierunku prostopadłym do linii pola i ruchu jednostajnie przyspieszonego wzdłuż linii pola z przyspieszeniem o wartości $a = \frac{Eq}{m}$, zwróconym zgodnie ze zwrotem linii pola (analogia do rzutu poziomego w polu grawitacyjnym).

Na cząstkę o ładunku ujemnym działa w tym samym polu siła o zwrocie przeciwnym do zwrotu linii pola.

Oddziaływanie pola elektrycznego na cząstki naładowane jest podstawą działania wielu urządzeń. Należą do nich m.in. lampa oscyloskopowa i akcelerator liniowy.

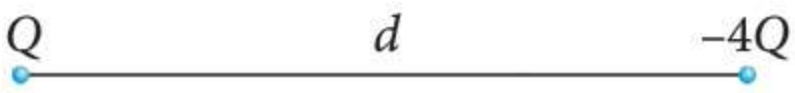
ZADANIA POWTÓRZENIOWE

1. W jednorodnym polu elektrostatycznym (wytworzonym w próżni) o liniach zwróconych w dół puszczono swobodnie ($v_0 = 0$) cząstkę naładowaną dodatnio.

1.1. Porównaj ruch tej cząstki z ruchem ciała spadającego swobodnie w jednorodnym polu grawitacyjnym, czyli nazwij rodzaje ruchu i natury sił, które je powodują.

1.2. Czy przyspieszenia: naładowanej cząstki w polu elektrostatycznym i ciała spadającego swobodnie w polu grawitacyjnym zależą od masy tych obiektów? Sformułuj odpowiedź wraz z uzasadnieniem.

2. Odległość między dwoma ładunkami punktowymi Q i $-4Q$ wynosi d (rysunek).



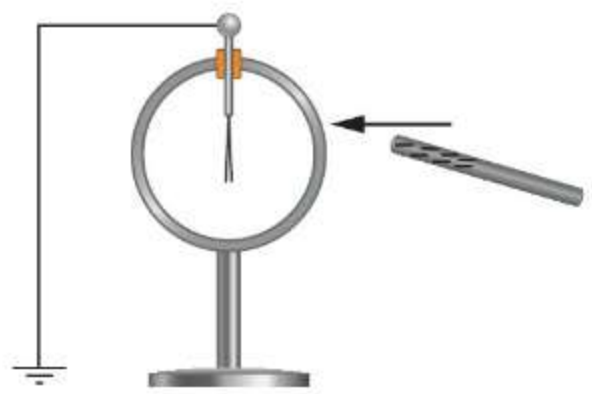
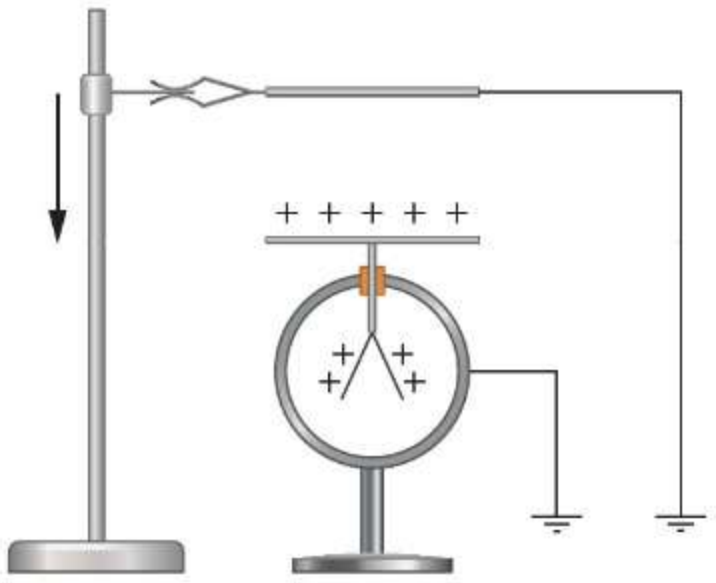
Odpowiedz na poniższe pytania.

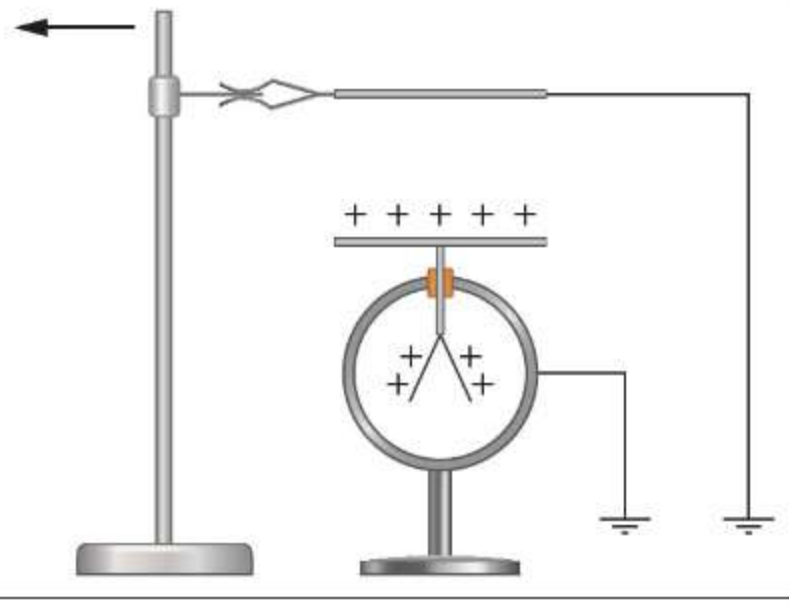
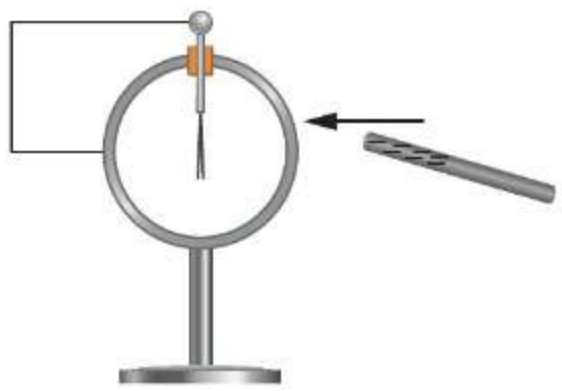
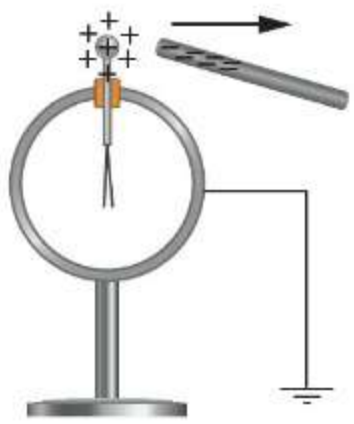
a) **W których punktach na prostej wyznaczonej przez te ładunki natężenie pola jest równe zeru?**

b) **W których punktach na prostej wyznaczonej przez te ładunki potencjał pola jest równy zeru?**

Zbadaj najpierw, na których częściach prostej mogą wystąpić takie punkty.

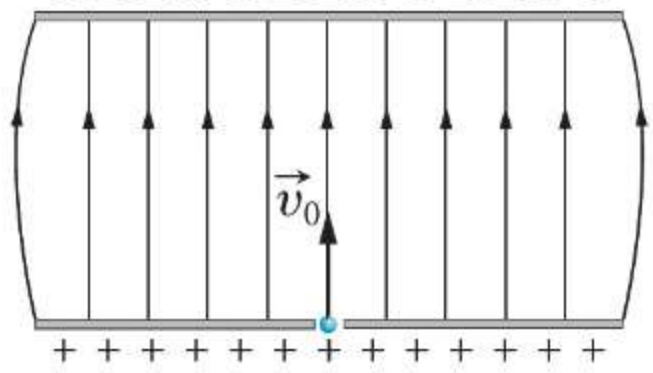
3. Każdej z poniżej przedstawionych sytuacji – ponumerowanych od 1 do 5 – przyporządkuj prawdziwy rezultat opisanych działań. W ostatniej kolumnie tabeli wskaż poprawne stwierdzenie, wybrane spośród A–C.

1.		Obudowy elektroskopu dotykamy naelektryzowaną pałeczką ebonitową.	**A / B / C**
2.		Do naelektryzowanego elektroskopu zbliżamy od góry uziemioną płytkę metalową.	**A / B / C**

3.		Od naelektryzowanego elektroskopu oddalamy uziemioną płytkę, przesuwając ją równolegle do płytki nałożonej na pręt elektroskopu.	**A / B / C**
4.		Naelektryzowaną pałeczką ebonitową dotykamy obudowy elektroskopu.	**A / B / C**
5.		Naelektryzowaną pałeczkę ebonitową oddalamy od elektroskopu.	**A / B / C**

A. Rozchylenie listków nie zmieniło się.
B. Rozchylenie listków wzrosło.
C. Rozchylenie listków zmalało.

4. Elektron wpada do jednorodnego pola elektrostatycznego z prędkością o wartości $v_0 = 1000\ \mathrm{km/s}$ zwróconą zgodnie z liniami pola, jak pokazuje rysunek. Ładunek i masa elektronu wynoszą odpowiednio $-e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}, m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}$. Podczas obliczeń pomiń siłę grawitacji.

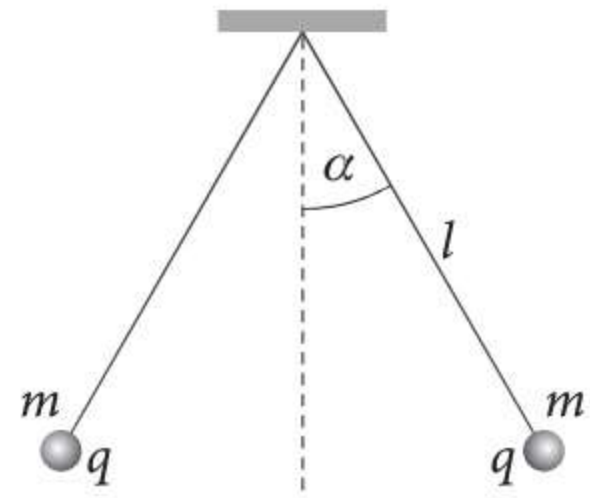


4.1. Oblicz maksymalne napięcie pomiędzy płytkami, przy którym elektron zdoła dotrzeć do górnej płytki.

4.2. Oceń prawdziwość poniższych zdań, odnoszących się do sytuacji, gdy napięcie między płytkami jest większe niż to, które zostało obliczone w zadaniu 4.1. Wskaż P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F, jeśli jest fałszywe.

1.	Elektron dotrze do górnej płytki w krótszym czasie.	**P**	**F**
2.	Elektron nie dotrze do górnej płytki i zawróci.	**P**	**F**
3.	Elektron zatrzyma się i pozostanie w spoczynku między płytkami.	**P**	**F**

5. Dwie jednakowe i jednakowo naelektryzowane kuleczki o masie $m = 0{,}5\ \mathrm{g}$ każda wiszą na jedwabnych nitkach o długości $l = 25\ \mathrm{cm}$. Każda nitka tworzy z pionem kąt $\alpha = 30^\circ$. Kulki są zawieszone w próżni (rysunek).



5.1. Odpowiedz na pytanie:
Czy siły działające na każdą kulkę równoważą się wzajemnie?

5.2. Nazwij te siły i narysuj je w zeszycie.

5.3. Oblicz ładunek każdej kulki.

5.4. Przepisz tekst do zeszytu z poprawnymi uzupełnieniami wybranymi spośród A–B oraz 1–3.

Kulki rozładowano i następnie naładowano ładunkami jednoimiennymi, ale o różnych wartościach. Kąty, jakie **teraz** obie nitki tworzą z pionem, są **A / B**. Wynika to z **1 / 2 / 3** .

A. jednakowe
B. różne

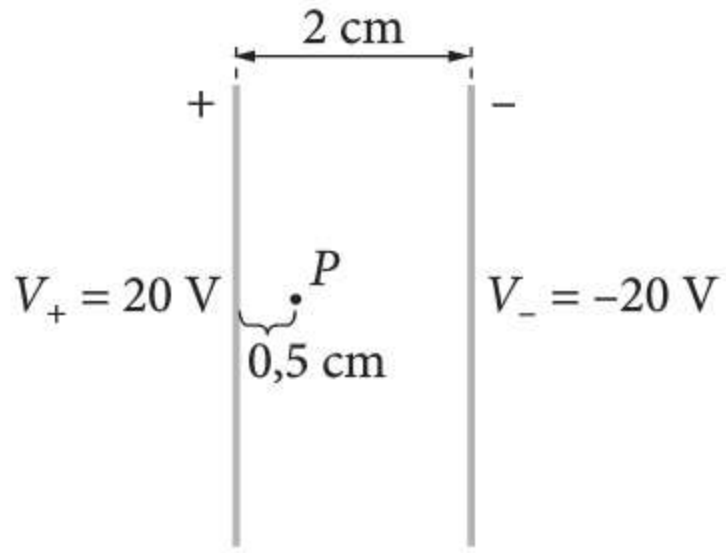
1. równości ciężarów
2. zasady zachowania ładunku
3. pierwszej zasady dynamiki

6. Płaski kondensator próżniowy naładowano i odłączono od źródła napięcia.
Odpowiedz na pytanie:
Jak zmienią się: ładunek Q na okładkach, pojemność C, napięcie U, wartość natężenia pola elektrostatycznego E oraz energia kondensatora E_p, jeśli między jego okładki wsuniemy dielektryk o stałej dielektrycznej ε_r?

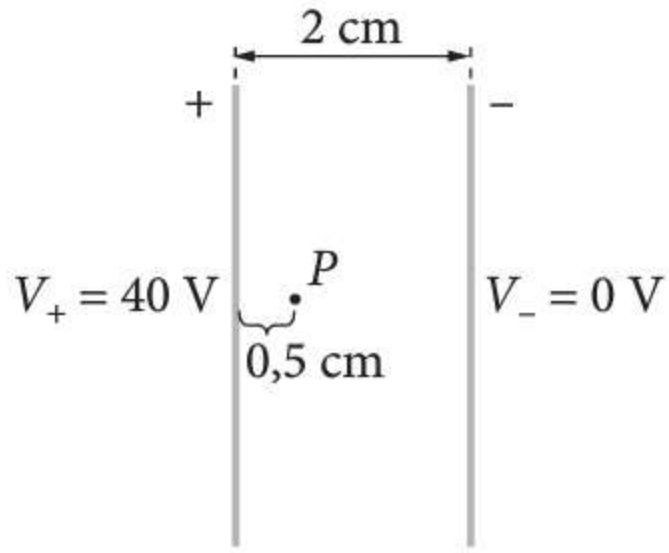
7. Płaski kondensator próżniowy jest podłączony do źródła napięcia U.
Odpowiedz na pytanie:
Jak zmienią się U, E, C, Q, E_p, jeśli między okładki wsuniemy dielektryk o stałej dielektrycznej ε_r?

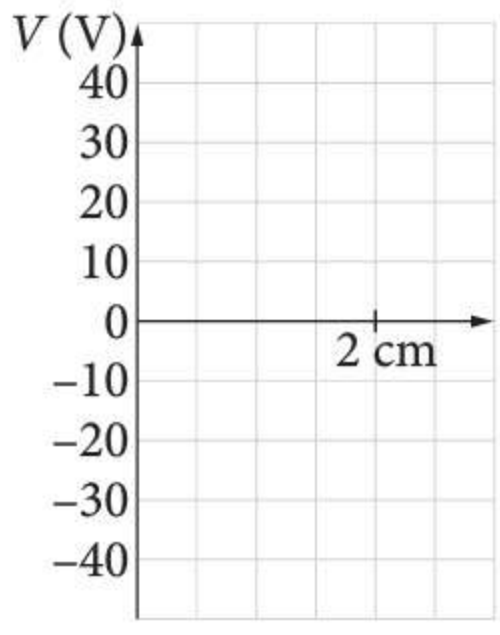
8. Rysunki 1 i 2 przedstawiają dwa naładowane kondensatory.

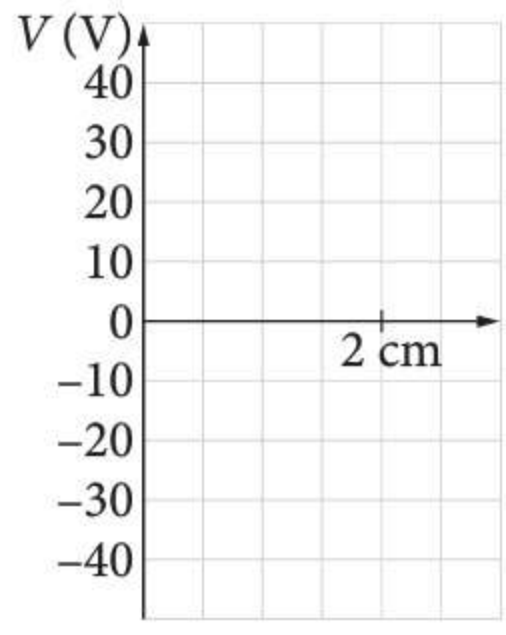
1.



2.





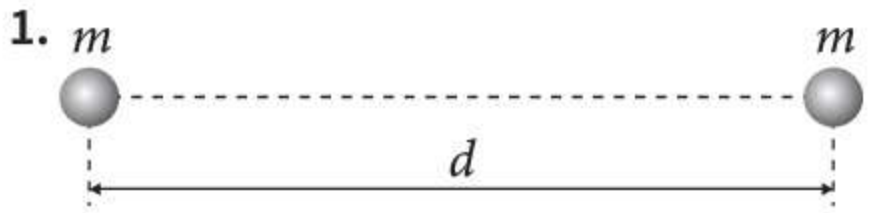


a) Dla obu przypadków narysuj w zeszycie wykresy potencjału wewnątrz kondensatora w zależności od odległości od okładki naładowanej dodatnio.

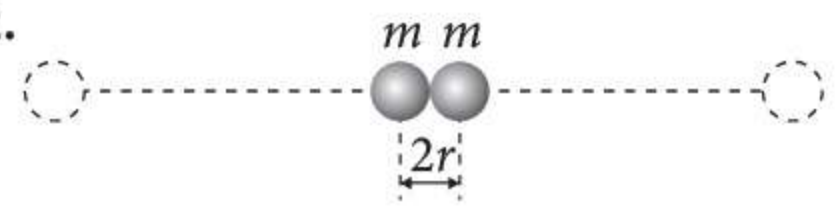
b) Oblicz potencjał w punkcie P, odległym o $0{,}5$ cm od okładki naładowanej dodatnio.

9. Dwie jednakowe kulki, początkowo spoczywające w odległości wzajemnej d (rys. 1), zbliżają się do siebie na skutek oddziaływania grawitacyjnego. Przyjmijmy całkowicie abstrakcyjne założenie, że na kulki nie działają żadne inne ciała. Masa każdej kulki wynosi m, a jej promień to r.

1.



2.



9.1. Wyraź odpowiednim wzorem grawitacyjną energię potencjalną układu kulek w stanie początkowym (rys. 1) i całkowitą energię mechaniczną tego układu tuż przed zderzeniem (rys. 2).

9.2. Skorzystaj z zapisanych wzorów i wyprowadź wzór na szybkość kulek tuż przed zderzeniem.

9.3. Nazwij prawo, z którego korzystasz.

9.4. Oblicz wartość liczbową szybkości kulek dla $d = 1$ m, $m = 1$ kg i $r = 5$ cm.

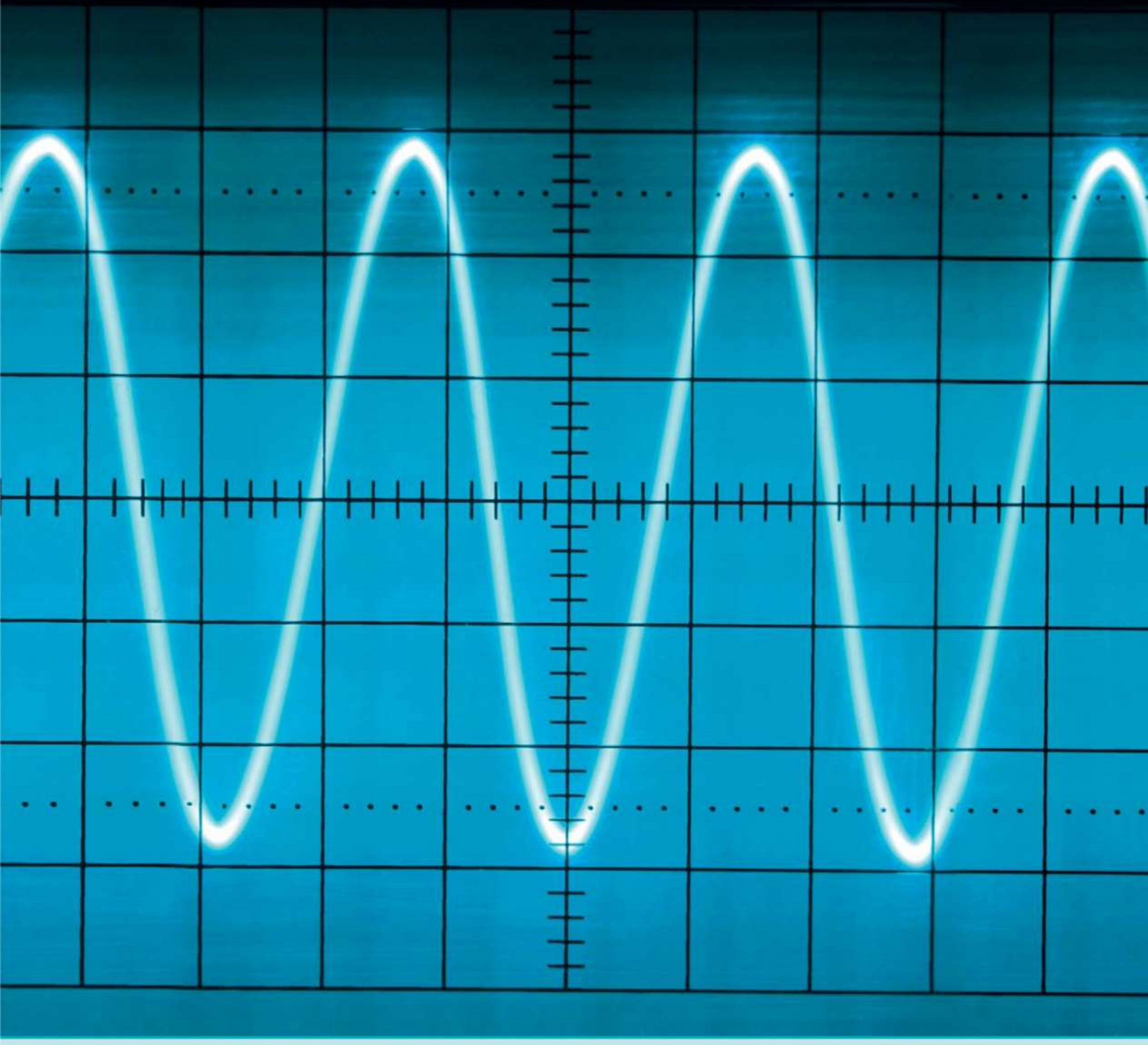
9.5. Jakim ruchem kulki zbliżały się do siebie?
Odpowiedz na powyższe pytanie. Uzasadnij odpowiedź – powołaj się na odpowiednią zasadę dynamiki.

9.6. Oblicz wartość liczbową minimalnej prędkości, którą należałoby nadać każdej ze stykających się kulek, aby oddaliły się do nieskończoności.

9.7. Napisz, jaki wniosek na temat oddziaływania grawitacyjnego wynika z faktu, że wartość prędkości jest taka mała.

9.8. Skorzystaj z analogii pól grawitacyjnego i elektrostatycznego oraz wyników uzyskanych w zadaniach 9.1 oraz 9.3 i oceń prawdziwość zdań. Wskaż P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Wartość siły oddziaływania elektrostatycznego ładunków nie zależy od ich znaków.	**P**	**F**
2.	Wartość bezwzględna różnicy energii potencjalnej elektronu i pozytonu (cząstki różniącej się od elektronu znakiem ładunku) znajdujących się we wzajemnej odległości d oraz energii potencjalnej dwóch elektronów lub dwóch pozytonów znajdujących się w takiej samej odległości jest równa $\frac{2ke^2}{d}$.	**P**	**F**
3.	Szybkość uzyskana w odległości $2r$ przez nieruchome początkowo cząstki – elektron i pozyton znajdujące się w odległości d od siebie – wyraża się wzorem: $v = \sqrt{\frac{ke^2}{m_e}\left(\frac{1}{2r} - \frac{1}{d}\right)}$.	**P**	**F**
4.	Szybkość elektronu i pozytonu w odległości $2r$ od siebie jest około 10^3 razy większa od szybkości każdej z kulek tuż przed zderzeniem.	**P**	**F**

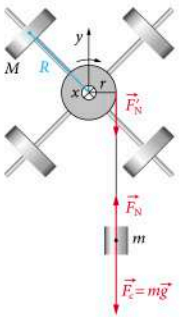


DOŚWIADCZENIA
NIEZBĘDNIK MATEMATYCZNY

Wartości niepewności pomiarowych występujących w doświadczeniach szacujemy zgodnie z zaleceniami zamieszczonymi w aneksie *Niepewności pomiarowe* w podręczniku do klasy pierwszej.

Doświadczenie 1. Badamy ruch ciał o różnych momentach bezwładności

W doświadczeniu opisanym w rozdziale 3 na s. 18–19 pokazano, że ciała o jednakowych masach, ale różnych momentach bezwładności, staczają się z równi pochyłej z różnymi przyspieszeniami kątowymi.
Za pomocą wahadła Oberbecka (schemat przyrządu pokazano na rys. 1) sprawdzimy, jak zmiana momentu bezwładności układu wpływa na jego ruch, a w szczególności na przyspieszenie kątowe. Do końcowych obliczeń konieczna jest znajomość momentu bezwładności wahadła, który wyznaczymy, korzystając z drugiej zasady dynamiki dla ruchu obrotowego.



Rys. 1

Spis przyrządów i materiałów: wahadło Oberbecka, ciężarek o masie $m = 100\ \mathrm{g}$, przymiar metrowy, suwmiarka, waga elektroniczna, stoper.

Przygotowanie teoretyczne
Przeanalizujemy ruch układu przedstawionego na rysunku 1. Na walcu (tulei wahadła) o promieniu r zawieszono na nierozciągliwej, cienkiej nici (o pomijalnie małej masie) ciężarek o masie m. Współczynnik tarcia statycznego nici o walec jest tak duży, że nić się po nim nie ślizga. Oś obrotu układu jest pozioma.

Wyprowadzimy wzór na wartość przyspieszenia kątowego wahadła Oberbecka. Równanie ruchu postępowego ciężarka i równanie ruchu obrotowego wahadła zapisane za pomocą współrzędnych wektorów w układzie x, y (oś x jest prostopadła do płaszczyzny rysunku i zwrócona pod rysunek) mają postać:

- dla ciężarka o masie m: $mg - F_N = ma$
- dla wahadła o momencie bezwładności J: $F'_N r = J\varepsilon$

Związek między wartościami przyspieszeń $\vec{\varepsilon}$ i $\vec{a}$ jest następujący:

$$\varepsilon = \frac{a}{r}$$

Ponieważ $F_{\mathrm{N}} = F'_{\mathrm{N}}$ (III zasada dynamiki), to:

$$mg - F_{\mathrm{N}} = ma$$

$$F_{\mathrm{N}} r = J\frac{a}{r}$$

Po rozwiązaniu układu równań otrzymujemy:

$$a = \frac{mgr^2}{mr^2 + J} \qquad \varepsilon = \frac{mgr}{mr^2 + J} \qquad F_{\mathrm{N}} = \frac{mgJ}{mr^2 + J}$$

Uwaga: W tym doświadczeniu wartość mr^2 jest przynajmniej o dwa rzędy wielkości mniejsza od momentu bezwładności wahadła $J = 4MR^2 + J_0$, więc możemy przyjąć, że:

$$a = \frac{mgr^2}{J} \tag{1}$$

$$\varepsilon = \frac{mgr}{J} \tag{2}$$

$$F_{\mathrm{N}} = \frac{mgJ}{J} = mg \tag{3}$$

Wahadło uzyskuje przyspieszenie kątowe dzięki działaniu momentu siły napięcia nici, ale z równania (3) wynika, że w rozważanym przypadku wartości sił napięcia nici i ciężaru obciążnika są w przybliżeniu równe. Wobec tego możemy uznać, że przyspieszenie kątowe nadaje wahadłu siła $\vec{F}_{\mathrm{c}} = m\vec{g}$, niezmieniająca się podczas doświadczenia.

Ciężarek porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym i przebywa drogę H w czasie t:

$$H = \frac{at^2}{2} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2H}{t^2}$$

Ponieważ $\varepsilon = \frac{a}{r}$, to:

$$\varepsilon = \frac{2H}{rt^2} \tag{4}$$

W doświadczeniu będziemy mierzyć kolejno czasy t_i, w których ciężarek przebywa drogę H przy różnych momentach bezwładności J_i wahadła.
Na podstawie tych pomiarów obliczymy wartości przyspieszeń kątowych ε_i ze wzoru (4) i sprawdzimy, czy iloczyny $\varepsilon_i J_i$ są jednakowe dla każdego z pomiarów.
W każdym przypadku moment bezwładności układu J_i to suma momentu bezwładności wahadła J_0 bez obciążników i momentu bezwładności $J_{\mathrm{R}i}$ czterech (zamocowanych na prętach) obciążników o jednakowej masie M.

$$J_{\mathrm{R}i} = 4MR_i^2$$

Całkowity moment bezwładności wahadła:

$$J_i = J_0 + J_{\mathrm{R}i} = J_0 + 4MR_i^2$$

Jeśli nie znamy momentu bezwładności J_0, należy go wyznaczyć przez wykonanie pomiarów czasu ruchu ciężarka m na drodze H dla wahadła bez obciążników. W tym celu skorzystamy ze wzorów (2) oraz (4) i wyrazimy J_0 jako:

$$J_0 = \frac{mgr^2t^2}{2H} \tag{5}$$

Kolejne etapy doświadczenia

1. **Wstępne pomiary i obliczenia**

- Za pomocą suwmiarki kilkakrotnie mierzymy średnicę walca D, na który nawinięta jest nić. Obliczamy $D_{\text{śr}}$, a następnie promień walca $r = \frac{D_{\text{śr}}}{2}$. Wyniki wykonywanych pomiarów i obliczeń zapisujemy w tabeli 1.
- Ustalamy drogę H (ok. $0{,}8\ \text{m}$), jaką przebywać będzie ciężarek podczas doświadczenia i za pomocą przymiaru metrowego kilkakrotnie ją mierzymy.
- Zakładamy, że fabrycznie wykonane obciążniki są jednakowe, więc mierzymy ich masę $4M$. Przyjmujemy, że $\Delta m = \Delta(4M)$ jest równa najmniejszej działce wagi.
- Obciążniki mocujemy na końcach ramion wahadła i kilkakrotnie mierzymy ich odległość R_1 od osi obrotu.
- Obliczamy J_1, wynik zapisujemy w tabeli 2.

Tabela 1

Nr	D (m)	$D_{\text{śr}}$ (m)	$r_{\text{śr}}$ (m)	H (m)	$H_{\text{śr}}$ (m)	R_1 (m)	$R_{1\text{śr}}$ (m)	R_2 (m)	$R_{2\text{śr}}$ (m)
1									
2									
3									
4									
5									
	ΔD (m)	$\Delta D_{\text{śr}}$ (m)	$\Delta r_{\text{śr}}$ (m)	ΔH (m)	$\Delta H_{\text{śr}}$ (m)	ΔR_1 (m)	$\Delta R_{1\text{śr}}$ (m)	ΔR_2 (m)	$\Delta R_{2\text{śr}}$ (m)

m (kg)	0,1	$4M$ (kg)	
Δm (kg)		$\Delta(4M)$ (kg)	

2. **Wyznaczanie przyspieszenia kątowego układu o momencie bezwładności J_1**

- Kilkakrotnie wykonujemy pomiar czasu t_1, w którym ciężarek na nitce przebywa drogę H. Wyniki zapisujemy w tabeli 2.
- Niepewność Δt ręcznego pomiaru czasu przy użyciu stopera o elementarnej działce $0{,}01\ \text{s}$ zależy w głównej mierze od czasu reakcji eksperymentatora; przyjmuje się, że $\Delta t = 0{,}2\ \text{s}$[31].
- Obliczamy wartość przyspieszenia kątowego ε_1.
- Niepewność wartości przyspieszenia kątowego obliczamy ze wzoru:

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{\Delta r}{r_{\text{śr}}} + \frac{\Delta H}{H_{\text{śr}}} + 2\frac{\Delta t}{t_{\text{śr}}}$$

[31] Można się przekonać, jaka jest wartość Δt, kilkakrotnie mierząc stoperem zadany przedział czasu, na przykład 3 s, a następnie obliczając średnie odstępstwo wykonanych pomiarów od wartości 3 s.

Tabela 2

Nr		t_i (s)	$t_{śr}$ (s)	Δt (s)	ε_i $(1/s^2)$	$\Delta\varepsilon_i$ $(1/s^2)$
1	odległość R_1 = (m)					
	J_1 = $(kg \cdot m^2)$					
	ΔJ_1 = $(kg \cdot m^2)$					
2	odległość R_2 = (m)					
	J_2 = $(kg \cdot m^2)$					
	ΔJ_2 = $(kg \cdot m^2)$					
3	wahadło bez obciążników					
	J_0 = $(kg \cdot m^2)$					
	ΔJ_0 = $(kg \cdot m^2)$					

3. Wyznaczanie przyspieszenia kątowego układu o momencie bezwładności J_2

- Mocujemy obciążniki w połowie długości ramion, przez co zmniejszamy moment bezwładności układu. Mierzymy odległości R_2 od osi obrotu i obliczamy J_2.
- Wykonujemy pomiar czasu t_2, w którym ciężarek przebywa drogę H.
- Obliczamy wartość przyspieszenia kątowego ε_2 oraz jej niepewność.

4. Wyznaczanie momentu bezwładności J_0

- W celu wyznaczenia J_0 zdejmujemy wszystkie obciążniki z ramion wahadła i kilkakrotnie wykonujemy pomiar czasu t_3, w którym ciężarek na nitce przebywa drogę H. Wyniki pomiarów t_3, obliczeń J_0 oraz ΔJ_0 zapisujemy w tabeli 2.
- Obliczamy niepewności pomiarowe:

$$\Delta J_i = \Delta J_0 + \Delta J_{Ri}$$

$$\frac{\Delta J_{Ri}}{J_{Ri}} = \frac{\Delta M}{M} + 2\frac{\Delta R_i}{R_i}$$

5. Opracowanie wyników

- Obliczamy i porównujemy iloczyny $\varepsilon_1 J_1$ i $\varepsilon_2 J_2$.
- Szacujemy niepewności $\Delta(\varepsilon_i J_i)$ metodą najmniej korzystnego przypadku (NKP):

$$\Delta(\varepsilon_i J_i) = \frac{1}{2}[(\varepsilon_i + \Delta\varepsilon_i)(J_i + \Delta J_i) - (\varepsilon_i - \Delta\varepsilon_i)(J_i - \Delta J_i)]$$

Jeśli nierówność:

$$|\varepsilon_1 J_1 - \varepsilon_2 J_2| \leqslant \Delta(\varepsilon_1 J_1) + \Delta(\varepsilon_2 J_2)$$

jest spełniona, to znaczy, że badane wielkości są równe w granicach niepewności pomiarowych.

- Analizujemy, które niepewności pomiarowe mają największy wpływ na całkowitą niepewność pomiaru.

Doświadczenie 2. Sprawdzamy zasadę zachowania momentu pędu

W celu sprawdzenia zasady zachowania momentu pędu układu ciał będziemy obserwować i badać ruch obrotowy układów ciał, których moment bezwładności ulega zmianie podczas ruchu.

Obserwacja ruchu obrotowego układu ciał, którego moment bezwładności ulega zmianie na skutek zmiany odległości elementów układu od osi obrotu

Spis przyrządów i materiałów: fotel obrotowy z oparciem, dwa hantle 2-kilogramowe (lub duże plastikowe butelki wypełnione wodą).

Kolejne etapy doświadczenia

- Osoba siedząca na fotelu trzyma hantle w wyprostowanych rękach.
- Druga osoba wprawia układ w ruch obrotowy; obserwujemy szybkość obrotu w czasie pokazu.
- Po wykonaniu dwóch obrotów osoba na fotelu szybkim ruchem zbliża hantle do klatki piersiowej i po kolejnych dwóch obrotach ponownie rozprostowuje ramiona.
- Zapisujemy wynik obserwacji i wypływający z niej wniosek.

Obserwacja ruchu obrotowego układu ciał podczas zmiany momentu pędu jednego z elementów układu

Spis przyrządów i materiałów: fotel obrotowy z oparciem, masywne koło z osią obrotu stanowiącą jednocześnie uchwyt.

Kolejne etapy doświadczenia

- Osobie siedzącej w obrotowym fotelu podajemy wirujące koło, którego oś jest ustawiona pionowo. Przytrzymujemy równocześnie fotel, *by pozostawał nieruchomy*.
- Uwalniamy fotel tak, by mógł się swobodnie obracać.
- Osoba siedząca w fotelu obraca oś obrotu koła o 180°.
- Obserwujemy ruch obrotowy fotela.
- Odpowiedz na poniższe pytania.
  - Jakie są kierunek i zwrot wektora momentu pędu układu osoba–fotel–koło na początku doświadczenia?
  - Jak zmienił się wektor momentu pędu koła po jego obrocie o 180°?
  - Jakie są kierunek i zwrot momentu pędu fotela z człowiekiem?
  - Jaką wartość musi mieć moment pędu człowieka z fotelem, żeby całkowity moment pędu układu osoba–fotel–koło nie uległ zmianie?



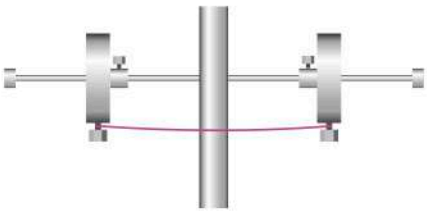
Rys. 2

Doświadczenie

Spis przyrządów i materiałów: wahadło Oberbecka, stoper, mocna nitka, zapałki.

Kolejne etapy doświadczenia

- Z tulei wahadła Oberbecka usuwamy dwa przeciwległe ramiona i montujemy ją do statywu tak, żeby oś obrotu układu była pionowa.
- Na dwa pozostałe ramiona nasuwamy pierścienie blokujące i obciążniki, które blokujemy w połowie długości prętów. Na końcach ramion umieszczamy nakrętki, a dla ułatwienia obserwacji na jeden z obciążników naklejamy kolorowy znacznik.
- Do poluzowanych śrub mocujących obciążniki przywiązujemy nitkę (rys. 3), by w pierwszej fazie doświadczenia przytrzymywała je w początkowym położeniu.



Rys. 3

- Trzykrotnie mierzymy odległości R_1 środków obciążników od osi obrotu. Wyniki pomiarów wpisujemy do tabeli.
- Układ wprawiamy w ruch obrotowy. Mierzymy kilkakrotnie czas trwania kilku (na przykład trzech) kolejnych obrotów, aby określić rodzaj tego ruchu. Zatrzymujemy układ.
- Ponownie wprawiamy układ w ruch i mierzymy czas t_1 trwania pięciu kolejnych obrotów.
- Bez zatrzymywania przyrządu przepalamy nitkę i ponownie mierzymy czas t_2 trwania pięciu obrotów.
- Zatrzymujemy przyrząd i trzykrotnie mierzymy odległości R_2 środków obciążników od osi obrotu.

Przed przepaleniem nitki					Po przepaleniu nitki						
t_1	$T_1 = \frac{t_1}{5}$	R_1	$R_{1śr}$	ΔR_1	t_2	$T_2 = \frac{t_2}{5}$	R_2	$R_{2śr}$	ΔR_2	Δt	$\Delta T = \frac{\Delta t}{5}$

- Dla obu przypadków wykonujemy obliczenia czasu trwania jednego obrotu T_i oraz odległości $R_{iśr}$ i przystępujemy do sprawdzenia zasady zachowania momentu pędu $\vec{L}$. Podczas doświadczenia kierunek obrotu wahadła i położenie osi obrotu nie uległy zmianie, więc kierunek i zwrot momentu pędu również się nie zmieniły.

- Aby sprawdzić słuszność zasady zachowania momentu pędu, trzeba porównać wartości wektorów momentu pędu układu przed przepaleniem nici i po jej przepaleniu. Jeśli przyjmiemy, że nasz układ to dwa punkty o masach m odległych o R od osi obrotu, to:

$$L_1 = 2mR_1^2\frac{2\pi}{T_1} \qquad \text{a} \qquad L_2 = 2mR_2^2\frac{2\pi}{T_2}$$

- Należy sprawdzić, czy $L_1 = L_2$, czyli czy:

$$\frac{R_1^2}{T_1} = \frac{R_2^2}{T_2}$$

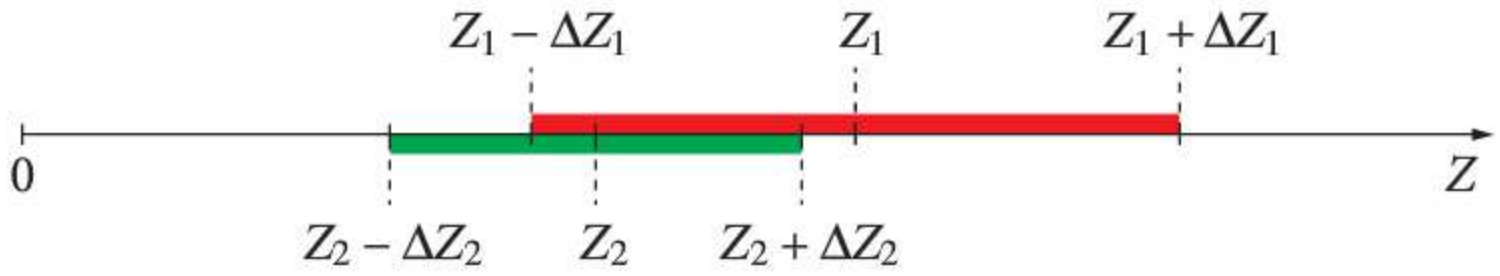
- Porównywane wielkości obarczone są niepewnościami pomiarowymi, które należy oszacować.
  Niepewność ΔR_i szacujemy według wzoru: $\Delta R_i = \max|R_i - R_{i\text{śr}}|$.
  Niepewność $\Delta t = 0{,}2\ \text{s}$ (patrz uwaga do doświadczenia 1).
  Oznaczamy porównywane wielkości jako Z_1 i Z_2: $Z_1 = \frac{R_1^2}{T_1}$, $Z_2 = \frac{R_2^2}{T_2}$.
  Wielkości Z_1 i Z_2 są równe w granicach niepewności pomiarowych, jeśli spełniony jest warunek:

$$|Z_1 - Z_2| \leqslant \Delta Z_1 + \Delta Z_2$$

  Niepewność ΔZ_i szacujemy metodą NKP:

$$\Delta Z_i = \Delta\left(\frac{R_i^2}{T_i}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{(R_i + \Delta R_i)^2}{T_i - \Delta T_i} - \frac{(R_i - \Delta R_i)^2}{T_i + \Delta T_i}\right]$$

- Na osi Z rysujemy przedziały $Z_1 \pm \Delta Z_1$ oraz $Z_2 \pm \Delta Z_2$ i sprawdzamy, jak dalece te przedziały zachodzą na siebie.



- Co oznacza fakt, że przedziały mają część wspólną?
- Co oznacza fakt, że przedziały są rozłączne? Jakie mogą być tego przyczyny?

Doświadczenie 3. Badamy wydłużenie sprężyny

Spis przyrządów i materiałów: statyw, sprężyna, co najmniej cztery obciążniki o jednakowej masie (np. $50\ \text{g}$), linijka.

Kolejne etapy doświadczenia

- Na statywie wieszamy sprężynę i mierzymy linijką jej długość początkową l_0. Aby ułatwić pomiar, linijkę mocujemy na statywie, a do końców sprężyny przyklejamy wskazówki wykonane np. z tektury (rys. 4). Szacujemy niepewność Δl_0. Jako niepewność odczytu położenia wskazówki na skali linijki przyjmujemy wartość jej działki elementarnej. Gdy mierzymy długość sprężyny, na skali odczytujemy położenia obu jej końców, więc jako niepewność długości sprężyny przyjmujemy podwojoną wartość niepewności odczytu położenia wskazówki.



Rys. 4

- Na sprężynie kolejno zawieszamy obciążniki o masie m, $2m$, $3m$, $4m$ i $5m$. Każdorazowo mierzymy długość l sprężyny po obciążeniu. Obliczamy:

$$x = l - l_0$$

oraz wartość F ciężaru dla każdego obciążenia.
Szacujemy niepewności Δl, Δm i Δx.
Wyniki pomiarów i obliczeń wpisujemy do tabeli.
Wskazówka:

$$\Delta x = \Delta l_0 + \Delta l$$

Jeśli używamy precyzyjnie, fabrycznie wykonanych jednakowych obciążników, których masa (np. 50 g) jest podana przez producenta, możemy założyć, że masy obciążników są rzeczywiście jednakowe, a ich niepewność względna jest mała w porównaniu z niepewnościami wielkości mierzonych w warunkach szkolnych. W takim przypadku do celów szacunkowych możemy niepewność masy pominąć.
Uwaga: Zastanów się, jak można sprawdzić słuszność przyjętego założenia. Jak oszacować niepewność Δm, jeśli okaże się, że przyjęte założenie jest bezzasadne dla użytych obciążników? Czy doświadczenie można wykonać, jeśli dysponuje się obciążnikami o różnej masie?

l_0 (cm)	Nr pomiaru	m (kg)	$F = mg$ (N)	l (cm)	Δl (cm)	$x = l - l_0$ (cm)	Δx (cm)
	1						
	2						
	3						
	...						

- Sporządzamy na papierze milimetrowym wykres zależności wydłużenia x sprężyny od wartości F siły obciążającej.
  - W układzie współrzędnych F, x zaznaczamy punkty pomiarowe wraz z odcinkami niepewności Δx.
  - Jeżeli pomiary wykonaliśmy dostatecznie starannie, zaobserwujemy, że punkty pomiarowe ułożyły się wzdłuż prostej. Do punktów pomiarowych dopasowujemy prostą przechodzącą przez początek układu współrzędnych (uzasadnij dlaczego).



- Otrzymana zależność $x(F)$ – linia prosta – świadczy o tym, że wydłużenie sprężyny jest wprost proporcjonalne do wartości siły ją rozciągającej.

$$x \sim F$$

Uwaga:

1. Jeśli użyjemy dostatecznie dużej liczby odważników, ostatnie punkty na wykresie, odpowiadające największym masom m, nie będą układały się wzdłuż linii prostej. Zastanów się, jaka jest tego przyczyna. Zaznacz na wykresie zakres wartości siły, dla którego wydłużenie jest do niej proporcjonalne (zastanów się, co to oznacza).
2. Czy można nadać fizyczną interpretację fragmentowi prostej dla ujemnych wartości x oraz F?
3. Na podstawie wyników wykonanych pomiarów można wyznaczyć współczynnik sprężystości sprężyny użytej w doświadczeniu (patrz zadanie 3 na s. 185).

Doświadczenie 4. Badamy zależność okresu drgań ciężarka od jego masy i współczynnika sprężystości sprężyny

W przykładzie 24.4 pokazaliśmy, że zawieszony na sprężynie o współczynniku sprężystości k ciężarek o masie m porusza się ruchem harmonicznym, a kwadrat okresu drgań w ruchu harmonicznym jest dla stałego k wprost proporcjonalny do masy m ciężarka, zaś dla stałej masy odwrotnie proporcjonalny do k:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k}m = am = b\frac{1}{k}$$

gdzie: $a = \frac{4\pi^2}{k}$, $b = 4\pi^2 m$.

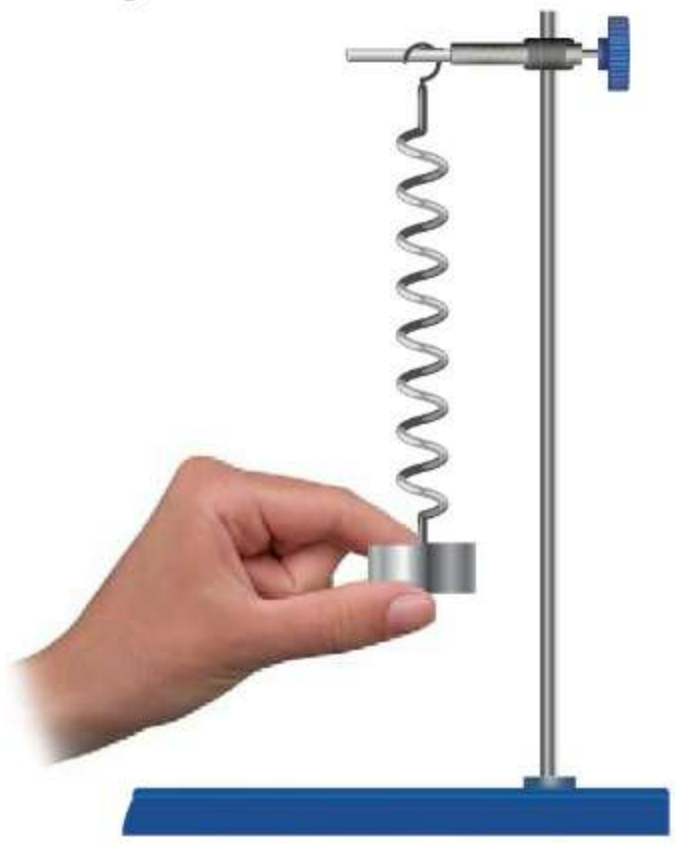
Zbadamy zależność okresu T drgań zawieszonego na sprężynie ciężarka od jego masy m i od współczynnika sprężystości k sprężyny. Sprawdzimy w ten sposób, czy powyższy wzór dobrze opisuje tę zależność – czy ciężarek zawieszony na sprężynie porusza się ruchem harmonicznym.

Spis przyrządów i materiałów: kilka sprężyn o różnych, znanych współczynnikach sprężystości (podanych przez producenta), cztery ciężarki (każdy o masie m_0 wynoszącej np. $50\ \mathrm{g}$), statyw laboratoryjny, stoper.
Uwaga: Jeśli nie znasz współczynników sprężystości sprężyn, możesz je wyznaczyć w sposób opisany w doświadczeniu *Badamy wydłużenie sprężyny*.

Badanie zależności okresu drgań ciężarka od jego masy

Kolejne etapy doświadczenia

- Jedną ze sprężyn zawieszamy na statywie. Na sprężynie zawieszamy ciężarek o masie $m = m_0$. Trzymając za ciężarek, naciągamy lekko sprężynę, czyli wyprowadzamy ją z początkowego stanu równowagi, a następnie puszczamy. Ciężarek porusza się ruchem drgającym o okresie T.
- Stoperem mierzymy czas t trwania dziesięciu kolejnych pełnych wahnięć ciężarka, czyli sumę dziesięciu kolejnych okresów drgań. Szacujemy niepewność Δt pomiaru czasu t. Pomiar powtarzamy kilkakrotnie, a wyniki wraz z niepewnościami wpisujemy do tabeli.



Rys. 5

Masa m (kg)	Nr pomiaru	$t \pm \Delta t$ (s)	$t_{śr} \pm \Delta t_{śr}$ (s)	$T \pm \Delta T$ (s)	$T^2 \pm \Delta(T^2)$ (s^2)
	1				
	2				
	...				
	1				
	2				
	...				
	1				
	2				
	...				
	1				
	2				
	...				

- Obliczamy średnią wartość $t_{śr}$ czasu trwania dziesięciu wahnięć oraz szacujemy niepewność $\Delta t_{śr}$.
- Obliczamy wartość okresu $T \pm \Delta T$ drgań ciężarka:

$$T = \frac{t_{śr}}{10} \qquad \Delta T = \frac{\Delta t_{śr}}{10}$$

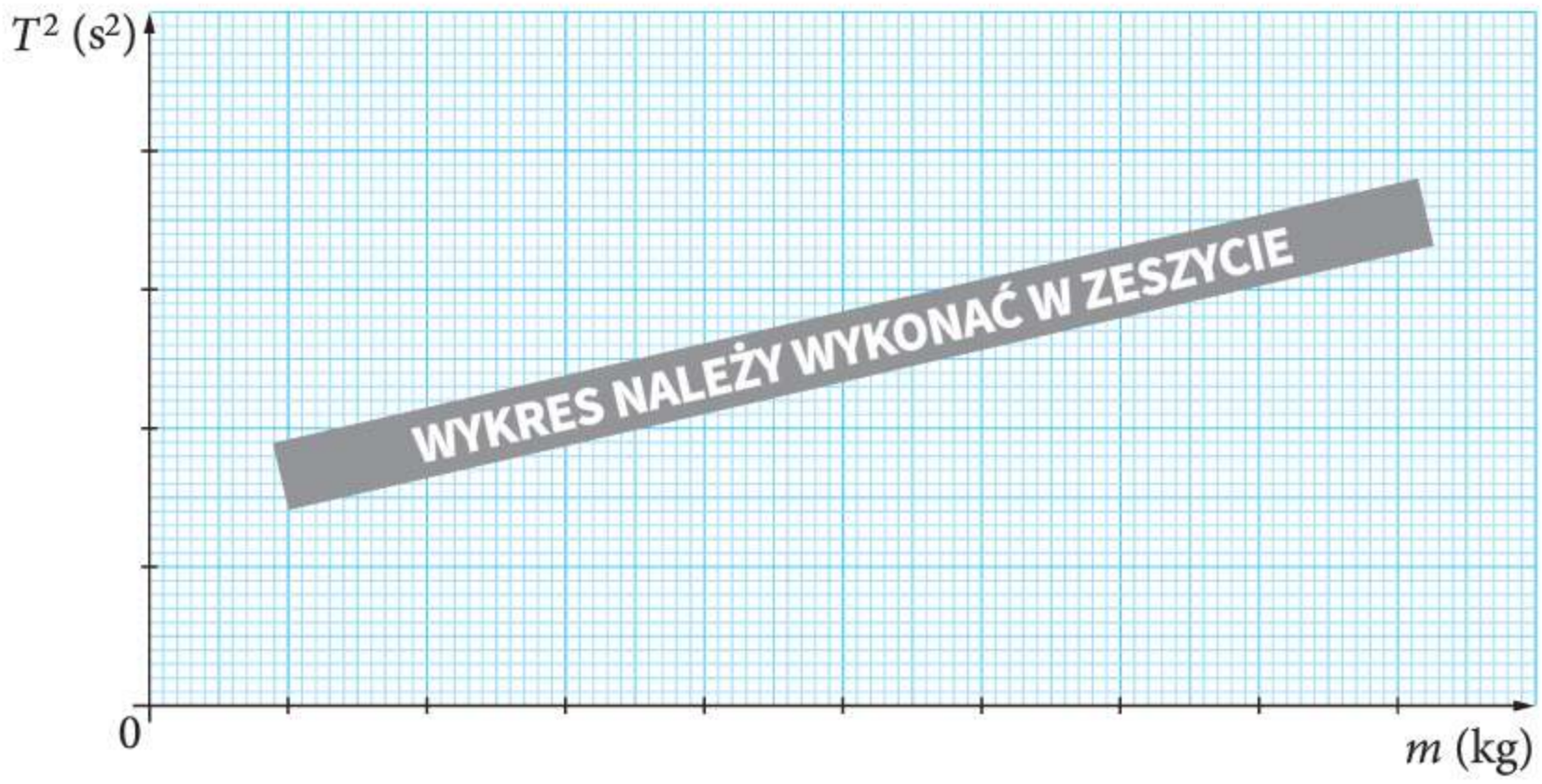
- Pomiar powtarzamy z zawieszanymi kolejno na sprężynie dwoma, trzema i czterema ciężarkami (odpowiednio dla mas $m = 2m_0$, $m = 3m_0$ i $m = 4m_0$).
Wskazówka: Jeśli w doświadczeniu używamy ciężarków wykonanych fabrycznie, możemy założyć, że niepewność względna podanej przez producenta masy ciężarków jest mała w porównaniu z niepewnościami wielkości mierzonych w doświadczeniu, zatem do celów szacunkowych możemy ją pominąć.

Uwaga: Zastanów się, jak można sprawdzić słuszność przyjętego założenia. Jak oszacować niepewność Δm, jeśli okaże się, że przyjęte założenie jest bezzasadne dla użytych obciążników? Czy doświadczenie można wykonać, jeśli dysponuje się obciążnikami o różnej masie?

- Otrzymane wartości okresu drgań $T \pm \Delta T$ ciężarków zawieszonych na sprężynie przedstawiamy w układzie współrzędnych m, T.



- Do otrzymanych punktów pomiarowych dopasowujemy gładką krzywą (czyli prowadzimy ją tak, by przechodziła możliwie najbliżej wszystkich punktów pomiarowych).
- Obserwujemy, **jaki charakter ma zależność okresu T drgań od masy m zawieszonych na sprężynie ciężarków** otrzymana na wykresie **– czy jest funkcją rosnącą czy malejącą, liniową czy nieliniową**.
- Dla kolejnych wartości $T \pm \Delta T$ obliczamy T^2, szacujemy niepewność $\Delta(T^2) = 2T\Delta T$ i wpisujemy do tabeli.
- Otrzymane wartości $T^2 \pm \Delta(T^2)$ przedstawiamy w układzie współrzędnych m, T^2.



- Graficznie dopasowujemy prostą do punktów pomiarowych. Oceniamy, czy prosta dobrze oddaje zależność $T^2 = am$. Jeśli tak, to możemy stwierdzić, że przeprowadzone pomiary potwierdzają proporcjonalność kwadratu okresu drgań ciężarka do jego masy.

Badanie zależności okresu drgań ciężarka od współczynnika sprężystości sprężyny

Kolejne etapy doświadczenia

- Sprężynę o najmniejszym współczynniku sprężystości zawieszamy na statywie. Na sprężynie zawieszamy ciężarek o masie $m = m_0$. Trzymając za ciężarek, naciągamy lekko sprężynę, czyli wyprowadzamy ją z początkowego stanu równowagi, a następnie puszczamy. Ciężarek porusza się ruchem drgającym o okresie T.
- Stoperem mierzymy czas t trwania dziesięciu kolejnych pełnych wahnięć ciężarka, czyli sumę dziesięciu kolejnych okresów drgań. Szacujemy niepewność Δt pomiaru czasu t. Pomiar powtarzamy kilkakrotnie, a wyniki wraz z niepewnościami wpisujemy do tabeli.

$k \pm \Delta k$ (g/s^2)	Nr pomiaru	$t \pm \Delta t$ (s)	$t_{śr} \pm \Delta t_{śr}$ (s)	$T \pm \Delta T$ (s)	$T^2 \pm \Delta(T^2)$ (s^2)	$\frac{1}{k} \pm \Delta\left(\frac{1}{k}\right)$ (s^2/g)
	1					
	2					
	...					
	1					
	2					
	...					
	1					
	2					
	...					
	1					
	2					
	...					

- Pomiar powtarzamy dla pozostałych sprężyn.
- Obliczamy wartości $t_{śr} \pm \Delta t_{śr}$ oraz $T \pm \Delta T$.
- Otrzymane wartości okresu drgań $T \pm \Delta T$ ciężarków zawieszonych na sprężynie przedstawiamy w układzie współrzędnych k, T. Zastanów się, czy niepewność Δk można pominąć, jeśli w doświadczeniu użyto sprężyn o współczynnikach sprężystości podanych przez producenta.
- Do otrzymanych punktów pomiarowych dopasowujemy gładką krzywą.
- Obserwujemy, **jaki charakter ma zależność okresu T drgań od wartości współczynnika sprężystości k** otrzymana na wykresie **– czy jest funkcją rosnącą czy malejącą, liniową czy nieliniową**.
- Dla kolejnych wartości $T \pm \Delta T$ obliczamy T^2, szacujemy niepewność $\Delta(T^2)$ i wpisujemy do tabeli.
- Obliczamy wartości $\frac{1}{k}$ i wpisujemy do tabeli.

- Otrzymane wartości przedstawiamy w układzie współrzędnych $\frac{1}{k}$, T^2.
- Graficznie dopasowujemy prostą do punktów pomiarowych. Oceniamy, czy prosta dobrze oddaje zależność $T^2 = b\frac{1}{k}$. Jeśli tak, to możemy stwierdzić, że przeprowadzone pomiary potwierdzają, że kwadrat okresu drgań ciężarka jest odwrotnie proporcjonalny do współczynnika sprężystości sprężyny.
- Podsumowując, możemy stwierdzić, że:

$$T^2 \sim \frac{m}{k} \quad \text{a więc} \quad T \sim \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Doświadczenie 5. Wyznaczamy wartość przyspieszenia ziemskiego za pomocą wahadła

Okres drgań T wahadła matematycznego zależy od jego długości l oraz od wartości przyspieszenia ziemskiego (wzór 26.1). Na podstawie pomiaru okresu drgań i długości wahadła możemy więc wyznaczyć wartość przyspieszenia ziemskiego.
W doświadczeniu użyjemy wahadła składającego się z małej metalowej kulki zawieszonej na sznurku o długości ok. $2\ \mathrm{m}$. Średnica kulki jest mała w porównaniu z długością wahadła, więc w naszym doświadczeniu wystarczająco dobrym przybliżeniem opisującym ruch takiego wahadła jest opis ruchu wahadła matematycznego.

Spis przyrządów i materiałów: cienki sznurek lub mocna nitka o długości ok. $2\ \mathrm{m}$, metalowa kulka o średnicy $2–3\ \mathrm{cm}$ z haczykiem, stoper, taśma miernicza, suwmiarka.

Kolejne etapy doświadczenia

- Do haczyka kulki przywiązujemy nitkę – w ten sposób powstaje wahadło.
- Zawieszamy wahadło tak, aby mogło się swobodnie poruszać.
- Mierzymy kilkakrotnie długość wahadła $l \pm \Delta l$ (od miejsca zawieszenia do środka masy kulki) i obliczamy wartość średnią $l_{\text{śr}} \pm \Delta l_{\text{śr}}$.
  Jeśli dysponujemy suwmiarką, możemy wyznaczyć długość wahadła jako sumę długości nitki (zmierzonej linijką) i połowy średnicy (czyli promienia) kulki (zmierzonej suwmiarką). Przy szacowaniu niepewności długości wahadła możemy w tym przypadku pominąć niepewność pomiaru średnicy kulki (uzasadnij dlaczego).
- Odchylamy wahadło od pionu o mały kąt (do 10°) i puszczamy. Wahadło wykonuje drgania.
- Stoperem mierzymy czas t dziesięciu pełnych wahnięć. Pomiar powtarzamy kilkakrotnie.

Nr pomiaru	l (m)	Δl (m)	$L = l_{\text{śr}}$ (m)	$\Delta L = \Delta l_{\text{śr}}$ (m)	t (s)	Δt (s)	$t_{\text{śr}}$ (s)	$\Delta t_{\text{śr}}$ (s)
1								
2								
...								

- Szacujemy niepewności $\Delta l_{\text{śr}}$, Δt i $\Delta t_{\text{śr}}$.

- Obliczamy okres drgań wahadła $T = \frac{t_{\text{śr}}}{10}$ oraz niepewność $\Delta T = \frac{\Delta t_{\text{śr}}}{10}$.
- Obliczamy wartość przyspieszenia ziemskiego g:

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$$

- Szacujemy niepewność Δg:

$$\Delta g = \frac{g_{\max} - g_{\min}}{2} = 2\pi^2 \left(\frac{L + \Delta L}{(T - \Delta T)^2} - \frac{L - \Delta L}{(T + \Delta T)^2} \right)$$

  i podajemy wynik pomiaru $g \pm \Delta g$.
- Zastanów się, jakie czynniki wpływają na wartość niepewności pomiarowej Δg oraz jak można ją zmniejszyć.
- Sprawdzamy, czy wyznaczona wartość g jest zgodna (w granicach niepewności pomiarowej) ze średnią wartością przyspieszenia ziemskiego dla Polski $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$.

Doświadczenie 6. Demonstrujemy zjawisko rezonansu mechanicznego

To powszechne zjawisko zademonstrujemy na dwóch przykładach: rezonansu akustycznego i rezonansu wahadeł. Doświadczenia pozwolą na sformułowanie warunków koniecznych do wystąpienia tego zjawiska.

Rezonans akustyczny

Spis przyrządów i materiałów: dwa kamertony, młoteczek, opaska odstrajająca. Dodatkowo przydatny jest komputer z kartą dźwiękową, mikrofonem i zainstalowanym programem Soundcard Oscilloscope (dostępnym na stronie www.zeitnitz.eu/scope_en).

Kolejne etapy doświadczenia

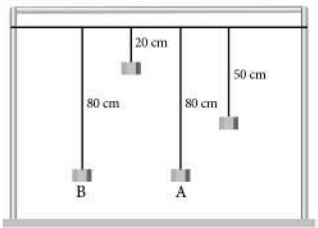
- Ustawiamy kamertony w odległości ok. $2\ \text{cm}$ otworami pudeł rezonansowych skierowanymi ku sobie.
- Uruchamiamy program Soundcard Oscilloscope i ustawiamy mikrofon w pobliżu otworów.
- Uderzamy młoteczkiem w widelec prawego kamertonu – słyszymy donośny dźwięk, a na oscyloskopie pojawia się obraz drgań. Dobieramy wzmocnienia na osiach x i y tak, by jak najdokładniej odczytać amplitudę i częstotliwość drgań. Z czasem obserwujemy stopniowe zmniejszanie się amplitudy drgań.
- Czy objęcie dłonią widelca prawego kamertonu powoduje całkowity zanik dźwięku?
- Wyciszamy oba kamertony i ponownie uderzamy młoteczkiem widelec prawego kamertonu. Zapamiętujemy głośność dźwięku, a następnie chwytamy za widelec i zabieramy prawy kamerton ze stołu. Czy dźwięk zaniknął? Jak zmienił się obraz na oscyloskopie? Notujemy wyniki obserwacji.
- Ponownie ustawiamy prawy kamerton na miejscu, tym razem chwytamy za widelec lewy kamerton i go usuwamy. Czy dźwięk jest nadal słyszalny? Jak zmienił się obraz na oscyloskopie?
- Wyciszamy drgania obu kamertonów, a następnie na widelcu lewego umieszczamy nakładkę odstrajającą.
- Powtarzamy doświadczenie, zapisujemy wyniki i formułujemy wnioski.

Rezonans wahadeł

Spis przyrządów i materiałów: cztery ciężarki $50\ \mathrm{g}$ (lub duże nakrętki), cienki, nierozciągliwy sznurek („szpagat"), przymiar metrowy, rama laboratoryjna lub mocno naprężony sznurek rozciągnięty między haczykami we framudze drzwi, stoper.

Kolejne etapy doświadczenia

- Na mocno naprężonym poziomo sznurku, rozpiętym na ramie laboratoryjnej, zawieszamy mniej więcej co $10\ \mathrm{cm}$ wahadła o długościach $80\ \mathrm{cm}$, $20\ \mathrm{cm}$, $80\ \mathrm{cm}$ i $50\ \mathrm{cm}$ (rys. 6).



Rys. 6

- Kilkakrotnie mierzymy długość l każdego z nich i wyniki zapisujemy w tabeli 1.
- Obliczamy wartości średnie $l_{i\acute{s}r}$ oraz określamy niepewności pomiarowe Δl_i jako $\Delta l_i = \max|l_i - l_{i\acute{s}r}|$.

Tabela 1

Nr pomiaru	$l_{80\mathrm{A}}$ (cm)	l_{20} (cm)	$l_{80\mathrm{B}}$ (cm)	l_{50} (cm)
1				
2				
3				
4				
———	$l_{80\mathrm{A}\acute{s}r} =$	$l_{20\acute{s}r} =$	$l_{80\mathrm{B}\acute{s}r} =$	$l_{50\acute{s}r} =$
———	$\Delta l_{80\mathrm{A}\acute{s}r} =$	$\Delta l_{20\acute{s}r} =$	$\Delta l_{80\mathrm{B}\acute{s}r} =$	$\Delta l_{50\acute{s}r} =$

- Wychylamy z położenia równowagi jedno z wahadeł o długości $80\ \mathrm{cm}$ (wahadło A) i obserwujemy zachowanie pozostałych.
- Zatrzymujemy ruch wszystkich wahadeł, a następnie uruchamiamy wahadło o długości $50\ \mathrm{cm}$ i obserwujemy zachowanie pozostałych.
- Kilkakrotnie mierzymy czas trwania dziesięciu wahnięć t_{80} wahadeł o długości $80\ \mathrm{cm}$ (A i B) oraz t_{20} wahadła o długości $20\ \mathrm{cm}$. Wyniki wpisujemy do tabeli 2.
- Aby przekonać się, czy okres drgań wahadła zależy od amplitudy jego drgań, powtarzamy pomiary czasu trwania dziesięciu wahnięć $t'_{80\mathrm{A}}$ po wychyleniu wahadła A w przybliżeniu o $15\ \mathrm{cm}$ z położenia równowagi i wahadła B wychylonego tylko o $7\ \mathrm{cm}$.

Tabela 2

Nr pomiaru	t_{80A} (s)	t_{20} (s)	t_{80B} (s)	t'_{80A} (s) amplituda 15 cm	t'_{80B} (s) amplituda 7 cm
1					
2					
3					
4					
———	$t_{80Aśr} =$	$t_{20śr} =$	$t_{80Bśr} =$	$t'_{80Aśr} =$	$t'_{80Bśr} =$
———	$T_{80Aśr} =$	$T_{20śr} =$	$T_{80Bśr} =$	$T'_{80Aśr} =$	$T'_{80Bśr} =$

- Obliczamy średnie okresy drgań T wahadeł ze wzoru $T_i = \frac{t_i}{10}$.
- Niepewność ręcznego pomiaru czasu przy użyciu stopera przyjmujemy jako $\Delta t = 0{,}2\ \mathrm{s}$ (patrz s. 330).
- Porównujemy okresy drgań obu wahadeł o długości $80\ \mathrm{cm}$ i sprawdzamy, czy okres drgań zależy od amplitudy ruchu wahadła.
- Analizujemy wyniki doświadczeń z kamertonami oraz wahadłami i formułujemy warunek konieczny do wystąpienia rezonansu.
- Na podstawie wyników dla wahadeł o długości $20\ \mathrm{cm}$ i $80\ \mathrm{cm}$ sprawdzamy słuszność proporcji:

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{l_1}{l_2}} = \frac{1}{2}$$

Doświadczenie 7. Badamy proces wyrównywania temperatur ciał

Średnie energie kinetyczne cząsteczek ciał o różnych temperaturach są różne. Wzajemny kontakt takich ciał prowadzi do wyrównania ich temperatur wskutek przekazywania energii kinetycznej poprzez zderzenia cząsteczek. Celem doświadczenia jest obserwacja tego procesu.

Spis przyrządów i materiałów: kalorymetr, dwa termometry laboratoryjne A i B, małe, cienkościenne naczynie aluminiowe o pojemności $100\ \mathrm{ml}$ (np. pół małej aluminiowej puszki po napoju) z trzema otworkami przy górnej krawędzi, kawałek cienkiego sznurka o długości ok. $0{,}5\ \mathrm{m}$, czajnik elektryczny, stoper, waga elektroniczna, cienki plaster korka.



Rys. 7

Kolejne etapy doświadczenia

- Ważymy naczynie wewnętrzne kalorymetru i wyznaczamy jego masę $m_k \pm \Delta m_k$. Wyniki wykonywanych pomiarów masy wpisujemy do tabeli 1. Jako niepewność Δm pomiarów prostych masy przyjmujemy wartość działki elementarnej wagi.

Tabela 1

m_k (kg)	m_1 (kg)	m_n (kg)	m_2 (kg)

- Na spodzie wewnętrznego naczynia kalorymetrycznego przyklejamy korek i ustawiamy je na wadze. Wagę tarujemy, a następnie nalewamy do naczynia wodę o masie $m_1 = 0{,}080\ \text{kg}$ i temperaturze pokojowej.
- W naczyniu kalorymetrycznym zanurzamy termometr A i odczytujemy temperaturę t_{A0}. Wyniki wykonywanych pomiarów temperatury wpisujemy do tabeli 2. Jako niepewność Δt pomiarów prostych temperatury przyjmujemy wartość działki elementarnej użytych termometrów.
- Wewnętrzne naczynie kalorymetru wkładamy do zewnętrznego, żeby uniknąć wymiany ciepła z otoczeniem.
- Mierzymy masę m_n małego naczynia. Przez otwory przewlekamy sznurek i formujemy uchwyt. Małe naczynie ustawiamy na wadze, wagę tarujemy, a następnie nalewamy do naczynia gorącą wodę o masie $m_2 = 0{,}080\ \text{kg}$; zanurzamy termometr B i odczytujemy temperaturę t_{B0}.
- Zanurzamy małe naczynie wraz z termometrem B w naczyniu kalorymetrycznym.
- Co minutę odczytujemy wskazania obu termometrów t_{Ai}, t_{Bi} i zapisujemy te wartości w tabeli 2.
- Prowadzimy pomiary do chwili wyrównania się temperatur $t_A = t_B = t$.
- Obliczamy i porównujemy zmiany temperatur δt_A i δt_B.

Uwaga: Przed każdym pomiarem temperatury należy zamieszać wodę termometrem.

Tabela 2

Nr pomiaru	0	1	2	3	4	5	6	7	8
t_{Ai}									
$\delta t_A = t_{Ai+1} - t_{Ai}$									
t_{Bi}									
$\delta t_B = t_{Bi} - t_{Bi+1}$									
$\Delta(\delta t_A) = \Delta(\delta t_B) = 2\Delta t$									

- Podczas doświadczenia nastąpiło przekazanie ciepła pomiędzy gorącą wodą w małym naczyniu i chłodną wodą w kalorymetrze. Sporządzamy więc bilans cieplny i obliczamy ciepło oddane oraz ciepło pobrane[32]:

[32] Tradycyjnie w bilansie cieplnym zapisujemy ciepło oddane jako dodatnie:
$Q_{\text{oddane}} = mc_w(t_{\text{początkowa}} - t_{\text{końcowa}}) > 0$, bo $t_{\text{początkowa}} > t_{\text{końcowa}}$.

$$Q_{\text{pobrane}} = (m_{\text{k}} c_{\text{Al}} + m_1 c_{\text{w}})(t - t_{\text{A0}})$$

$$Q_{\text{oddane}} = (m_{\text{n}} c_{\text{Al}} + m_2 c_{\text{w}})(t_{\text{B0}} - t)$$

gdzie c_{Al} i c_{w} to odpowiednio ciepło właściwe aluminium i wody. Wielkości te odczytujemy z tablic i upewniamy się, czy ich niepewności są tak małe, że nie wpłyną na niepewności przeprowadzanych obliczeń.

- Szacujemy niepewności ΔQ według wzoru:

$$\Delta Q = \frac{Q_{\text{max}} - Q_{\text{min}}}{2}$$

Obliczamy ΔQ dla ciepła pobranego:

$$\Delta Q_{\text{pobrane}} = \frac{1}{2}\Big\{ \big[(m_{\text{k}} + \Delta m_{\text{k}})c_{\text{Al}} + (m_1 + \Delta m_1)c_{\text{w}}\big]\big[(t + \Delta t_{\text{A}}) - (t_{\text{A0}} - \Delta t_{\text{A0}})\big] +$$
$$- \big[(m_{\text{k}} - \Delta m_{\text{k}})c_{\text{Al}} + (m_1 - \Delta m_1)c_{\text{w}}\big]\big[(t - \Delta t_{\text{A}}) - (t_{\text{A0}} + \Delta t_{\text{A0}})\big] \Big\}$$

Analogicznie wykonujemy obliczenia dla ciepła oddanego.

- Na osi ciepła zaznaczamy przedziały: $Q_{\text{pobrane}} \pm \Delta Q_{\text{pobrane}}$ i $Q_{\text{oddane}} \pm \Delta Q_{\text{oddane}}$.



- Co oznacza istnienie części wspólnej przedziałów?
- Jakie czynniki mogą spowodować, że część wspólna przedziałów będzie niewielka – a nawet, że przedziały będą rozłączne?
- Do wzoru $Q_{\text{pobrane}} = Q_{\text{oddane}}$ wstawiamy otrzymane wartości i sprawdzamy bilans cieplny.
- Dlaczego naklejaliśmy korek na spodzie naczynia kalorymetrycznego?

Doświadczenie 8. Wyznaczamy ciepło topnienia lodu

Wykorzystujemy wiedzę na temat procesów dochodzenia do stanu równowagi termodynamicznej ciał o różnych temperaturach (lód, woda, kalorymetr) i procesu przejścia fazowego (topnienie lodu) – sporządzamy bilans cieplny oraz wyznaczamy ciepło topnienia lodu c_{tl}.

Spis przyrządów i materiałów: kalorymetr (wykonany np. z aluminium), termometr laboratoryjny, waga laboratoryjna, bibuła, zlewka, kilka kawałków lodu.

Kolejne etapy doświadczenia

- Ważymy wewnętrzne naczynie kalorymetru wraz z mieszadełkiem, aby wyznaczyć ich sumaryczną masę $m_{\text{k}} \pm \Delta m_{\text{k}}$.

Do celów szacunkowych jako niepewność wszystkich wykonywanych w doświadczeniu pomiarów prostych masy i temperatury możemy przyjąć wartość działki elementarnej wagi lub wartość najmniejszego odważnika (w zależności od typu stosowanej wagi) oraz wartość działki elementarnej użytego termometru.
Wyniki tego pomiaru i następnych pomiarów wpisujemy do tabeli.

$m_{\text{k}} \pm \Delta m_{\text{k}}$ (kg)	$m_{\text{c}} \pm \Delta m_{\text{c}}$ (kg)	$m_{\text{w}} \pm \Delta m_{\text{w}}$ (kg)	$m \pm \Delta m$ (kg)	$m_{\text{l}} \pm \Delta m_{\text{l}}$ (kg)	$t_{\text{p}} \pm \Delta t_{\text{p}}$ (°C)	$t_{\text{k}} \pm \Delta t_{\text{k}}$ (°C)

- Do kalorymetru nalewamy wodę (mniej więcej do $3/4$ wysokości kalorymetru) o temperaturze kilkanaście stopni wyższej od temperatury otoczenia. Ważymy kalorymetr z wodą: $m_c \pm \Delta m_c$.
- Obliczamy masę m_w wody i szacujemy niepewność Δm_w:

$$m_w = m_c - m_k \qquad \Delta m_w = \Delta m_c + \Delta m_k$$

- Kruszymy lód na drobne kawałki, umieszczamy w zlewce i pozostawiamy do czasu, gdy zacznie się topić. Możemy przyjąć, że temperatura lodu wynosi wtedy $t_l = 0°C$.
- Mierzymy temperaturę początkową wody w kalorymetrze: $t_p \pm \Delta t_p$.
- Wyjmujemy lód ze zlewki, osuszamy bibułą i wrzucamy do kalorymetru. Mieszadełkiem starannie mieszamy wodę z topniejącym lodem. Co jakiś czas sprawdzamy, czy cały lód stopniał. Po stwierdzeniu całkowitego stopnienia lodu (staramy się jak najdokładniej ustalić chwilę całkowitego stopienia się lodu) odczytujemy temperaturę końcową $t_k \pm \Delta t_k$ wody w kalorymetrze (jest to również temperatura kalorymetru).
- Ważymy kalorymetr z wodą, aby wyznaczyć masę $m \pm \Delta m$ kalorymetru wraz z wodą wlaną na początku doświadczenia oraz wodą powstałą z roztopionego lodu.
- Obliczamy masę $m_l \pm \Delta m_l$ lodu wrzuconego do kalorymetru:

$$m_l = m - m_c \qquad \Delta m_l = \Delta m + \Delta m_c$$

- Podczas wykonywania doświadczenia następuje wymiana energii w postaci ciepła między ochładzającym się kalorymetrem i znajdującą się w nim na początku wodą a topniejącym lodem i powstałą z niego wodą, której temperatura rośnie. Wymiana energii trwa do uzyskania równowagi termodynamicznej – czyli do czasu wyrównania temperatur. Zapisujemy to w postaci równania zwanego bilansem cieplnym:

$$Q_{pobrane} = Q_{oddane}$$

$$m_l c_w (t_k - t_l) + m_l c_{tl} = (m_k c_{Al} + m_w c_w)(t_p - t_k)$$

Na jego podstawie obliczamy ciepło topnienia lodu c_{tl}.

$$c_{tl} = \frac{(m_k c_{Al} + m_w c_w)(t_p - t_k) - m_l c_w (t_k - t_l)}{m_l}$$

c_w oraz c_{Al} oznaczają odpowiednio ciepło właściwe wody oraz ciepło właściwe aluminium, z którego wykonany jest kalorymetr. Korzystamy z wartości tablicowych.

- Szacujemy niepewność Δc_{tl} ciepła topnienia lodu:

$$c_{tl\,max} = \frac{[(m_k + \Delta m_k)c_{Al} + (m_w + \Delta m_w)c_w][(t_p + \Delta t_p) - (t_k - \Delta t_k)] - (m_l - \Delta m_l)c_w[(t_k - \Delta t_k) - (t_l + \Delta t_l)]}{m_l - \Delta m_l}$$

$$c_{tl\,min} = \frac{[(m_k - \Delta m_k)c_{Al} + (m_w - \Delta m_w)c_w][(t_p - \Delta t_p) - (t_k + \Delta t_k)] - (m_l + \Delta m_l)c_w[(t_k + \Delta t_k) - (t_l - \Delta t_l)]}{m_l + \Delta m_l}$$

$$\Delta c_{tl} = \frac{c_{tl\,max} - c_{tl\,min}}{2}$$

Przyjmujemy założenie, że odczytane z tablic wartości ciepła właściwego wody c_w oraz aluminium c_{Al} są obarczone tak małą niepewnością w porównaniu z wielkościami mierzonymi w doświadczeniu, że nieuwzględnienie jej nie wpływa znacząco na wartość niepewności Δc_{tl}. (Zastanów się, czy założenie w przypadku pomiarów wykonanych w tym doświadczeniu jest uzasadnione).

- Porównujemy otrzymany wynik z wartością $c_{\mathrm{tl\,tab}}$ z tabeli na s. 236 – sprawdzamy, czy:

$$|c_{\mathrm{tl}} - c_{\mathrm{tl\,tab}}| \leqslant \Delta c_{\mathrm{tl}}$$

- Podczas wykonywania doświadczenia założyliśmy dla uproszczenia, że pewne procesy fizyczne nie wpływają na jego wynik i można je pominąć (niektóre z nich są wymienione w opisie doświadczenia). Wymień założenia, których dokonujesz podczas przeprowadzania tego doświadczenia, i zastanów się, jak mogą one wpłynąć na otrzymany wynik. Na co należy zwrócić szczególną uwagę, aby ewentualnie powstałe błędy systematyczne były jak najmniejsze?
- Jeśli istnieje możliwość, by doświadczenie wykonało jednocześnie kilka grup, proponujemy przeprowadzić je dla kilku wartości stosunku masy lodu i wody $m_{\mathrm{l}}/m_{\mathrm{w}}$. Sporządzenie wykresu zależności Δc_{tl} od stosunku mas $m_{\mathrm{l}}/m_{\mathrm{w}}$ pozwala na wskazanie pomiaru obarczonego najmniejszą niepewnością, a więc wybranie optymalnej proporcji mas.

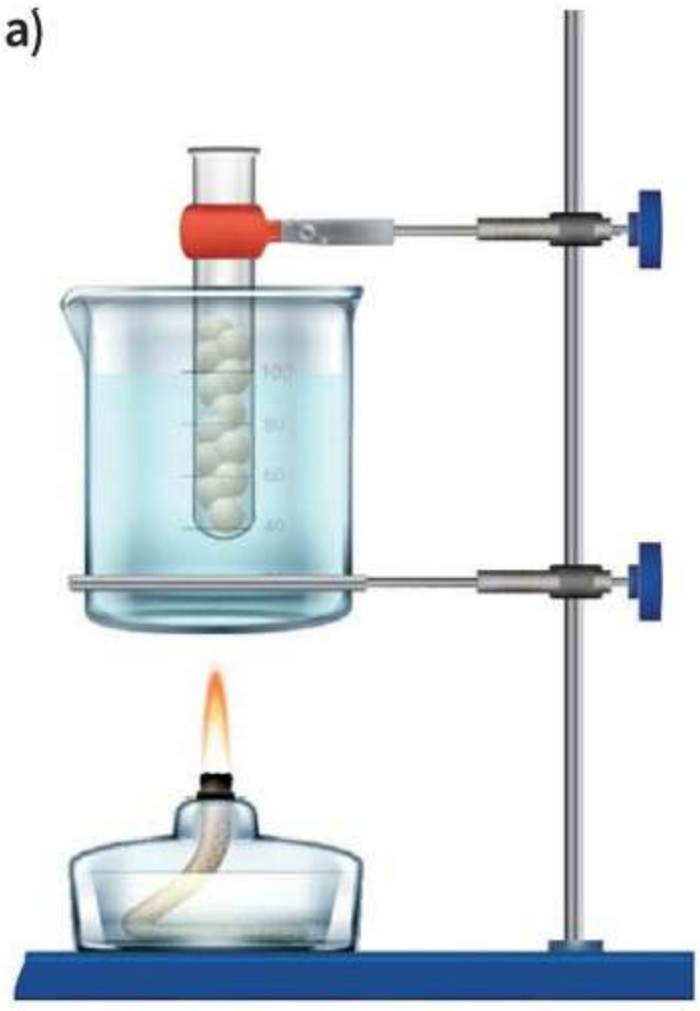
Doświadczenie 9. Wyznaczamy temperaturę topnienia i krzepnięcia naftalenu

Spis przyrządów i materiałów: kilka kulek naftaliny (handlowa potoczna nazwa naftalenu), probówka, zlewka żaroodporna o pojemności $0{,}5–1{,}0\ \mathrm{litra}$, termometr laboratoryjny o zakresie dobranym do zakresu temperatur mierzonych w doświadczeniu, np. $0–100^{\circ}\mathrm{C}$, statyw z uchwytem na probówkę, palnik lub kuchenka elektryczna, zegarek z sekundnikiem lub stoper.

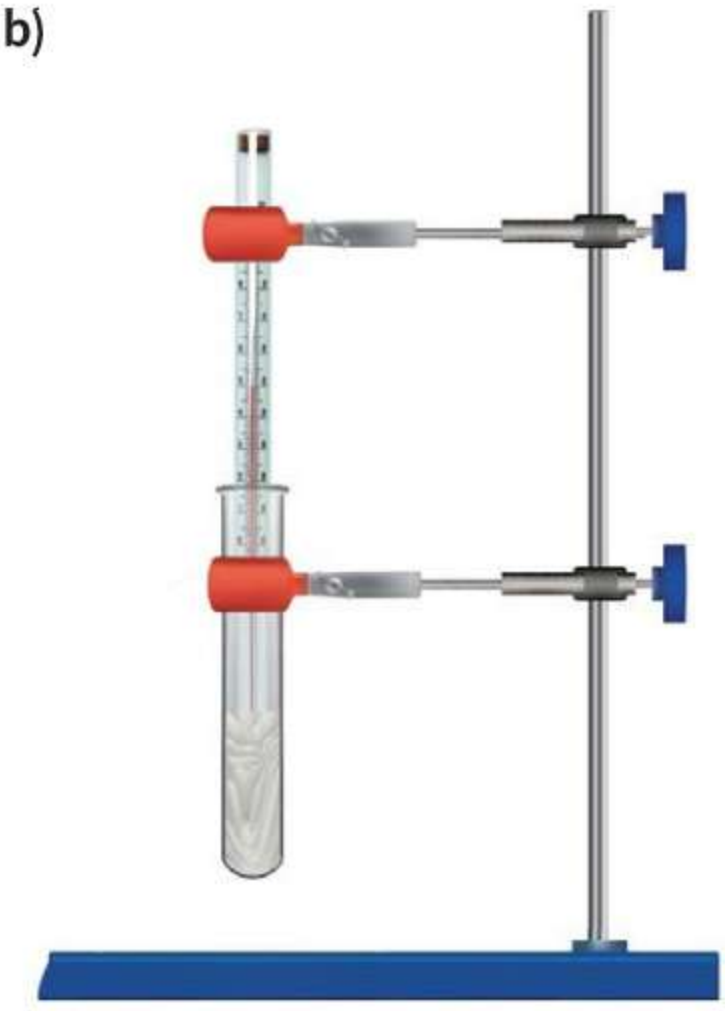
Przed przystąpieniem do wykonania doświadczenia – np. dzień wcześniej – przygotowujemy próbkę naftalenu. W probówce umieszczamy kilka kulek naftalenu i całość ogrzewamy w kąpieli wodnej (rys. 8a) do chwili, gdy cały naftalen stopnieje.

Probówkę ze stopionym naftalenem mocujemy do statywu laboratoryjnego. W naftalenie zanurzamy zawieszony na statywie termometr – tak, by nie dotykał ścianek probówki (rys. 8b). Całość pozostawiamy do ochłodzenia do temperatury pokojowej (naftalen krzepnie).

a)



b)



Rys. 8

Pomiar temperatury topnienia naftalenu

Kolejne etapy doświadczenia

- Do zlewki nalewamy wodę (ok. $3/4$ objętości zlewki) i ustawiamy na kuchence elektrycznej lub umieszczamy nad palnikiem. Probówkę z naftalenem (i termometrem) mocujemy na statywie i zanurzamy w wodzie (tak, by cały naftalen znajdował się poniżej powierzchni wody w zlewce). Termometr także zawieszamy na statywie, by po stopieniu naftalenu nie dotykał ścianek probówki.
- Rozpoczynamy ogrzewanie. Co minutę odczytujemy i zapisujemy w tabeli temperaturę t naftalenu wskazywaną przez termometr po czasie τ od początku ogrzewania. Gdy temperatura naftalenu przekroczy $70^\circ\mathrm{C}$, odczyt (i zapis) temperatury wykonujemy co pół minuty. Pomiar prowadzimy od temperatury pokojowej aż do uzyskania przez naftalen temperatury ok. $90^\circ\mathrm{C}$. Podczas pomiaru obserwujemy znajdujący się w probówce naftalen.
- Szacujemy niepewność pomiaru temperatury Δt oraz czasu $\Delta\tau$.

Czas τ od początku ogrzewania (min)	0	1	2	3	4	...
t (°C)						

- Wyniki pomiarów wraz z niepewnościami nanosimy w układzie współrzędnych τ, t.



- Na wykresie znajdujemy punkty pomiarowe ułożone (w granicach niepewności) wzdłuż prostej równoległej do osi czasu. Wyznaczają one czas, w którym naftalen topnieje (co można było zaobserwować podczas jego ogrzewania). Wartość t dla tych punktów to temperatura topnienia t_{top} naftalenu (jeśli wartości t dla tych punktów różnią się o więcej niż Δt, jako wartość temperatury topnienia t_{top} przyjmij średnią arytmetyczną wartości t odpowiadających topnieniu naftalenu).
- Szacujemy niepewność Δt_{top} temperatury topnienia naftalenu.

Uwaga: Przedział czasu, w którym naftalen topnieje, zależy od szybkości ogrzewania próbki; im wolniej wzrasta jej temperatura, tym jest dłuższy, więc łatwiej i dokładniej można wyznaczyć temperaturę topnienia. Należy więc ustawić temperaturę kuchenki elektrycznej (płomień palnika) tak, by woda w zlewce tylko bardzo delikatnie wrzała.

Pomiar temperatury krzepnięcia naftalenu

Kolejne etapy doświadczenia

- Wyłączamy kuchenkę elektryczną (gasimy palnik) i ostrożnie usuwamy zlewkę z gorącą wodą.
  Co minutę odczytujemy i notujemy temperaturę t naftalenu wskazywaną przez termometr. Podczas pomiaru obserwujemy znajdujący się w probówce naftalen.
- Pomiar wykonujemy do uzyskania przez naftalen temperatury ok. $50^\circ\mathrm{C}$. Wyniki pomiarów wraz z odcinkami niepewności Δt przedstawiamy w postaci wykresu w układzie współrzędnych τ, t. Postępujemy analogicznie jak w pierwszej części doświadczenia i wyznaczamy temperaturę krzepnięcia t_{krz} naftalenu oraz niepewność Δt_{krz}.
- Z wiadomości na temat przemian fazowych wynika, że temperatura krzepnięcia substancji jest równa jej temperaturze topnienia. Czy otrzymane wyniki potwierdzają to stwierdzenie?
  Jeśli doświadczenie wykonywało kilka grup, czy otrzymane wyniki są zgodne?
  Czy otrzymane wartości temperatury topnienia i krzepnięcia naftalenu są zgodne z wartościami podanymi w tabeli na s. 236?

Przypomnienie: Dwie wartości wielkości fizycznych $a_1 \pm \Delta a_1$ oraz $a_2 \pm \Delta a_2$ uznajemy za równe (w granicach niepewności pomiarowych), jeśli spełniają warunek:

$$|a_1 - a_2| \leqslant \Delta a_1 + \Delta a_2$$

Doświadczenie 10. Demonstrujemy rozszerzalność temperaturową ciał stałych

Celem doświadczenia jest wykazanie, że wzrost temperatury ciała stałego powoduje zwiększenie jego objętości, co oznacza zwiększenie wszystkich wymiarów.

Spis przyrządów i materiałów: pierścień Gravesandego, palnik spirytusowy, dylatoskop, bimetal.

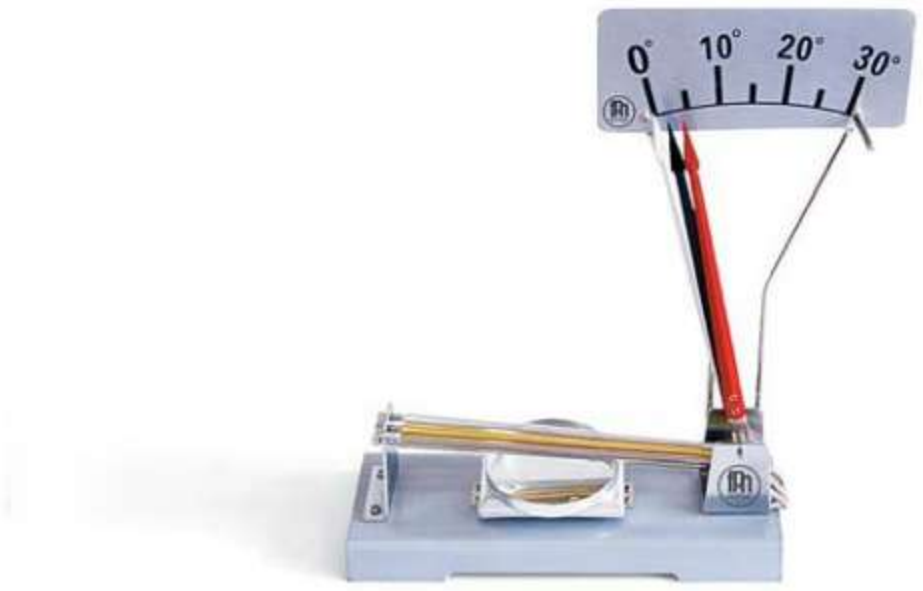
Pierścień Gravesandego



Rys. 9

- Rozmiary kulki i otworu pierścienia są tak dobrane, by kulka mająca tę samą temperaturę co pierścień bez trudu przechodziła przez otwór, co sprawdzamy w temperaturze pokojowej.
- Po ogrzaniu kulki w płomieniu palnika przez 1 do 2 minut kulka nie przechodzi przez otwór.
- Gdy równocześnie ogrzejemy kulkę i pierścień, kulka znowu swobodnie przechodzi przez otwór.

Dylatoskop



Rys. 10

- W dylatoskopie zamocowane są trzy pręty: aluminiowy, stalowy i mosiężny. W temperaturze pokojowej pręty mają jednakowe długości, a połączone z nimi strzałki wskazują „0”. Gdy pręty się wydłużają, każdy popycha wskazówkę innego koloru.
- W miarę ogrzewania pręty wydłużają się w różnym stopniu, co pokazują różne wychylenia wskazówek.

Bimetal

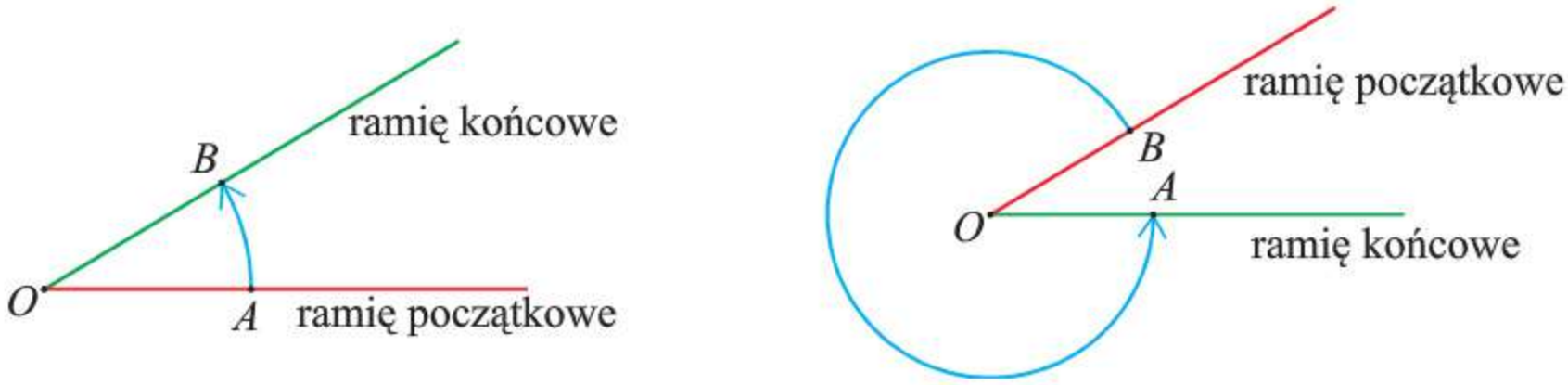


Rys. 11

Bimetal składa się z dwóch zespolonych warstw metali lub stopów metalicznych o różnych współczynnikach rozszerzalności temperaturowej, na przykład miedzi i stali. W temperaturze pokojowej płytka bimetaliczna jest płaska. Podczas ogrzewania jedna warstwa wydłuża się bardziej, co powoduje wygięcie płytki. Ochłodzenie bimetalu poniżej temperatury pokojowej powoduje wygięcie płytki w przeciwną stronę.

1. Kąty skierowane

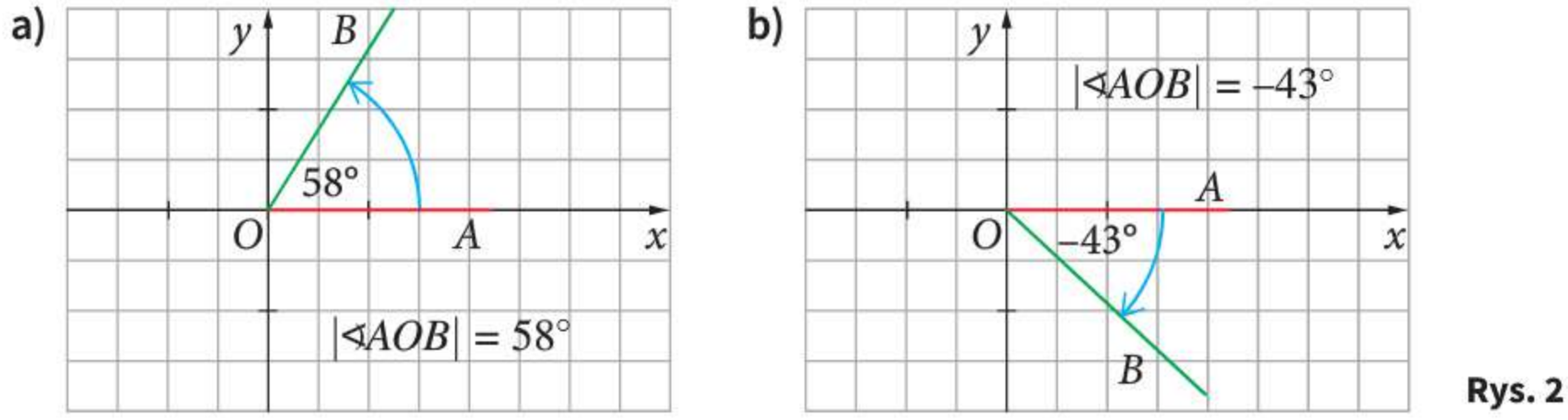
Kąt skierowany to uporządkowana para półprostych o wspólnym początku; pierwsza półprosta to ramię początkowe, druga półprosta – ramię końcowe (rys. 1).



$\sphericalangle AOB$ – kąt skierowany $\sphericalangle BOA$ – kąt skierowany **Rys. 1**

Miara kąta skierowanego może przyjmować wartości dodatnie lub ujemne. Jeśli kąt jest zakreślany:

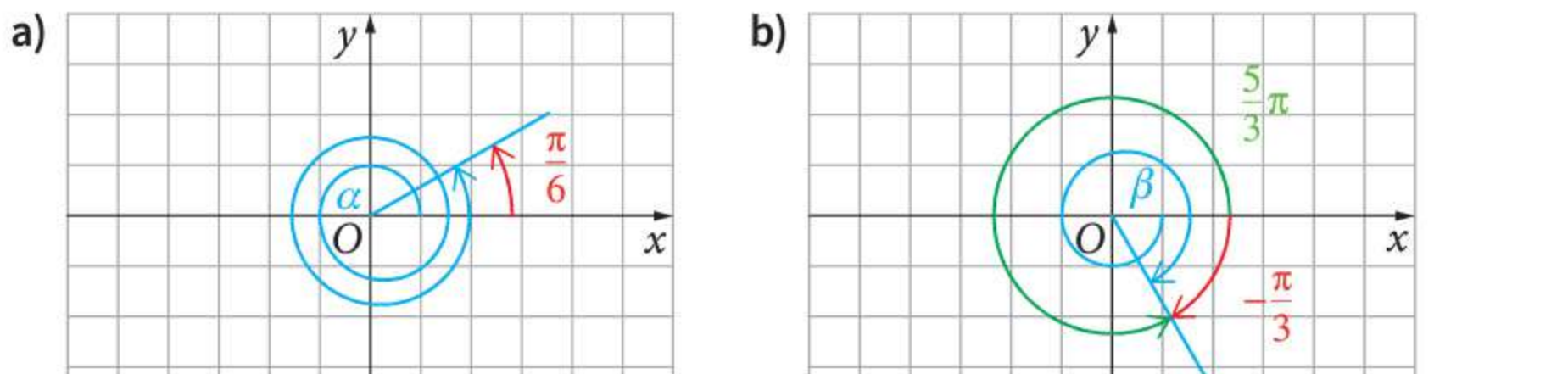
- przeciwnie do ruchu wskazówek zegara (rys. 2a), to jest skierowany dodatnio (miara kąta jest dodatnia);
- zgodnie z ruchem wskazówek zegara (rys. 2b), to jest skierowany ujemnie (miara kąta jest ujemna).



Rys. 2

Miarę dowolnego kąta możemy wyrazić w stopniach lub radianach.

Ramię końcowe kąta możemy obrócić wokół punktu O dowolnie wiele razy i otrzymać w ten sposób kąty skierowane o mierze dodatniej większej od kąta pełnego (np. 5π) lub kąty skierowane o mierze ujemnej (np. -3π). Na rysunku 3a zaznaczono przykładowo kąt $\alpha = 4\pi + \frac{\pi}{6}$, a na rysunku 3b – kąt $\beta = -\frac{7}{3}\pi = -4\pi + \frac{5}{3}\pi$.



Rys. 3

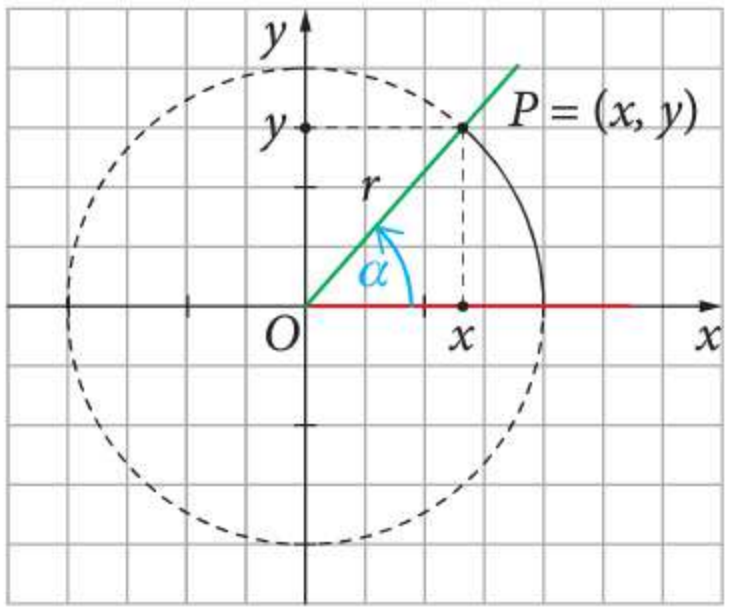
Zauważ, że położenie ramion kąta α jest identyczne z położeniem ramion kąta $\frac{\pi}{6}$, a położenie ramion kąta β – z położeniem ramion kąta $\frac{5}{3}\pi$. Każdy kąt o dowolnej mierze można przedstawić w postaci:

$$\alpha = k \cdot 2\pi + \alpha_0$$

gdzie α_0 spełnia warunek $0 \leqslant \alpha_0 < 2\pi$ oraz k jest liczbą całkowitą.

2. Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta

W klasie pierwszej wprowadziliśmy funkcje trygonometryczne sinus, cosinus i tangens dla kątów w trójkącie prostokątnym. Aby zdefiniować funkcje trygonometryczne dowolnego kąta skierowanego wyrażonego w radianach (czyli inaczej mówiąc – funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej), narysujemy w prostokątnym układzie współrzędnych tzw. koło trygonometryczne, czyli koło o środku w początku układu i dowolnym promieniu r (może to być promień o długości 1). W pierwszej ćwiartce układu zaznaczymy kąt środkowy α – jak na rys. 4. Ramię początkowe tego kąta pokrywa się z osią x, a ramię końcowe przecina okrąg w punkcie $P = (x, y)$.



Rys. 4

Sinusem kąta α nazywamy iloraz rzędnej y punktu P i odległości r tego punktu od początku układu współrzędnych.

$$\sin\alpha = \frac{y}{r}$$

Cosinusem kąta α nazywamy iloraz odciętej x punktu P i odległości r tego punktu od początku układu współrzędnych.

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}$$

Tangensem kąta α nazywamy iloraz rzędnej y i odciętej x punktu P.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$$

Wartości funkcji trygonometrycznych możemy odczytać w tablicach matematycznych (s. 377 podręcznika) lub znaleźć za pomocą kalkulatora, a dla niektórych kątów samodzielnie obliczyć.

W tym celu:

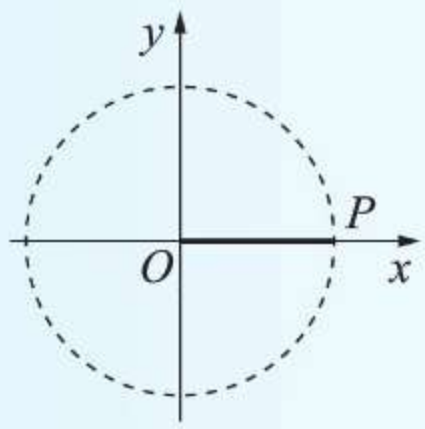
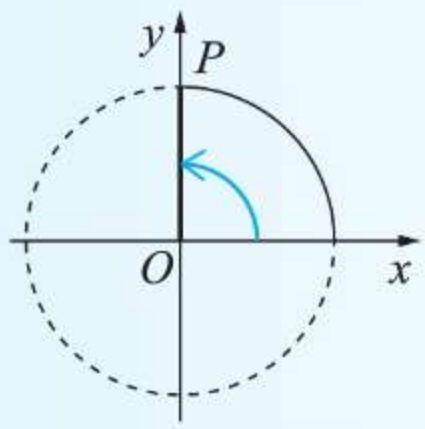
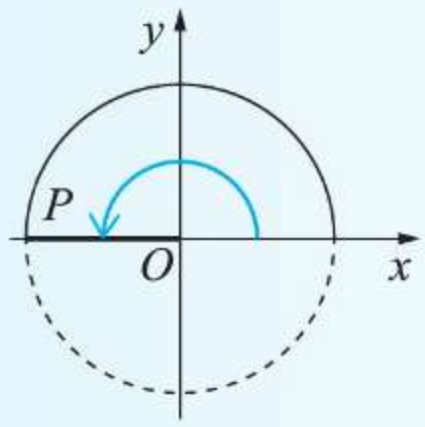
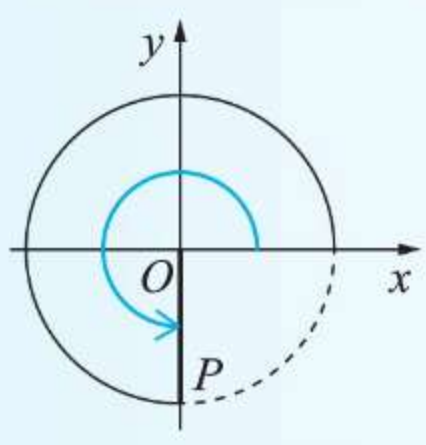
- w układzie współrzędnych rysujemy okrąg i kąt, którego funkcji szukamy (początkowe ramię kąta pokrywa się z dodatnią częścią osi x);
- zaznaczamy punkt P, w którym końcowe ramię kąta przecina okrąg, i odpowiednią współrzędną tego punktu (y – w przypadku funkcji sinus, x – w przypadku funkcji cosinus);
- obliczamy wartość ilorazu definiującego szukaną funkcję trygonometryczną.

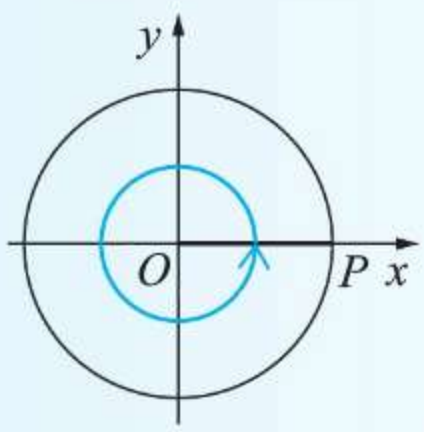
Omówimy kolejno funkcje trygonometryczne sinus i cosinus.

Funkcja sinus

Przykład 1

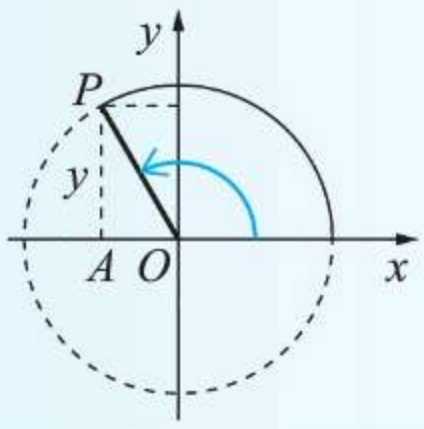
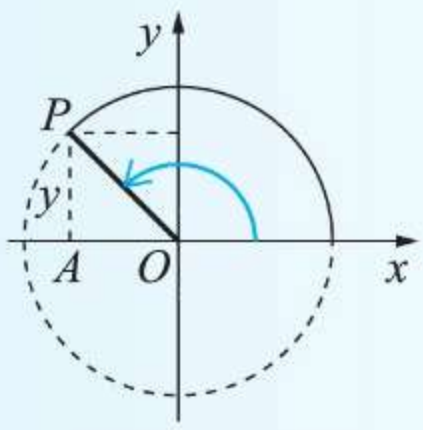
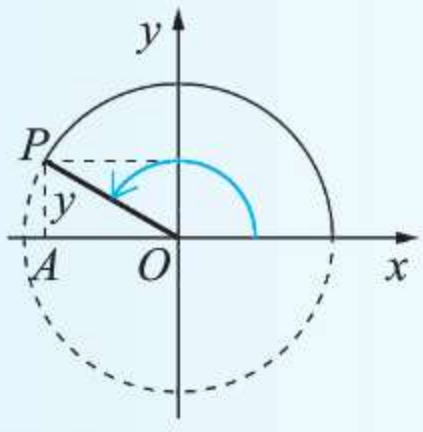
Obliczymy wartości funkcji sinus dla kątów o miarach: 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ i 2π.

Kąt \ Funkcja	$\sin\alpha = \frac{y}{r}$	
0		$y = 0$ $\sin 0 = \frac{0}{r} = 0$
$\frac{\pi}{2}$		$y = r$ $\sin\frac{\pi}{2} = \frac{r}{r} = 1$
π		$y = 0$ $\sin\pi = \frac{0}{r} = 0$
$\frac{3}{2}\pi$		$y = -r$ $\sin\frac{3}{2}\pi = \frac{-r}{r} = -1$

2π		$y = 0$ $\sin 2\pi = \frac{0}{r} = 0$

Przykład 2

Obliczymy wartości funkcji sinus dla kątów o miarach: $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{6}$. Skorzystamy ze znanych wartości funkcji dla kątów ostrych: $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{6}$. Postępujemy tak samo, jak w przykładzie 1.

Kąt \ Funkcja	$\sin\alpha = \frac{y}{r}$	
$\frac{2\pi}{3} = 120^\circ$		Rzędna y punktu P jest równa długości przyprostokątnej w ΔOPA, leżącej naprzeciw kąta $\frac{\pi}{3}$, więc: $\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{y}{r} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{3\pi}{4} = 135^\circ$		Rzędna y punktu P jest równa długości przyprostokątnej w ΔOPA, leżącej naprzeciw kąta $\frac{\pi}{4}$, więc: $\sin\frac{3\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{5\pi}{6} = 150^\circ$		Rzędna y punktu P jest równa długości przyprostokątnej w ΔOPA, leżącej naprzeciw kąta $\frac{\pi}{6}$, więc: $\sin\frac{5\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

Oblicz samodzielnie wartości funkcji sinus dla kątów: $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{4}$, $\frac{11\pi}{6}$ i porównaj otrzymane wyniki z wartościami tych funkcji przedstawionymi w tabeli 1.

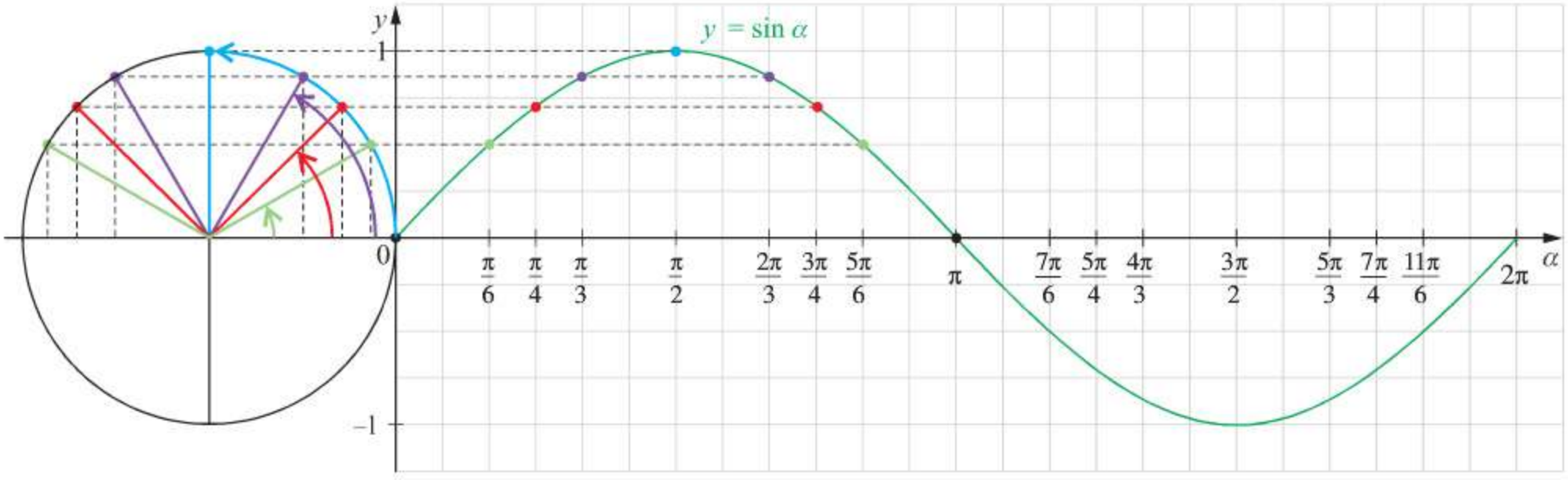
Wykres funkcji sinus – sinusoida

- Każdej liczbie rzeczywistej można przyporządkować kąt skierowany wyrażony w radianach, zatem dziedziną funkcji sinus jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych.
- Wartości funkcji sinus zawierają się w przedziale $\langle -1, 1 \rangle$, co wynika z definicji tej funkcji.
- Wspominaliśmy już, że ramiona kąta $\alpha = k \cdot 2\pi + \alpha_0$ pokrywają się z ramionami kąta α_0, z czego wynika, że wartości funkcji sinus będą się okresowo powtarzać co 2π. Wobec tego funkcja **sinus jest funkcją okresową o okresie podstawowym równym 2π.**

Najpierw narysujemy wykres funkcji sinus w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ (rys. 5). Skorzystamy przy tym z tabeli 1.

Tabela 1. Wartości funkcji sinus wybranych kątów

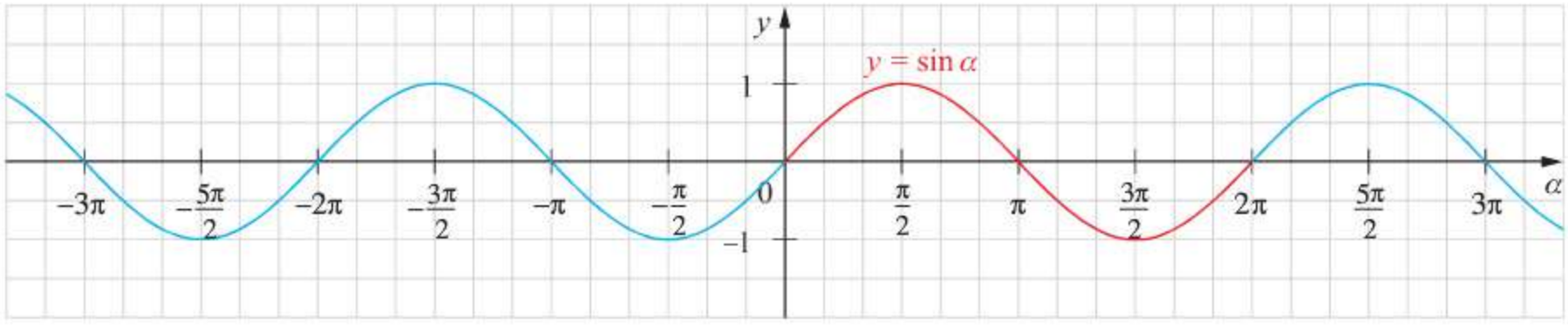
α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0



Rys. 5

Na rysunku 6 przedstawiono wykres funkcji sinus po uwzględnieniu, że:

- funkcja sinus jest funkcją **okresową** o okresie podstawowym 2π;
- wartości funkcji sinus spełniają związek $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, czyli funkcja sinus jest funkcją **nieparzystą**.

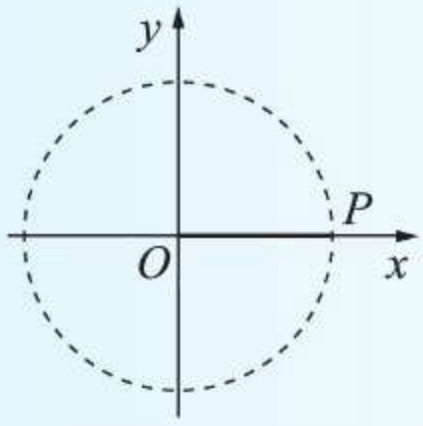
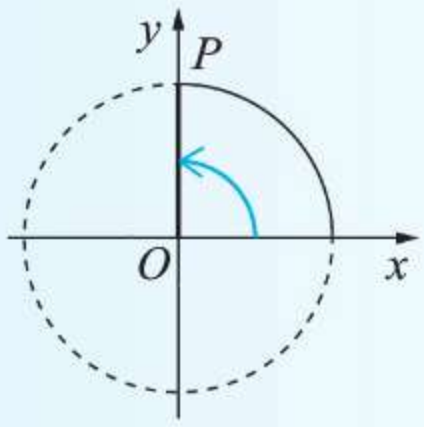
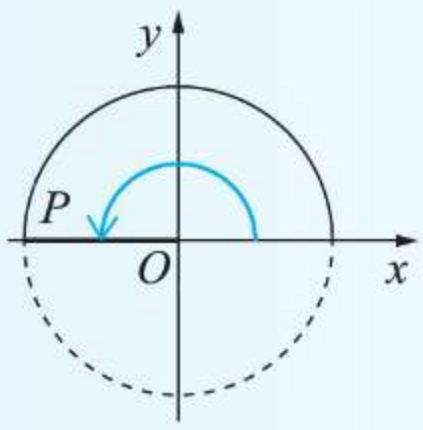
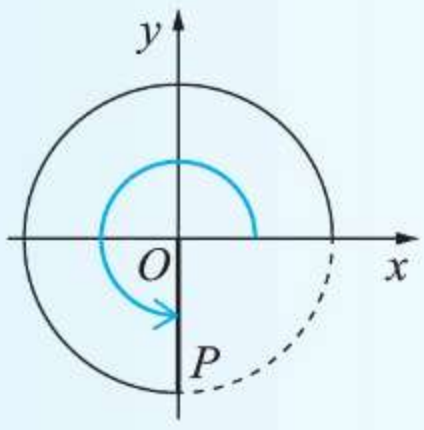
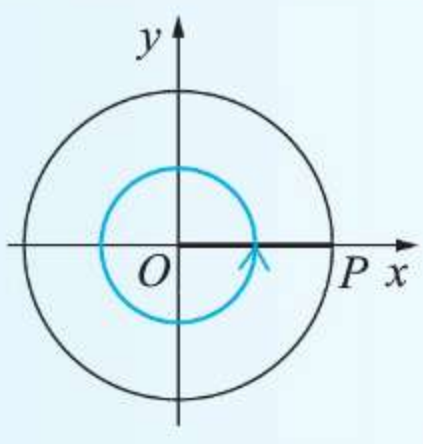


Rys. 6

Funkcja cosinus

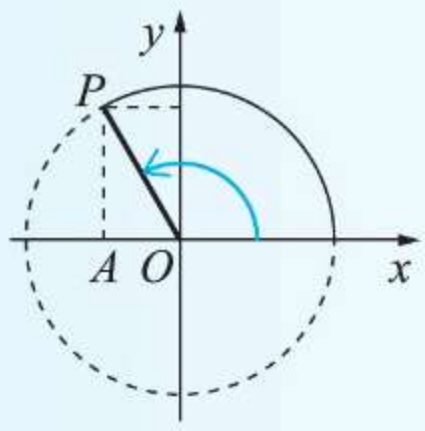
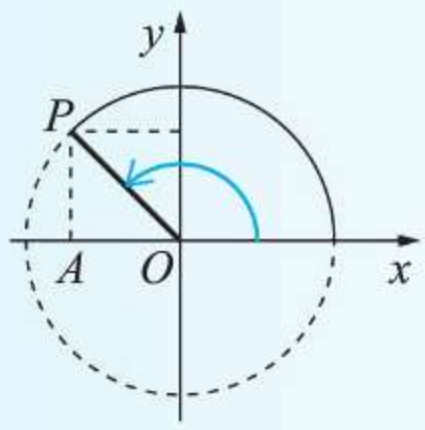
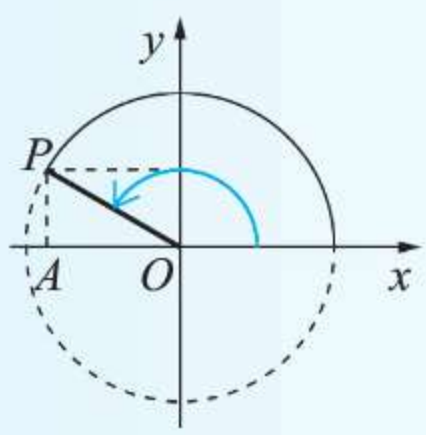
Przykład 3

Obliczymy wartości funkcji cosinus dla kątów o miarach: 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ i 2π.

Kąt \ Funkcja	$\cos\alpha = \frac{x}{r}$	
0		$x = r$ $\cos 0 = \frac{r}{r} = 1$
$\frac{\pi}{2}$		$x = 0$ $\cos\frac{\pi}{2} = \frac{0}{r} = 0$
π		$x = -r$ $\cos\pi = \frac{-r}{r} = -1$
$\frac{3}{2}\pi$		$x = 0$ $\cos\frac{3}{2}\pi = \frac{0}{r} = 0$
2π		$x = r$ $\cos 2\pi = \frac{r}{r} = 1$

Przykład 4

Obliczymy wartości funkcji cosinus dla kątów o miarach: $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{6}$. Skorzystamy ze znanych wartości funkcji dla kątów ostrych: $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{6}$. Postępujemy tak samo jak w przykładzie 3.

Kąt \ Funkcja	$\cos\alpha = \frac{x}{r}$	
$\frac{2\pi}{3} = 120°$		Odcięta x punktu P jest ujemna, więc długość przyprostokątnej w ΔOPA, leżącej przy kącie $\frac{\pi}{3}$, wpisujemy do wzoru ze znakiem minus: $\cos\frac{2\pi}{3} = \frac{x}{r} = \frac{-\lvert AO\rvert}{r} =$ $= -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$
$\frac{3\pi}{4} = 135°$		Odcięta x punktu P jest ujemna, więc: $\cos\frac{3\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{5\pi}{6} = 150°$		Odcięta x punktu P jest ujemna, więc: $\cos\frac{5\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

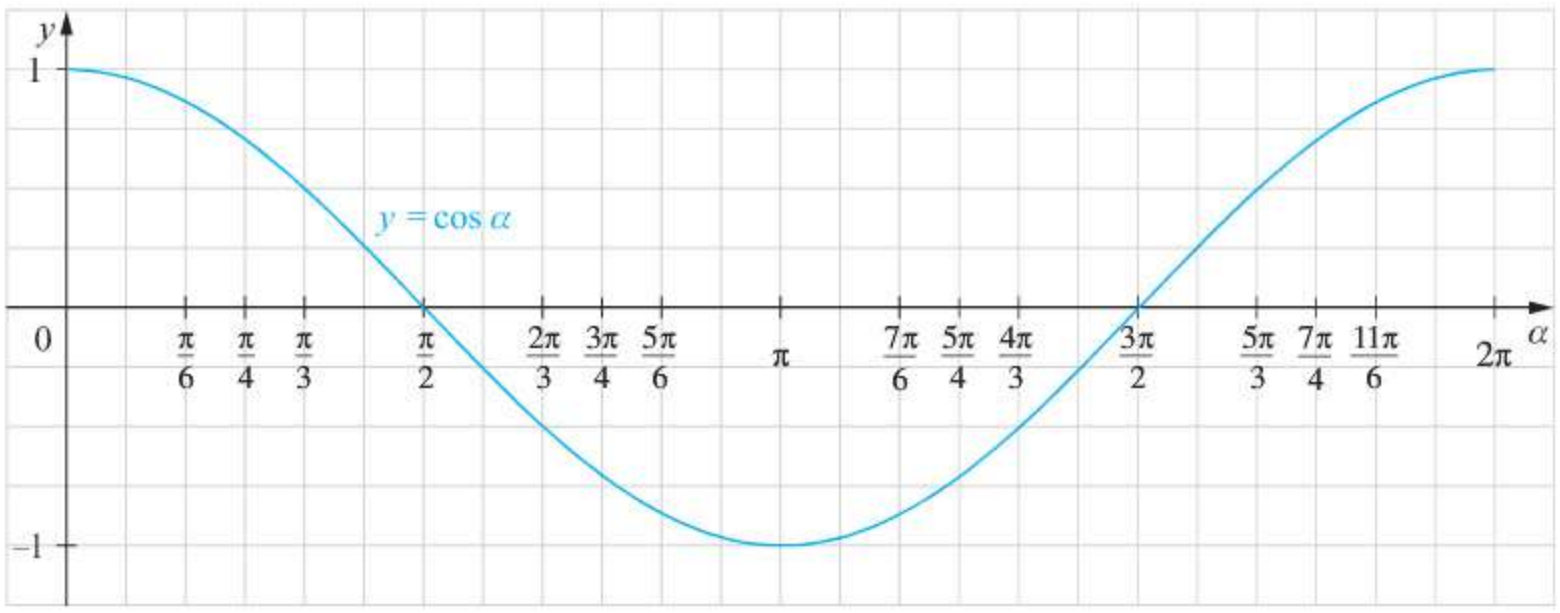
Oblicz samodzielnie wartości funkcji cosinus dla kątów: $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{4}$, $\frac{11\pi}{6}$ i porównaj otrzymane wyniki z wartościami tych funkcji przedstawionymi w tabeli 2.

Wykres funkcji cosinus – cosinusoida

Najpierw narysujemy wykres funkcji cosinus w przedziale $\langle 0, 2\pi\rangle$ (rys. 7). Skorzystamy z tabeli 2.

Tabela 2. Wartości funkcji cosinus wybranych kątów

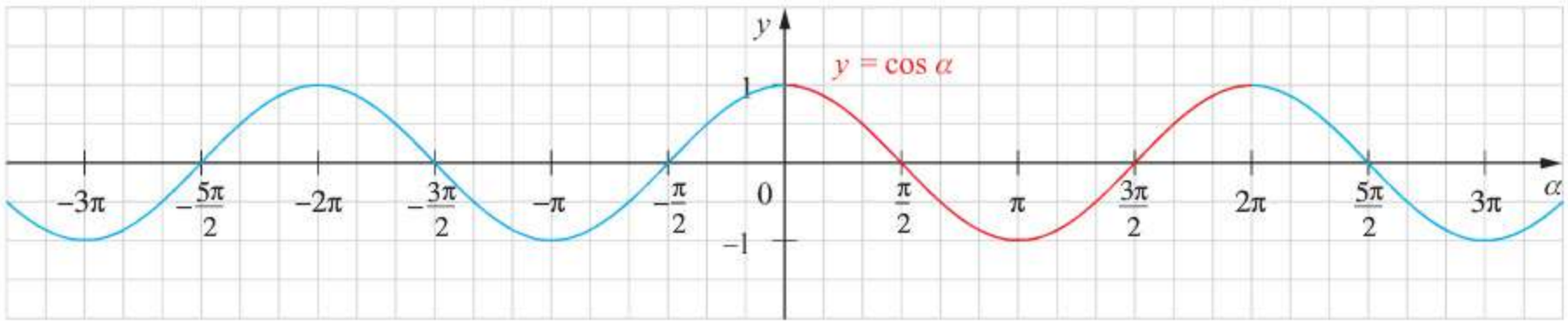
α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



Rys. 7

Na rysunku 8 przedstawiono wykres funkcji cosinus po uwzględnieniu, że:

- funkcja cosinus jest funkcją **okresową** o okresie 2π;
- wartości funkcji cosinus spełniają związek $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, czyli funkcja cosinus jest funkcją **parzystą**.



Rys. 8

3. Związki między funkcjami kąta ostrego α a funkcjami $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ oraz $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$

Tabela 3. Porównanie wartości funkcji sinus i cosinus wybranych kątów

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

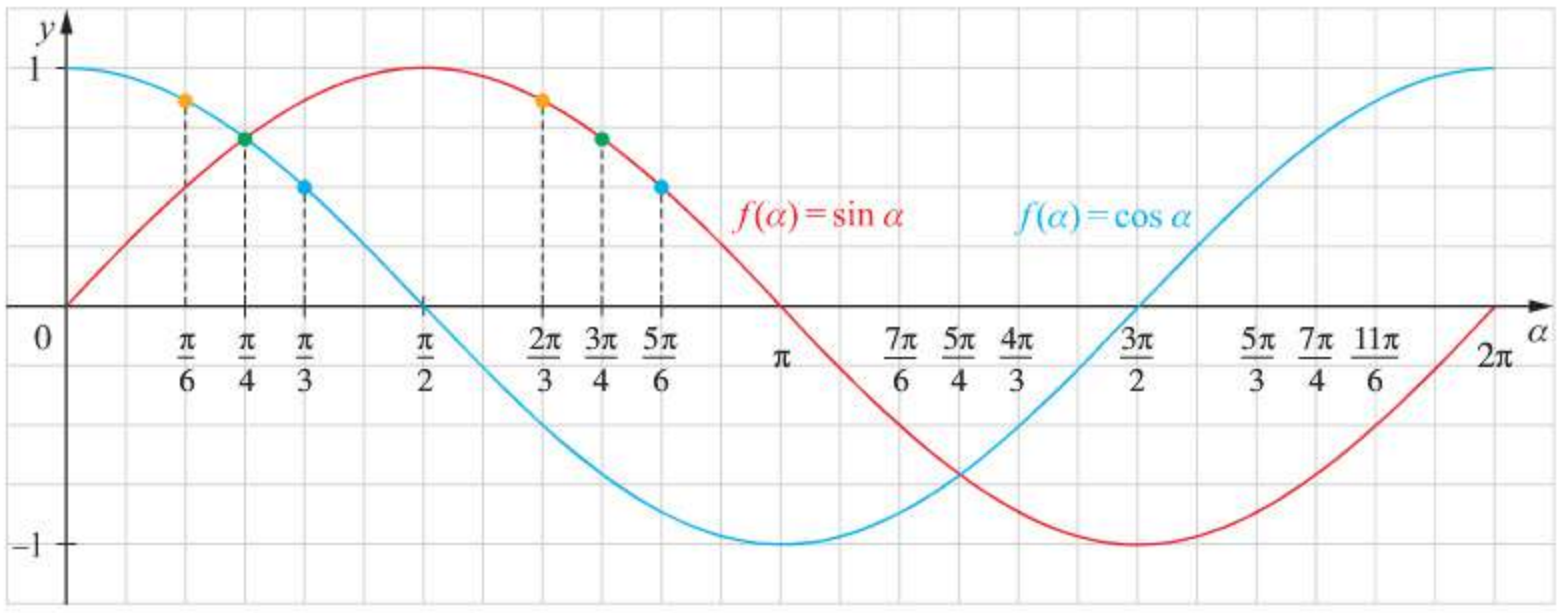
Na podstawie tabeli 3 możemy zapisać następujące związki:

$$\left.\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right) &= \cos\frac{\pi}{6} \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right) &= \cos\frac{\pi}{4} \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right) &= \cos\frac{\pi}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha$$

oraz:

$$\left.\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right) &= -\sin\frac{\pi}{6} \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right) &= -\sin\frac{\pi}{4} \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right) &= -\sin\frac{\pi}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha$$

Związki między wartościami funkcji sinus i cosinus można również odczytać z wykresów tych funkcji (rys. 9).



Rys. 9

Ponieważ $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha$, więc wykres funkcji $y = \cos\alpha$ otrzymujemy po przesunięciu sinusoidy równonolegle do osi α o $\frac{\pi}{2}$ w lewo.

Ruch postępowy i ruch obrotowy bryły sztywnej

Strona	Nr zadania	Odpowiedź
		2. Ruch obrotowy bryły sztywnej
16	2	a) $\varepsilon = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t} = 10\ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$; $a_\text{s} = \varepsilon r = 1\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ b) $a = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$
16	3	b) $\omega_\text{śr} = \frac{300\text{ rad}}{80\text{ s}} = 3{,}75\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$; $n = \frac{300}{2\pi} \approx 47{,}8$
		3. Energia kinetyczna bryły sztywnej
23	1	$J_1 < J_4 < J_3 < J_2$
23	3	a) $E_\text{k} = \frac{ma^2\omega^2}{12} = 0{,}01\text{ J}$ b) $E_\text{k} = \frac{5ma^2\omega^2}{24} = 0{,}025\text{ J}$
23	4	$v_2 = v_1\sqrt{\frac{2}{7}} \approx 0{,}53v_1$
		4. Przyczyny zmian ruchu obrotowego. Moment siły
31	1	a) $F = \frac{J_0\omega_0}{Rt} = \frac{mR\omega_0}{2t} = 0{,}5\text{ N}$ b) $F = \frac{1}{2}\frac{J_0\omega_0}{Rt} = \frac{mR\omega_0}{4t} = 0{,}25\text{ N}$
31	2	a) $a = \frac{m_1 g}{m_1 + 0{,}5m_2} \approx 2{,}3\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ b) $\varepsilon = \frac{a}{R} = \frac{m_1 g}{R(m_1 + 0{,}5m_2)} \approx 23\ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$ c) $v = \sqrt{\frac{2hm_1 g}{m_1 + 0{,}5m_2}} \approx 4{,}3\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$
		5. Równowaga bryły sztywnej
37	1	b) $F_\text{N} = 400\text{ N}$ c) $F = 800\text{ N}$ d) $F_\text{A} = 800\text{ N}$; $F_\text{B} = 400\text{ N}$
37	2	$F_2 = \frac{r}{R}F_1 = 30\text{ N}$
38	3	$x = \frac{\rho l V}{2(2M_1 + m + \rho V)} = 0{,}8\text{ m}$
		6. Moment pędu
46	1	$v = \frac{m_1 R\omega}{2m} = 200\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$
46	2	a) nie b) nie

Strona	Nr zadania	Odpowiedź
46	3	$\omega_2 = \frac{J_0 + mR^2}{J_0 + mr^2}\omega_1 = 0{,}7\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
8. Toczenie: złożenie ruchów postępowego i obrotowego		
54	1	a) $a = \frac{2mg}{2m + M} = 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ b) $\varepsilon = \frac{2mg}{(2m + M)R} = 100\ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$ c) $F_\text{N} = \frac{Mmg}{2m + M} = 1{,}25\ \text{N}$ d) $\omega = \frac{2mgt}{2m + M} \cdot \frac{1}{R} = 200\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$; $v = \frac{2mgt}{2m + M} = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$
54	2	a) $\frac{E_\text{ko}}{E_\text{kc}} = \frac{1}{1 + \frac{mR^2}{J_0}}$ $\left(\frac{E_\text{ko}}{E_\text{kc}}\right)_\text{walec} = \frac{1}{3}$; $\left(\frac{E_\text{ko}}{E_\text{kc}}\right)_\text{kula} = \frac{2}{7}$; $\left(\frac{E_\text{ko}}{E_\text{kc}}\right)_\text{obręcz} = \frac{1}{2}$ b) $\frac{E_\text{ko}}{E_\text{kp}} = \frac{J_0}{mR^2}$ $\left(\frac{E_\text{ko}}{E_\text{kp}}\right)_\text{walec} = \frac{1}{2}$; $\left(\frac{E_\text{ko}}{E_\text{kp}}\right)_\text{kula} = \frac{2}{5}$; $\left(\frac{E_\text{ko}}{E_\text{kp}}\right)_\text{obręcz} = 1$
54	3	a) $v_1 = v_2 = \sqrt{\frac{10}{7}gh}$ b) $\frac{t_1}{t_2} = \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1}$; $t_1 < t_2$
54	*5	a) $a_x = \frac{R - r}{mR^2 + J_0}F_1R$; $T = \frac{mRr + J_0}{mR^2 + J_0}F_1$ Szpula będzie się poruszać w prawo bez poślizgu, jeśli $F_1 \leqslant \frac{mg\mu(mR^2 + J_0)}{mRr + J_0}$. b) • Aby szpula nie była podnoszona, musi być spełniony warunek $F_2 < \frac{mg}{\sin\alpha}$, gdzie $\sin\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}$. • $a_x = 0$; $T = \frac{r}{R}F_2$ Jeśli $F_2 \leqslant \frac{\mu mg}{\frac{r}{R} + \mu\sin\alpha}$, to szpula będzie spoczywać względem podłoża. c) $a_x = -\frac{rR}{J_0 + mR^2}F_3$; $T = \frac{mrR}{mR^2 + J_0}F_3$ Szpula będzie się toczyć w lewo bez poślizgu, jeśli $F_3 \leqslant \frac{mg}{1 + \frac{mrR}{\mu(mR^2 + J_0)}}$.

Strona	Nr zadania	Odpowiedź
		Zadania powtórzeniowe
60	1	1.1. B 1.3. $\omega_{śr} \approx 8\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \approx 25 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ 1.4. A–3
60	2	a) $F_p = 888$ N c) $F_N = 900$ N
61	4	a) $a_1 > a_2$ b) $T_1 < T_2$
61	5	1P, 2F, 3F, 4F, 5P, 6P
62	7	b) $\omega_t = \frac{mvR}{mR^2 + J}$; $\omega_{cz} = \frac{Jv}{R(mR^2 + J)}$

Pole grawitacyjne

Strona	Nr zadania	Odpowiedź
		9. O odkryciach Kopernika i Keplera
68	1	$\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{27}{8}} \approx 1{,}8$
68	2	a) $\frac{v_P}{v_A} = \frac{r_A}{r_P} \approx 1{,}03$
68	3	a) $v_{śr} = \frac{l}{T} \approx 29{,}7 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ b) $v_{śr} = \frac{2\pi R}{T} \approx 29{,}9 \frac{\text{km}}{\text{s}}$
		10. Prawo powszechnej grawitacji
75	4	$R = \frac{3F}{4\pi G\rho m} \approx 3{,}2 \cdot 10^6$ m
75	5	$F_{P1} = 0$ N; $F_{P2} = \frac{10Gm_0m}{9d^2} \approx 3 \cdot 10^{-13}$ N
75	6	Ciało należy umieścić na odcinku łączącym środek Ziemi ze środkiem Księżyca w odległości $x \approx 3{,}46 \cdot 10^8$ m od środka Ziemi.
		11. Pierwsza prędkość kosmiczna
79	1	$v_I = \sqrt{\frac{GM_{Marsa}}{R_{Marsa}}} \approx 3{,}5 \frac{\text{km}}{\text{s}}$
79	3	$v = \sqrt{\frac{GM_Z}{R_Z + h}} \approx 7{,}3 \frac{\text{km}}{\text{s}}$
79	4	$M_P = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$

Strona	Nr zadania	Odpowiedź
79	5	$M_S = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} \approx 2 \cdot 10^{30}\ \text{kg}$
79	6	$r_K = \frac{dM_Z}{M_Z + M_K} \approx 3{,}79 \cdot 10^5\ \text{km}$
12. Natężenie pola grawitacyjnego		
90	1	$g_P = g\frac{R_P}{R_Z} = 2g \approx 19{,}6\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
90	2	Punkt leży na odcinku łączącym środki kul w odległości $x = \frac{r}{3}$ od środka kuli o mniejszej masie.
90	3	d) $\lvert OB\rvert = 0{,}9d$
90	*4	$\gamma = \frac{4}{3}\pi G\rho\left[\frac{R^3}{d^2} - \frac{r^3}{(d-a)^2}\right]$
90	5	$\omega = \frac{1}{R_Z}\sqrt{\frac{GM_Z}{R_Z}} \approx 1{,}2 \cdot 10^{-3}\ \frac{1}{\text{s}}$; $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi R_Z\sqrt{\frac{R_Z}{GM_Z}} \approx 5100\ \text{s} \approx 1{,}4\ \text{h}$
13. Praca w polu grawitacyjnym		
93	2	$W_1 = W_3 = mgh;\ W_2 = 0$
***15. Potencjał pola grawitacyjnego**		
100	1	$\gamma = \frac{\Delta V}{\Delta h} = 3{,}6\ \frac{\text{N}}{\text{kg}}$
100	2	$V_B = -\frac{100}{81} \cdot \frac{GM_Z}{d} = -1{,}3 \cdot 10^6\ \frac{\text{J}}{\text{kg}}$
100	3	$V = -\frac{GM_Z}{R_Z} \approx -6{,}3 \cdot 10^7\ \frac{\text{J}}{\text{kg}}$
16. Druga prędkość kosmiczna		
102	2	$\Delta E_k = -\Delta E_p = GM_Z m\left(\frac{1}{R_Z + h_B} - \frac{1}{R_Z + h_A}\right) \approx 2570\ \text{MJ}$
102	3	$h = R_Z = 6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m}$
17. Stan przeciążenia. Stany nieważkości i niedociążenia		
108	4	$F_N = 3mg$
108	7	c) $s_{AB} = \frac{g}{4\pi\nu^2} \approx 2{,}8\ \text{km}$ d) $\frac{\lvert\Delta F_c\rvert}{F_c} \cdot 100\% = \frac{2\pi^2 d\nu^2}{g} \cdot 100\% \approx 5{,}6\%$

Strona	Nr zadania	Odpowiedź
		Zadania powtórzeniowe
114	1	$F_w = \frac{GM_w}{r_Z^2}\sqrt{\frac{M_Z^2}{\cos^4 46^\circ} + \frac{M_S^2}{\sin^4 46^\circ}} \approx 10^{23}\ \text{N}$
115	3	a) $\Delta E_p = mgh = 98\,100\ \text{J}$ b) $\Delta E_p = \frac{GM_Z mh}{R_Z(R_Z + h)} = \frac{mghR_Z}{R_Z + h} \approx 98\,085\ \text{J}$ c) 1P, 2F
115	4	4.1. $v \approx 7{,}7\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$ 4.2. C 4.3. 1P, 2F
115	5	a) $\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM_Z}{4\pi^2} \approx 10^{13}\ \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2}$ b) $r = \sqrt[3]{\frac{GM_Z T^2}{4\pi^2}} \approx 4{,}21 \cdot 10^7\ \text{m}$; $v = \frac{2\pi r}{T} \approx 3{,}1\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$ c) $\Delta E_c = GM_Z m\left(\frac{1}{R_Z} - \frac{1}{2r}\right) \approx 0{,}58 \cdot 10^{10}\ \text{J} = 5{,}8\ \text{GJ}$ d) $W_{\text{na wyniesienie}} \approx 0{,}92W$; $W_{\text{na nadanie energii kinetycznej}} \approx 0{,}08W$
116	6	a) $F_N = 4mg = 3200\ \text{N}$ b) Jeśli $v_{\text{rakiety}} < \sqrt{\frac{GM_Z}{2R_Z}} \approx 5{,}6\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$, to rakieta powróciła na Ziemię. Jeśli $v_{\text{rakiety}} \geqslant \sqrt{\frac{GM_Z}{2R_Z}} \approx 5{,}6\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$, to rakieta nie powróciła na Ziemię. c) $v' = \sqrt{v_1^2 + GM_Z\left(\frac{2}{R_Z + h} - \frac{1}{2R_Z}\right)}$ d) $v'' = \sqrt{v_2^2 - \frac{GM_Z}{2R_Z}}$
116	7	a) $\omega_1 = \frac{16}{9}\omega$ b) $\frac{\Delta\rho}{\rho} \cdot 100\% = \frac{37}{27} \cdot 100\% \approx 137\%$ c) $\frac{g_1}{g} = \frac{16}{9} \approx 1{,}8$

Elementy astronomii

Strona	Nr zadania	Odpowiedź
		19. Jednostki odległości stosowane w astronomii
135	1	C
135	2	$t = \frac{2s}{c} \approx 29\,000\ \text{s} \approx 8\ \text{h}$

<table>
<tr><th>Strona</th><th>Nr zadania</th><th>Odpowiedź</th></tr>
<tr><td>135</td><td>4</td><td>a) $r \approx \frac{d}{\alpha} \approx 74$ m
b) $r \approx \frac{d}{\alpha} \approx 4{,}4$ km</td></tr>
<tr><td>135</td><td>5</td><td>$t = \frac{s}{v} \approx 6 \cdot 10^{12}$ s $\approx 200\,000$ lat</td></tr>
<tr><td>135</td><td>6</td><td>1. 14 cm; 2. 15 m; 3. 1,28 mm; 4. 0,348 mm; 5. 3,84 cm; 6. 1,43 cm; 7. 78 m; 8. 450 m; 9. 4000 km</td></tr>
<tr><td>135</td><td>7</td><td>a) $a = \sqrt[3]{\frac{T^2}{(1\text{ rok})^2}}$ au $\approx 17{,}9$ au
b) $r_A = 2a - r_P = 35{,}2$ au</td></tr>
<tr><td colspan="3">20. Nasza Galaktyka i jej miejsce we Wszechświecie</td></tr>
<tr><td>140</td><td>1</td><td>Ziemia–Słońce: ok. 0,1 mm, Słońce–Proxima Centauri: ok. 25 m</td></tr>
<tr><td>140</td><td>2</td><td>$t = \frac{2\pi r}{v} \approx 7 \cdot 10^{15}$ s ≈ 230 mln lat</td></tr>
<tr><td>140</td><td>3</td><td>A</td></tr>
<tr><td colspan="3">21. Prawo Hubble’a i teoria Wielkiego Wybuchu</td></tr>
<tr><td>147</td><td>1</td><td>$r \approx 450$ Mpc</td></tr>
<tr><td>147</td><td>2</td><td>$H = 2{,}2 \cdot 10^{-5} \frac{\text{km}}{\text{s} \cdot \text{ly}}$</td></tr>
<tr><td>147</td><td>3</td><td>13,3–14,5 mld lat</td></tr>
<tr><td colspan="3">Zadania powtórzeniowe</td></tr>
<tr><td>149</td><td>1</td><td>1F, 2P, 3P, 4P, 5F, 6F, 7F, 8F</td></tr>
<tr><td>149</td><td>2</td><td>A, C, D</td></tr>
<tr><td>149</td><td>3</td><td>3.1. $t = \frac{s}{c} = 500$ s $\approx 8{,}3$ min
3.2. B3
3.3.
<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th colspan="4">Odległość od Ziemi</th></tr>
<tr><th>A (km)</th><th>B (au)</th><th>C (ly)</th><th>D (pc)</th></tr>
<tr><td>Słońce</td><td>$1{,}5 \cdot 10^{8}$</td><td>1</td><td>$1{,}58 \cdot 10^{-5}$</td><td>$4{,}84 \cdot 10^{-6}$</td></tr>
<tr><td>Proxima Centauri</td><td>$4{,}02 \cdot 10^{13}$</td><td>268 000</td><td>4,23</td><td>1,30</td></tr>
<tr><td>Centrum Galaktyki</td><td>$2{,}52 \cdot 10^{17}$</td><td>$1{,}67 \cdot 10^{9}$</td><td>26 500</td><td>8130</td></tr>
<tr><td>Galaktyka Andromedy</td><td>$2{,}38 \cdot 10^{19}$</td><td>$1{,}58 \cdot 10^{11}$</td><td>$2{,}5 \cdot 10^{6}$</td><td>$7{,}67 \cdot 10^{5}$</td></tr>
<tr><td>Gromada galaktyk Virgo</td><td>$5{,}13 \cdot 10^{20}$</td><td>$3{,}41 \cdot 10^{12}$</td><td>$54 \cdot 10^{6}$</td><td>$1{,}66 \cdot 10^{7}$</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

Strona	Nr zadania	Odpowiedź
150	4	13 pc = 43 ly
150	5	5.1. A 5.2. 1F, 2P, 3P 5.3. $v = Hd \approx 22\,000\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$
150	6	2 mld lat < 3 mld lat

Ruch drgający harmoniczny

Strona	Nr zadania	Odpowiedź
22. Sprężystość jako makroskopowy efekt oddziaływań mikroskopowych		
154	1	a) $x_0 = 5$ cm b) $F_G = 0{,}6$ N, $F_D = 1{,}4$ N, obydwie siły zwrócone w górę c) dla $x_2 = 5$ cm: $F_G = 0$ N, $F_D = 2$ N w górę; dla $x_3 = 7$ cm: $F_G = 0{,}4$ N w dół, $F_D = 2{,}4$ N w górę
23. Ruch drgający harmoniczny		
160	2	$x = \frac{mg(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{k} \approx 0{,}28$ m
160	3	a) $a = \frac{F}{m+M} - fg \approx 3{,}0\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ b) $x = \frac{mF}{k(m+M)} = 0{,}04$ m
24. Matematyczny opis ruchu harmonicznego		
167	1	$x = 0{,}2$ m; $v_x = 0$; $a_x \approx -3{,}08\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
167	2	a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{mA}{F}} \approx 0{,}628$ s b) $x = 0{,}1\text{ m} \cdot \cos\left(10\,\frac{1}{\text{s}} \cdot t\right)$
167	3	a) $A = 0{,}1$ m b) $T = 2$ s; $\nu = \frac{1}{2}$ Hz c) $v_{\max} = \frac{2\pi A}{T} \approx 0{,}31\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $a_{\max} = \frac{4\pi^2 A}{T^2} \approx 0{,}99\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; $v_{śr} = \frac{4A}{T} = 0{,}2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$
25. Energia w ruchu harmonicznym		
170	1	$x = \frac{A\sqrt{2}}{2} \approx 7{,}1$ cm; $t = \frac{T}{8} = 0{,}02$ s
170	2	$E_k = 3E_p$

Strona	Nr zadania	Odpowiedź
		26. Wahadło matematyczne
175	2	$l \approx \frac{T_K^2}{24\pi^2} \cdot g_Z \approx \frac{1}{6}\ \mathrm{m} \approx 17\ \mathrm{cm}$
		27. Drgania wymuszone, rezonansowe i tłumione
180	2	$k = \frac{4\pi^2 m v^2}{l^2} \approx 2{,}5\ \frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{m}}$
180	4	$\frac{\Delta E}{E_0} = \frac{E_0 - E}{E_0} \approx 0{,}08 = 8\%$
		Zadania powtórzeniowe
184	1	1F, 2P, 3P, 4P
184	2	a) położenie równowagi; w lewo b) $T = 3{,}14\ \mathrm{s};\ \omega \approx 2\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}};\ v_{max} \approx 0{,}1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ d) $x(t) = 0{,}05\ \mathrm{m} \cdot \sin\left(2\ \frac{1}{\mathrm{s}} \cdot t + \pi\right)$
185	3	a) W tabeli: 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5 c) $k = 25\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$ d) Na podstawie wykresu: $E_p \approx 0{,}125$ J lub na podstawie wyników pomiarów z uwzględnieniem niepewności pomiaru wydłużenia x: $E_p = (0{,}1225 \pm 0{,}0025)$ J.
185	4	a) Prace wykonane podczas wydłużania sprężyny o kolejne jednakowe przyrosty długości. b) Należy zaznaczyć pod wykresem $F(x)$ pola figur odpowiadające kolejnym jednakowym przyrostom długości. c) Należy zaznaczyć na osi W kolejne odcinki odpowiadające jednakowym przyrostom długości.
186	5	B

Zjawiska termodynamiczne

Strona	Nr zadania	Odpowiedź
		28. Równowaga termodynamiczna. Zerowa zasada termodynamiki
190	3	$m_{cz} = \frac{M}{N_A} \approx 5{,}3 \cdot 10^{-26}\ \mathrm{kg};\ N = nN_A \approx 1{,}5 \cdot 10^{23}$
		29. Ciśnienie gazu w naczyniu zamkniętym
192	1	$p = \frac{2}{3} \cdot \frac{nN_A}{V}\bar{E}_k;\ p = \frac{1}{3} \cdot \frac{nM}{V}\overline{v^2}$
192	2	$\sqrt{\overline{v_{H_2}^2}} : \sqrt{\overline{v_{He}^2}} = \sqrt{\frac{M_{He}}{M_{H_2}}} = \sqrt{2}$

Strona	Nr zadania	Odpowiedź
192	3	a) $\bar{E}_{\mathrm{k}} = \frac{3pV}{2nN_{\mathrm{A}}} \approx 1{,}7 \cdot 10^{-21}\ \mathrm{J}$ b) $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3pV}{nM}} = 250\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
30. Równanie stanu gazu doskonałego. Równanie Clapeyrona		
195	1	a) $N = \frac{4\pi N_{\mathrm{A}} r^3 p}{3R(t + 273\ \mathrm{K})} \approx 1{,}0 \cdot 10^{21}$; $\frac{N}{N_{\mathrm{A}}} \approx 1{,}7 \cdot 10^{-3}$ mola b) $\frac{p'}{p} = \frac{t' + 273\ \mathrm{K}}{t + 273\ \mathrm{K}} \approx 1{,}24$
195	2	W temperaturze t: $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3R}{M}(t + 273\ \mathrm{K})} \approx 480\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ W temperaturze t': $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3R}{M}(t' + 273\ \mathrm{K})} \approx 540\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
195	3	$\lvert\Delta m\rvert = m_1 - m_2 = \frac{pVM}{R} \cdot \frac{T_2 - T_1}{T_1 T_2} \approx 34\ \mathrm{g}$
195	4	a) $p_{\mathrm{x}} = \frac{2pT_1T_2}{T_0(T_1 + T_2)}$ b) $\frac{m_2}{m_1 + m_2} = \frac{T_1}{T_1 + T_2}$
31. Szczególne przemiany gazu doskonałego		
199	1	$p = \frac{p_1V_1 + p_2V_2}{V_1 + V_2} = 4 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa}$
199	2	$T_1 = \frac{2}{3}T_0 = 182\ \mathrm{K} = -91^\circ\mathrm{C}$; $T_2 = lT_0 = 546\ \mathrm{K} = 273^\circ\mathrm{C}$
199	3	$\rho(T, p) = \frac{M}{R} \cdot \frac{p}{T}$; a) maleje; b) nie ulega zmianie; c) rośnie
32. Energia wewnętrzna gazu. Stopnie swobody		
202	1	a) $\Delta U_{\mathrm{N_2}} = \frac{5}{2}nR\Delta T \approx 4160\ \mathrm{J}$; $\Delta U_{\mathrm{He}} = \frac{3}{2}nR\Delta T \approx 2490\ \mathrm{J}$ b) $\Delta \bar{E}_{\mathrm{k\,N_2}} = \frac{5}{2}k\Delta T = 6{,}90 \cdot 10^{-21}\ \mathrm{J}$; $\Delta \bar{E}_{\mathrm{k\,He}} = \frac{3}{2}k\Delta T = 4{,}14 \cdot 10^{-21}\ \mathrm{J}$ c) dla azotu i helu $\Delta \bar{E}_{\mathrm{k\,post.}} = \frac{3}{2}k\Delta T = 4{,}14 \cdot 10^{-21}\ \mathrm{J}$
202	2	a) $\Delta U = \frac{i}{2}p\Delta V$ b) $\Delta U = \frac{i}{2}V\Delta p$
33. Pierwsza zasada termodynamiki		
207	2	Nie, przyrost energii wewnętrznej powietrza jest mniejszy od pobranego ciepła.
208	3	$W = \Delta U - Q = -1{,}01 \cdot 10^5\ \mathrm{J}$; $W_{\mathrm{gazu}} = -W = 1{,}01 \cdot 10^5\ \mathrm{J}$

Strona	Nr zadania	Odpowiedź
208	4	a) $W_{1\to2\to3} = 10$ J b) $W_{1\to3} = 8$ J c) W obu przemianach energia wewnętrzna gazu zmalała.
34. Szczególne przemiany gazu doskonałego a pierwsza zasada termodynamiki		
211	3	a) $v_x = -u - 2V$
35. Ciepło właściwe i ciepło molowe		
214	3	$C_w = Mc_w = 75{,}6\ \frac{\text{J}}{\text{mol}\cdot\text{K}}$
36. Energia wewnętrzna jako funkcja stanu		
217	2	$\Delta U_{(a)} = \Delta U_{(b)}$
37. Silniki cieplne. Odwracalny cykl Carnota		
226	1	$\eta = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$; $\eta_{C\ odwr} = 1 - \frac{T_1}{T_3}$
227	2	a) $Q = \frac{3}{2}(p_2V_2 - p_1V_1) + \frac{1}{2}(p_1 + p_2)(V_2 - V_1) = 38{,}5\cdot10^3$ J b) $\eta = \frac{W_{gazu}}{Q} = \frac{(V_2 - V_1)(p_2 - p_1)}{2Q} \approx 16\%$, gdzie Q to ciepło pobrane w jednym cyklu
227	3	$\eta = \frac{Ps}{\upsilon\rho Vc_s} \approx 35\%$
227	4	$Q_2 \approx 8{,}2\cdot10^8$ J
39. Przejścia fazowe		
239	3	$Q \approx 1{,}50\cdot10^6$ J; na wyparowanie wody należy dostarczyć ok. $1{,}13\cdot10^6$ J, co stanowi ok. 75% całkowitej ilości ciepła.
40. Para nasycona i para nienasycona		
242	1	Na skutek znacznego obniżenia ciśnienia pary wodnej w zbiorniku woda gwałtownie paruje; parując, pobiera ciepło na parowanie. Obniżenie temperatury jest tak duże, że pozostała woda krzepnie.
41. Rozszerzalność temperaturowa ciał		
246	1	$\lambda = (1{,}7\pm0{,}1)\cdot10^{-5}\ \frac{1}{\text{K}}$; $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx 6\%$
246	2	$\Delta l \approx \lambda l(t_0 - t) \approx -6{,}5\cdot10^{-3}$m $= -6{,}5$ mm
246	3	$\Delta\tau = 24\cdot3600\ \text{s}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\lambda t}}\right) \approx 13$ s
246	4	$\rho = \frac{\rho_0}{1+\alpha(t - t_0)} \approx 13{,}475\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

Strona	Nr zadania	Odpowiedź
246	5	$\Delta h = \frac{\alpha F_c \Delta t}{Sg\rho_0} \approx 1{,}8 \cdot 10^{-3}$ m = 1,8 mm
***42. Transport energii przez przewodnictwo i konwekcję**		
252	6	$\frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} = \frac{k_2}{k_1}$
Zadania powtórzeniowe		
261	1	$N \approx 2{,}7 \cdot 10^{19}$; $n \approx 4{,}5 \cdot 10^{-5}$ mola
261	2	A, D
262	3	a) $W = -1{,}5$ kJ b) $\Delta U = \frac{3}{2}(p_2V_2 - p_1V_1) = 6$ kJ c) $Q = \Delta U - W = 7{,}5$ kJ
262	4	B
262	5	1D, 2E, 3C, 4B
263	7	7.1. 1D, 2C, 3B, 4A 7.2. 1F, 2P, 3P, 4F, 5F 7.3. $Q_{1\to2} = \frac{5}{2}p_1V_1$; $\lvert Q_{2\to3}\rvert = \frac{33}{16}p_1V_1$; $\lvert W\rvert = \frac{7}{16}p_1V_1$; $\eta = 17{,}5\%$ 7.4. $\eta_C = 1 - \frac{T_3}{T_2}$; $T_2 = \frac{p_1V_2}{nR}$; $T_3 = \frac{p_1V_2}{3{,}2nR}$; $\eta_C \approx 69\%$
264	8	a) $\Delta r = \lambda r_0 \Delta T = 8{,}8 \cdot 10^{-3}$ cm $\approx 0{,}09$ mm b) $\beta \approx 2\lambda$; $\Delta S \approx 8\pi\lambda r_0^2 \Delta T \approx 0{,}44$ cm^2 c) $\Delta V \approx 4\pi\lambda r_0^3 \Delta T \approx 0{,}44$ cm^3

Pole elektrostatyczne

Strona	Nr zadania	Odpowiedź
43. Wzajemne oddziaływanie ciał naelektryzowanych		
272	1	$F = \frac{4k_0q}{d^2}(Q_2 - Q_1) = 1{,}8 \cdot 10^{-4}$ N; zwrot siły do ładunku Q_1
44. Natężenie pola elektrostatycznego		
280	2	$E = \frac{2\sqrt{2}k_0}{a^2}(Q_3 - Q_1) \approx 2{,}5 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{C}}$; zwrot w górę
280	3	$\vec{E} = \vec{0}$
280	4	W każdym punkcie leżącym na symetralnej pręta wektor $\vec{E}$ jest prostopadły do pręta.
280	5	$E = \frac{8k_0Ql}{\left(\sqrt{l^2 + 4d^2}\right)^3}$

Strona	Nr zadania	Odpowiedź
45. Naelektryzowany przewodnik		
285	2	Przewodnik zostanie silniej naelektryzowany, gdy dotkniemy go kulką od wewnątrz.
46. Przewodnik w polu elektrostatycznym		
287	1	Nie można.
287	2	W każdym przypadku wewnątrz przewodnika $\vec{E} = \vec{0}$.
287	3	Nie ulegnie zmianie.
47. Analogie w opisie pól grawitacyjnego i elektrostatycznego		
293	1	$W_z = k_0 q_A q_B \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{r}\right) \approx 0{,}5\ \text{J}$
293	2	Nie można.
293	3	Brak różnicy potencjałów między przewodnikami.
293	4	$W_{pola} = \frac{k_0 q}{l}(Q_1 + Q_2)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx -0{,}16\ \text{J}$
293	5	$V = \frac{V_1 r_1 + V_2 r_2}{r_1 + r_2} = 3800\ \text{V}$
293	6	$r_2 = \frac{(V_1 - V_2) r_1}{V_2} = 0{,}03\ \text{m}$
49. Kondensator		
303	1	a) $Q = \frac{\varepsilon_0 S U}{d} \approx 1{,}8\ \text{nC}$ b) $E = \frac{U}{d} = 20\ \frac{\text{kV}}{\text{m}}$
303	2	$U_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} U = 1\ \text{V}$
303	3	Ładunek dwukrotnie wzrośnie.
50. Dielektryk w polu elektrostatycznym		
307	1	$S = \frac{C_z d}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \approx 0{,}16\ \text{m}^2$
307	2	a) $F_1 = \frac{F}{\varepsilon_r}$ b) $F_2 = \varepsilon_r F$
51. Energia naładowanego kondensatora		
309	1	C zmaleje, Q i E nie zmienią się, U i E_p wzrosną.
310	2	U nie zmieni się, pozostałe wielkości zmaleją.

Strona	Nr zadania	Odpowiedź
310	*3	a) $W = \frac{\varepsilon_0 S U_0^2}{2l_1}\left(\frac{l_2}{l_1} - 1\right) \approx 7{,}1 \cdot 10^{-6}$ J b) $W = \frac{\varepsilon_0 S U_0^2}{2}\left(\frac{1}{l_1} - \frac{1}{l_2}\right) \approx 4{,}3 \cdot 10^{-6}$ J W przypadku b wykonana praca jest równa sumie zmian energii kondensatora i źródła napięcia.
310	4	a) Kolejno wykonane prace są coraz mniejsze.
310	*5	a) $E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \cdot U^2 = 7{,}2 \cdot 10^{-2}$ J b) $E_\mathrm{p} = \frac{2C_1^2 C_2^2}{(C_1 + C_2)^3} \cdot U^2 \approx 4{,}6 \cdot 10^{-2}$ J c) $E_\mathrm{p} = 0$
52. Ruch naładowanej cząstki w polu elektrostatycznym		
314	1	a) $a = \frac{qU_0}{md}$ b) $v = \sqrt{\frac{2qU_0 s}{md}}$ c) $p = \sqrt{2mqU}$
314	2	b) $v_0 = \sqrt{\frac{2eU_1}{m}} = 1{,}2 \cdot 10^7 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$; $t = l\sqrt{\frac{m}{2eU_1}} \approx 6{,}7 \cdot 10^{-9}$ s c) $a = \frac{eU_2}{md} = 1{,}8 \cdot 10^{14} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ d) $y = \frac{l^2 U_2}{4dU_1} = 4$ mm
314	*3	$E_\mathrm{max} = \frac{v_0^2 \cos^2\alpha}{2\frac{e}{m}d} \approx 210 \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$
314	4	$\frac{\Delta E_\mathrm{k}}{E_\mathrm{k0}} = \frac{2\lvert q\rvert U}{mv_0^2}$
Zadania powtórzeniowe		
322	1	1.1. Obydwa obiekty poruszają się wzdłuż linii pola ruchem jednostajnie przyspieszonym pod wpływem stałych sił: elektrostatycznej i grawitacji. 1.2. Przyspieszenie ciała spadającego w polu grawitacyjnym nie zależy od jego masy, a przyspieszenie cząstki naładowanej w polu elektrostatycznym jest odwrotnie proporcjonalne do jej masy.
322	2	a) $\vec{E} = \vec{0}$ w odległości $x = d$ od ładunku Q po jego lewej stronie. b) $V = 0$ w punkcie leżącym pomiędzy ładunkami w odległości $x_1 = \frac{d}{5}$ od ładunku Q oraz w punkcie leżącym w odległości $x_2 = \frac{d}{3}$ od ładunku Q na zewnątrz odcinka łączącego ładunki.

Odpowiedzi do zadań

Strona	Nr zadania	Odpowiedź
322	3	1B, 2C, 3B, 4A, 5B
323	4	4.1. $U_{max} = \frac{mv_0^2}{2e} \approx 3$ V 4.2. 1F, 2P, 3F
324	5	5.3. $q = 2l \sin\alpha \sqrt{\frac{mg \cdot \mathrm{tg}\alpha}{k_0}} \approx 0{,}14$ μC 5.4. A–1
324	6	Q nie zmieni się, C wzrośnie, U, E, E_p zmaleją.
324	7	U i E nie zmienią się, C, Q, E_p wzrosną.
325	8	b) 1. $V_P = 10$ V 2. $V_P = 30$ V
325	9	9.1. $E_p = -\frac{Gm^2}{d}$; $E_c = mv^2 - \frac{Gm^2}{2r}$ 9.2. $v = \sqrt{Gm\left(\frac{1}{2r} - \frac{1}{d}\right)}$ 9.3. Zasada zachowania energii mechanicznej. 9.4. $v \approx 2{,}45 \cdot 10^{-5} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 8{,}8 \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{h}}$ 9.5. Kulki zbliżały się do siebie ruchem niejednostajnie przyspieszonym ze wzrastającym przyspieszeniem. 9.6. $v_{min} = \sqrt{\frac{Gm}{2r}} \approx 2{,}58 \cdot 10^{-5} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 9{,}3 \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{h}}$ 9.7. Oddziaływanie grawitacyjne jest bardzo słabym oddziaływaniem. 9.8. 1P, 2P, 3P, 4F

W tabeli podano wartości przybliżone.

Stała	Wartość
Wartość przyspieszenia ziemskiego	$g = 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
Stała grawitacji	$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2}$
Średni promień Ziemi	$R_\mathrm{Z} = 6370\,\mathrm{km}$
Masa Ziemi	$M_\mathrm{Z} = 5{,}98 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$
Średnia odległość Ziemia–Księżyc	$d = 3{,}84 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m}$
Masa Słońca	$M_\mathrm{S} = 1{,}99 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$
Promień Słońca	$R_\mathrm{S} = 6{,}96 \cdot 10^{5}\,\mathrm{km}$
Jednostka astronomiczna	$1\,\mathrm{j.a.} = 1\,\mathrm{au} = 1{,}50 \cdot 10^{8}\,\mathrm{km}$
Parsek	$1\,\mathrm{pc} = 3{,}09 \cdot 10^{16}\,\mathrm{m}$
Stała Hubble'a	$H = 71\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s} \cdot \mathrm{Mpc}}$
Wartość pierwszej prędkości kosmicznej dla Ziemi	$v_\mathrm{I} = 7{,}91\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$
Wartość drugiej prędkości kosmicznej dla Ziemi	$v_\mathrm{II} = 11{,}2\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$
Liczba Avogadra	$N_\mathrm{A} = 6{,}02 \cdot 10^{23}\ \frac{1}{\mathrm{mol}}$
Objętość molowa gazu doskonałego w warunkach normalnych ($T_0 = 273{,}15$ K, $p_0 = 101\,325$ Pa)	$V = 22{,}4\ \mathrm{dm}^3$
Stała gazowa	$R = 8{,}31\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol} \cdot \mathrm{K}}$
Stała Boltzmanna	$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$
Ciśnienie atmosferyczne normalne	$p_0 = 101\ 325\,\mathrm{Pa}$
Temperatura zera absolutnego	$T_0 = 0\ \mathrm{K} = -273{,}15^\circ\mathrm{C}$
Współczynnik w prawie Coulomba	$k_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8{,}99 \cdot 10^{9}\ \frac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{C}^2}$
Ładunek elementarny	$e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$

Stałe fizyczne

Stała	Wartość
Masa protonu	$m_p = 1{,}673 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$
Masa neutronu	$m_n = 1{,}675 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$
Masa elektronu	$m_e = 9{,}110 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}$
Wartość prędkości światła w próżni	$c = 3{,}00 \cdot 10^{8}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
Przenikalność elektryczna próżni	$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2}$
Przenikalność magnetyczna próżni	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2} = 1{,}26 \cdot 10^{-6}\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2}$
Stała Plancka	$h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J} \cdot \mathrm{s}$
Stała Rydberga	$R = 1{,}10 \cdot 10^{7}\ \frac{1}{\mathrm{m}}$

Wartości funkcji trygonometrycznych

kąt α	sin α	cos α	tg α
0°	0,0000	1,0000	0,0000
1°	0,0175	0,9998	0,0175
2°	0,0349	0,9994	0,0349
3°	0,0523	0,9986	0,0524
4°	0,0698	0,9976	0,0699
5°	0,0872	0,9962	0,0875
6°	0,1045	0,9945	0,1051
7°	0,1219	0,9925	0,1228
8°	0,1392	0,9903	0,1405
9°	0,1564	0,9877	0,1584
10°	0,1736	0,9848	0,1763
11°	0,1908	0,9816	0,1944
12°	0,2079	0,9781	0,2126
13°	0,2250	0,9744	0,2309
14°	0,2419	0,9703	0,2493
15°	0,2588	0,9659	0,2679
16°	0,2756	0,9613	0,2867
17°	0,2924	0,9563	0,3057
18°	0,3090	0,9511	0,3249
19°	0,3256	0,9455	0,3443
20°	0,3420	0,9397	0,3640
21°	0,3584	0,9336	0,3839
22°	0,3746	0,9272	0,4040
23°	0,3907	0,9205	0,4245
24°	0,4067	0,9135	0,4452
25°	0,4226	0,9063	0,4663
26°	0,4384	0,8988	0,4877
27°	0,4540	0,8910	0,5095
28°	0,4695	0,8829	0,5317
29°	0,4848	0,8746	0,5543
30°	0,5000	0,8660	0,5774
31°	0,5150	0,8572	0,6009
32°	0,5299	0,8480	0,6249
33°	0,5446	0,8387	0,6494
34°	0,5592	0,8290	0,6745
35°	0,5736	0,8192	0,7002
36°	0,5878	0,8090	0,7265
37°	0,6018	0,7986	0,7536
38°	0,6157	0,7880	0,7813
39°	0,6293	0,7771	0,8098
40°	0,6428	0,7660	0,8391
41°	0,6561	0,7547	0,8693
42°	0,6691	0,7431	0,9004
43°	0,6820	0,7314	0,9325
44°	0,6947	0,7193	0,9657
45°	0,7071	0,7071	1,0000

kąt α	sin α	cos α	tg α
45°	0,7071	0,7071	1,0000
46°	0,7193	0,6947	1,0355
47°	0,7314	0,6820	1,0724
48°	0,7431	0,6691	1,1106
49°	0,7547	0,6561	1,1504
50°	0,7660	0,6428	1,1918
51°	0,7771	0,6293	1,2349
52°	0,7880	0,6157	1,2799
53°	0,7986	0,6018	1,3270
54°	0,8090	0,5878	1,3764
55°	0,8192	0,5736	1,4281
56°	0,8290	0,5592	1,4826
57°	0,8387	0,5446	1,5399
58°	0,8480	0,5299	1,6003
59°	0,8572	0,5150	1,6643
60°	0,8660	0,5000	1,7321
61°	0,8746	0,4848	1,8040
62°	0,8829	0,4695	1,8807
63°	0,8910	0,4540	1,9626
64°	0,8988	0,4384	2,0503
65°	0,9063	0,4226	2,1445
66°	0,9135	0,4067	2,2460
67°	0,9205	0,3907	2,3559
68°	0,9272	0,3746	2,4751
69°	0,9336	0,3584	2,6051
70°	0,9397	0,3420	2,7475
71°	0,9455	0,3256	2,9042
72°	0,9511	0,3090	3,0777
73°	0,9563	0,2924	3,2709
74°	0,9613	0,2756	3,4874
75°	0,9659	0,2588	3,7321
76°	0,9703	0,2419	4,0108
77°	0,9744	0,2250	4,3315
78°	0,9781	0,2079	4,7046
79°	0,9816	0,1908	5,1446
80°	0,9848	0,1736	5,6713
81°	0,9877	0,1564	6,3138
82°	0,9903	0,1392	7,1154
83°	0,9925	0,1219	8,1443
84°	0,9945	0,1045	9,5144
85°	0,9962	0,0872	11,4301
86°	0,9976	0,0698	14,3007
87°	0,9986	0,0523	19,0811
88°	0,9994	0,0349	28,6363
89°	0,9998	0,0175	57,2900
90°	1,0000	0,0000	nie istnieje

A
adiabata [*adiabat*] 210
akcelerator liniowy [*linear particle accelerator, linac*] 313
amplituda [*amplitude*] 156
anomalna rozszerzalność wody [*anomalous thermal expansion of water*] 246

B
bryła sztywna [*rigid body*] 10

C
ciepło [*heat*] 204, 207
ciepło molowe [*molar heat capacity*] 212
ciepło parowania [*heat of vaporization*] 236
ciepło spalania [*heat of combustion*] 222
ciepło topnienia [*heat of fusion*] 235
ciepło właściwe [*specific heat capacity*] 212
ciężar ciała [*weight*] 87
ciśnienie gazu w naczyniu zamkniętym [*pressure of a gas in a closed container*] 191
ciśnienie pary nasyconej [*equilibrium vapour pressure*] 240
cykl Carnota [*Carnot cycle*] 219
cykl pracy silnika spalinowego [*cycle of an internal combustion engine*] 222
czarna dziura [*black hole*] 139
częstość kołowa [*angular frequency*] 166
częstotliwość [*frequency*] 156
częstotliwość drgań własnych [*natural frequency*] 176
częstotliwość rezonansowa [*resonant frequency*] 177

D
dielektryk [*dielectric*] 304
dipol elektryczny [*electric dipole*] 276
drgania tłumione [*damped oscillations*] 177
drgania wymuszone [*forced oscillations*] 176
Droga Mleczna, Galaktyka [*Milky Way, Galaxy*] 136
dyfuzja [*diffusion*] 188
dźwignia [*lever*] 32

E
efekt cieplarniany [*greenhouse effect*] 122
egzoplaneta, planeta pozasłoneczna [*exoplanet, extrasolar planet*] 118
elektronowolt [*electronvolt*] 300
elektrony swobodne [*free electrons*] 266
energia kinetyczna ruchu obrotowego [*rotational kinetic energy*] 18
energia naładowanego kondensatora [*energy stored in a capacitor*] 308
energia potencjalna elektrostatyczna [*electrostatic potential energy*] 289
energia potencjalna grawitacyjna [*gravitational potential energy*] 96
energia potencjalna sprężystości [*elastic potential energy*] 168
energia w ruchu harmonicznym [*total energy in simple harmonic motion*] 169
energia wewnętrzna gazu doskonałego [*internal energy of an ideal gas*] 202, 215
entropia [*entropy*] 228

F
farad [*farad*] 297
faza ciekła [*liquid phase*] 235
faza drgań [*phase angle*] 163
faza gazowa [*gaseous phase*] 236
faza stała [*solid phase*] 235
funkcja stanu [*function of state*] 215, 230

G
galaktyki [*galaxies*] 140
gaz doskonały [*ideal gas*] 191, 200
gaz rzeczywisty [*real gas*] 202
gęstość powierzchniowa ładunku [*surface charge density*] 282
Grupa Lokalna [*Local Group*] 139

I
iloczyn wektorowy [*cross product*] 8
indukcja elektrostatyczna [*electrostatic induction*] 271
izobara [*isobar*] 198
izochora [*isochor*] 197
izochronizm [*isochronism*] 173
izolator [*insulator*] 248
izoterma [*isotherm*] 197
izotermiczne rozprężanie [*isotermal expansion*] 209
izotermiczne sprężanie [*isotermal compression*] 209

J
jednostka astronomiczna [*astronomical unit*] 129

K
kometa [*comet*] 127
kondensator [*capacitor*] 299
kondensator płaski [*parallel-plate capacitor*] 299
konwekcja [*convection*] 250

L
lampa oscyloskopowa [*oscilloscope tube*] 311
liczba Avogadra [*Avogadro's number*] 190
linie pola elektrostatycznego [*electrostatic field lines*] 274
linie pola grawitacyjnego [*gravitational field lines*] 82

Ł
ładunek elektronu [*electron charge*] 266
ładunek elementarny [*elementary charge*] 266
ładunek próbny [*test charge*] 273, 287
łączenie kondensatorów równoległe [*capacitors in parallel*] 302
łączenie kondensatorów szeregowe [*capacitors in series*] 301

M
masa bezwładna [*inertial mass*] 74
masa grawitacyjna [*gravitational mass*] 74
masa molowa [*molar mass*] 190
meteoroid [*meteoroid*] 126
moment bezwładności [*moment of inertia*] 18, 21
moment pędu [*angular momentum*] 39
moment siły [*moment of force, torque*] 25

N
napięcie elektryczne [*voltage, electric potential difference*] 299
natężenie pola elektrostatycznego [*electric field*] 273
natężenie pola elektrostatycznego w kondensatorze płaskim [*electric field in a parallel-plate capacitor*] 300
natężenie pola grawitacyjnego [*gravitational field*] 83

O
okres drgań [*period of oscillations*] 156
okres drgań w ruchu harmonicznym [*period of simple harmonic motion*] 166
okres drgań wahadła matematycznego [*period of a simple pendulum*] 172
oscylator harmoniczny [*harmonic oscillator*] 166

P
para nasycona [*saturated vapour*] 240
para nienasycona [*unsaturated vapour*] 240
paralaksa heliocentryczna [*annual parallax*] 131
parowanie [*vaporization*] 236
parsek [*parsec*] 132
perpetuum mobile drugiego rodzaju [*perpetual motion machine of the second kind*] 225
planeta [*planet*] 119
planeta karłowata [*dwarf planet*] 126
planetoida [*asteroid*] 125
pojemność cieplna [*heat capacity, thermal capacity*] 212
pojemność elektryczna [*capacitance*] 296
pojemność elektryczna kondensatora [*capacitance of a capacitor*] 299, 305
pole elektrostatyczne [*electrostatic field*] 273
pole elektrostatyczne centralne [*electrostatic field*] 274
pole elektrostatyczne jednorodne [*uniform electrostatic field*] 276, 300
pole elektrostatyczne wewnątrz przewodnika [*electrostatic field inside a conductor*] 286
pole grawitacyjne [*gravitational field*] 81
położenie równowagi [*equilibrium position*] 156
potencjał elektrostatyczny [*electrostatic potential*] 291
potencjał pola grawitacyjnego [*gravitational potential*] 98
praca gazu [*work done by a gas*] 205
praca objętościowa [*work done in a volume change*] 204
praca siły zewnętrznej [*work done on a gas*] 204
praca w polu elektrostatycznym [*work in electrostatic field*] 289

prawo Boyle'a [*Boyle's law*] 196
prawo Charles'a [*Charles's law*] 197
prawo Coulomba [*Coulomb's law*] 267
prawo Gay-Lussaca [*Gay-Lussac's law*] 198
prawo Hubble'a [*Hubble's law*] 142
prawo Keplera drugie [*Kepler's second law*] 66
prawo Keplera pierwsze [*Kepler's first law*] 66
prawo Keplera trzecie [*Kepler's third law*] 67
prawo powszechnej grawitacji [*Newton's law of universal gravitation*] 71
prędkość kątowa [*angular velocity*] 12
prędkość kosmiczna druga [*escape velocity*] 101
prędkość kosmiczna pierwsza [*velocity of a satellite in a circular orbit*] 77
prędkość w ruchu harmonicznym [*velocity in simple harmonic motion*] 158, 162
proces kwazistatyczny [*quasi-static process*] 196, 221
proces nieodwracalny [*irreversible process*] 221
proces odwracalny [*reversible process*] 221
przeciążenie [*g-force*] 104
przejścia fazowe [*phase changes*] 235
przemiana adiabatyczna [*adiabatic process*] 210
przemiana gazu doskonałego [*thermodynamic process for an ideal gas*] 196
przemiana izobaryczna [*isobaric process*] 198, 210
przemiana izochoryczna [*isochoric process*] 197, 209
przemiana izotermiczna [*isothermal process*] 196, 209
przenikalność elektryczna próżni [*vacuum permittivity*] 267
przewodnictwo cieplne [*thermal conductivity*] 247
przyspieszenie grawitacyjne [*gravitational acceleration*] 86
przyspieszenie kątowe [*angular acceleration*] 13
punkt potrójny [*triple point*] 242

R

reguła prawej dłoni [*right-hand rule*] 8
reguła śruby prawoskrętnej [*right-hand screw rule*] 9
rezonans mechaniczny [*mechanical resonance*] 177
rok świetlny [*light-year*] 130
rozszerzalność temperaturowa [*thermal expansion*] 243
równanie Clapeyrona [*ideal gas law, general gas equation*] 194
równanie stanu gazu doskonałego [*ideal gas equation*] 194
równowaga termodynamiczna [*thermal equilibrium*] 189
różnica potencjałów [*electric potential difference*] 292, 295
ruch chaotyczny [*chaotic motion*] 200
ruch drgający [*periodic motion*] 155
ruch drgający harmoniczny [*simple harmonic motion*] 155
ruch naładowanej cząstki w polu elektrycznym [*motion of a charged particle in an electric field*] 311
ruch obrotowy [*rotational motion*] 10
ruch postępowy cząsteczek gazu [*translational motion of gas molecules*] 191

S

silnik Carnota [*Carnot engine*] 219
silnik cieplny [*heat engine*] 218
silnik spalinowy [*internal combustion engine*] 222
siła elektrostatyczna [*electrostatic force*] 267
siła grawitacji [*gravitational force*] 70
siła kulombowska [*Coulomb force*] 267
siła sprężystości [*elastic force*] 152
siła zachowawcza [*conservative force*] 91
siły międzycząsteczkowe [*intermolecular forces*] 191
Słońce [*Sun*] 118
sprawność silnika cieplnego [*efficiency of a heat engine*] 220
stała Boltzmanna [*Boltzmann constant*] 194
stała dielektryczna [*dielectric constant*] 305
stała gazowa [*gas constant*] 194
stała grawitacji [*gravitational constant*] 71
stała Hubble'a [*Hubble constant*] 142
stan nieważkości [*weightlessness*] 105
stopnie swobody [*degrees of freedom*] 201

szybkość kątowa [*angular speed*] 12
szybkość kwadratowa średnia [*root-mean--square speed*] 192

Ś

średnia energia kinetyczna cząsteczek gazu [*average kinetic energy of gas molecules*] 191, 195

T

temperatura bezwzględna [*absolute temperature*] 193
temperatura topnienia [*melting point*] 236
temperatura wrzenia [*boiling point*] 236
teoria geocentryczna [*geocentrism*] 64
teoria heliocentryczna [*heliocentrism*] 64
teoria kinetyczno-molekularna [*kinetic--molecular model*] 188, 191
toczenie [*rolling*] 48
topnienie [*melting*] 235
transport energii [*energy transfer*] 247
twierdzenie Steinera [*parallel axis theorem, Steiner's theorem*] 21

U

Układ Słoneczny [*Solar System*] 118

W

wahadło matematyczne [*simple pendulum*] 171
warunki normalne [*standard conditions*] 194
Wielki Wybuch [*Big Bang*] 145
wolt [*volt*] 291
wrzenie [*boiling*] 236
współczynnik cieplnego przewodnictwa właściwego [*thermal conductivity constant*] 249
współczynnik rozszerzalności liniowej [*coefficient of linear expansion*] 243
współczynnik rozszerzalności objętościowej [*coefficient of volume expansion*] 243

Z

zasada ekwipartycji energii [*principle of equipartition of energy*] 201
zasada równoważności [*equivalence principle*] 107
zasada superpozycji [*principle of superposition*] 83, 276, 293
zasada termodynamiki druga [*second law of thermodynamics*] 225, 230
zasada termodynamiki pierwsza [*first law of thermodynamics*] 204
zasada termodynamiki zerowa [*zeroth law of thermodynamics*] 190
zasada zachowania energii mechanicznej [*principle of mechanical energy conservation*] 169
zasada zachowania ładunku [*principle of charge conservation*] 272
zasada zachowania momentu pędu [*principle of conservation of angular momentum*] 41
zasady dynamiki ruchu obrotowego [*Newton's laws for rotation*] 26

Źródła ilustracji i fotografii

Okładka: (Droga Mleczna i błyskawica) Ivan Pedretti/Rest.house srl

Tekst główny: s. 7 (gimnastyk na drążku) H2T/Science Photo Library/East News; s. 8 (wkręcanie śruby) evkaz/Shutterstock.com, (dłoń z uniesionym kciukiem x2) Business stock/Shutterstock.com; s. 10 (wirująca piłka do koszykówki) bymuratdeniz/E+/Getty Images; s. 11 (śruba okrętowa) Iakov Filimonov/Shutterstock.com, (mężczyzna) Just dance/Shutterstock.com; s. 15 (cyklony) MikeMareen/iStockphoto/Getty Images; s. 17 (koło zamachowe) mgfoto/E+/Getty Images; s. 22 (koło zamachowe w systemie KERS) Volvo, (schemat systemu KERS) news.cision.com; s.24 (dzieci na karuzeli) Oleg Mikhaylov/Shutterstock.com; s. 32 (ręka mechanika z kluczem) Zephyr_p/Shutterstock.com; s. 36 (Stonehenge) VLukas/iStockphoto/Getty Images, (grobowiec na Malcie) arkanto/iStockphoto/Getty Images, (menhiry w Szkocji) oriredmouse/iStock Unreleased/Getty Images; s. 37 (studnia z wiadrem) koya979/Shutterstock.com; s. 39 (bąk zabawka) Ruta Saulyte-Laurinaviciene/Shutterstock.com; s. 41 (łyżwiarka x2) technotr/iStockphoto/Getty Images; s. 42 (żyroskop) Fouad A.Saad/Shutterstock.com; s. 44 (wirujący bąk) BrunoWeltmann/Schutterstock.com; s. 47 (helikopter) JohnnyPowell/E+/Getty Images; s. 48 (walec drogowy) Eric Buermeyer/Shutterstock.com, (koło roweru) Wojciech Wójtowicz/WSiP; s. 55 (wkręcanie śruby) evkaz/Shutterstock.com, (wirująca piłka do koszykówki) bymuratdeniz/E+/Getty Images, (koło zamachowe) mgfoto/E+/Getty Images; s. 56 (dzieci na karuzeli) Oleg Mikhaylov/Shutterstock.com; s. 57 (ręka mechanika z kluczem) Zephyr_p/Shutterstock.com, (bąk zabawka) Ruta Saulyte-Laurinaviciene/Shutterstock.com; s. 58 (helikopter) JohnnyPowell/E+/Getty Images; s. 59 (walec drogowy) Eric Buermeyer/Shutterstock.com; s. 60 (nóż) exopixel/Shutterstock.com; s. 63 (kosmonauta) NASA; s. 64 (astrolabium) DETLEV VAN RAVENSWAAY/SCIENCE PHOTO LIBRARY/East News, (model geocentryczny) Grzegorz Petka/Wikipedia [Public Domain]; s. 65 (Kopernik) Bridgeman Images/PhotoPower, (strona z *De revolutionibus…*) Public Domain, (Kepler) Public Domain; s. 69 (jabłko) Iurii Malaschenko/iStockphoto/Getty Images; s. 71 (Ziemia i Księżyc) Sailorr/Shutterstock.com; s. 72 (północna półkula Ziemi) pegasusa012/Shutterstock.com, (przypływ) gqxue/iStockphoto/Getty Images; s. 73 (odpływ) Ran Dembo/RnDmS/iStock Editorial/Getty Images; s. 76 (anteny satelitarne) W.Kulczycki/Shutterstock.com; s. 77 (Ziemia i satelita) robert_s/Shutterstock.com; s. 78 (północna półkula Ziemi) pegasusa012/Shutterstock.com; s. 79 (północna półkula Ziemi) pegasusa012/Shutterstock.com, (szkic z pracy Newtona) Public Domain; s. 80 (satelity GPS) NOAA, (nawigacja satelitarna) angelh/Shutterstock.com; s. 81 (start promu kosmicznego) NASA/Marshall Space Flight Center; s. 91 (sonda na tle Saturna) JPL/NASA/Wikipedia; s. 94 (satelita nad Ziemią) Andrey Armyagov/Shutterstock.com; s. 98 (kosmonauta) NASA; s. 101 (Voyager) NASA; s. 103 (ISS) NASA/Paolo Nespoli, (rakieta) Denis Rozhnovsky/Shutterstock.com; s. 104 (reakcja człowieka na przeciążenie) NASA/SCIENCE PHOTO LIBRARY/East News; s. 106 (w stanie nieważkości) NASA; s. 109 (astrolabium) DETLEV VAN RAVENSWAAY/SCIENCE PHOTO LIBRARY/East News, (jabłko) Iurii Malaschenko/iStockphoto/Getty Images; s. 110 (anteny satelitarne) W.Kulczycki/Shutterstock.com, (start promu kosmicznego) NASA/Marshall Space Flight Center; s. 111 (sonda na tle Saturna) JPL/NASA/Wikipedia; s. 112 (satelita nad Ziemią) Andrey Armyagov/Shutterstock.com, (kosmonauta) NASA; s. 113 (Voyager) NASA, (ISS) NASA/Paolo Nespoli; s. 114 (Ziemia) pegasusa012/Shutterstock.com; s. 117 (rozgwieżdżone niebo z Orionem) Rastan/iStockphoto/Getty Images; s. 118 (wschód Ziemi na Księżycu) Elena11/Shutterstock.com; s. 119 (Neptun) NASA/JPL; s. 120–121 (Układ Słoneczny) shooarts/Shutterstock.com; s. 122 (kratery na Wenus) NASA/JPL, (kratery na Marsie) NASA/Wikipedia; s. 123 (Deimos) NASA/JPL-Caltech/University of Arizona, (Fobos) NASA/JPL-Caltech/University of Arizona; s. 124 (Jowisz i jego Galileuszowe księżyce) NASA/JPL/DLR, (Tytan i pierścienie Saturna) manjikiStockphoto/Getty Images; s. 125 (Gaspra) NASA/JPL/USGS, (Krater Barringera) Nikolas_jkd/iStockphoto/Getty Images; s. 126 (Ceres) NASA/JPL-Caltech/UCLA/MPS/DLR/IDA, (Pluton) Johns Hopkins University Applied Physics Laboratory/Southwest Research Institute/NASA; s. 128 (fresk Giotta) Public Domain, (kometa Halleya) ESA/MPS; s. 129 (zaćmienie Słońca) muratart/Shutterstock.com; s. 130 (rysunek z *De revolutionibus…*) Public Domain; s. 134 (Wielka i Mała Niedźwiedzica) Ja'Crispy/iStockphoto/Getty Images; s. 136 (Galaktyka widok z góry) NASA/JPL-Caltech; (Droga Mleczna) jcami/Shutterstock.com; s. 137 (galaktyka Igła) Giovanni Benintende/Shutterstock.com; s. 138 (galaktyka Wiatraczek) NASA images/Shutterstock.com, (Filary stworzenia) NASA, ESA/Hubble and the Hubble Heritage Team; s. 139 (galaktyka Andromedy) chayaphon phanitloet/Shutterstock.com; s. 140 (galaktyki) NASA, ESA, G.Illingworth and D.Magee (University of California, Santa Cruz), K.Whi-

taker (University of Connecticut), R.Bouwens (Leiden University), P.Oesch (University of Geneva), and the Hubble Legacy Field team; s. 141 (teleskop Hubble'a) NASA, (Hubble) Pictorial Press Ltd/Alamy Stock Photo/BE&W, (obserwatorium Mount Wilson) Jeff Dai/Stocktrek Images/Getty Images; s. 144 (balony) Natalia Marszałek/WSiP; s. 146 (ewolucja Wszechświata) Andrea Danti/Shutterstock.com; s. 148 (wschód Ziemi na Księżycu) Elena11/Shutterstock.com, (zaćmienie Słońca) muratart/Shutterstock.com, (Galaktyka widok z góry) NASA/JPL-Caltech, (teleskop Hubble'a) NASA; s. 151 (dzwony) bizoo_n/iStockphoto/Getty Images; s. 152 (resor) Mrs_ya/Shutterstock.com; s. 154 (gumka przy ustach) Zamkor/WSiP; s. 155 (ciężarek na sprężynie) Alex Kutuev/Shutterstock.com; s. 161 (sinusoida z piasku) Piotr Kubat/WSiP, (oświetlone koło rowerowe) Peter Gudella/Shutterstock.com; s. 168 (dziecko na huśtawce) nattrass/E+/Getty Images; s. 171 (zegar z wahadłem) PhotographyByMK/Shutterstock.com; s. 174 (zegar Huygensa) Photo 12/Universal Images Group/Getty Images, (kulka wahadła) World History Archive/BE&W; s. 175 (wahadło Foucaulta) Science Source/BE&W; s. 176 (młot pneumatyczny) scalatore1959/iStockphoto/Getty Images; s. 177 (rezonans wahadeł) Wojciech Wójtowicz/WSiP; s. 179 (fotel antywibracyjny) Peter Ekvall/Shutterstock.com; s. 180 (masażer) tony4urban/Shutterstock.com; s. 181 (resor) Mrs_ya/Shutterstock.com, (ciężarek na sprężynie) Alex Kutuev/Shutterstock.com, (sinusoida z piasku) Piotr Kubat/WSiP; s. 182 (dziecko na huśtawce) nattrass/E+/Getty Images; s. 183 (zegar z wahadłem) PhotographyByMK/Shutterstock.com, (młot pneumatyczny) scalatore1959/iStockphoto/Getty Images; s. 187 (gejzer) Riishede/iStockphoto/Getty Images; s. 188 (muzealny termoskop) Martin Schutt/Martin Schutt/DPA/ZUMAPRESS/BE&W, (dyfuzja gazów) P.Myszka/WSiP; s. 191 (manometry) Prarinya/Shutterstock.com; s. 193 (baloniki) Dilara Mammadova/Shutterstock.com; s. 196 (lot balonem) Joe Sohm/Visions of America/Universal Images Group Editorial/Getty Images; s. 200 (ogrzewanie powietrza w balonie) ElementalImaging/E+/Getty Images; s. 203 (ogrzewanie rąk) Antonio Guillem/Shutterstock.com, (wiercenie) Wojciech Wójtowicz/WSiP, (wiercenie – zdjęcie termowizyjne) Michał Bednarek/WSiP; s. 207 (strzykawka) Piotr Kubat/WSiP; s. 209 (szybkowar) Philippe ROUSSELOT/Shutterstock.com; s. 212 (bałwan) Bilanol/iStockphoto/Getty Images; s. 215 (gotowanie – zdjęcie termowizyjne) ivansmuk/iStockphoto/Getty Images; s. 218 (silnik w samochodzie) iurii/Shutterstock.com; s. 222–223 (silnik czterosuwowy) Graphic_BKK1979/iStock/Getty Images Plus; s. 223 (rura wydechowa – zdjęcie termowizyjne) Marccophoto/iStockphoto/Getty Images; s. 228 (dyfuzja cieczy) HAFIZULLAHYATIM/Shutterstock.com; s. 235 (sople lodu) Mike Vande Ven Jr/Shutterstock.com, (topnienie lodu) Wojciech Wójtowicz/WSiP; s. 238 (wrzenie wody) Turtle Rock Scientific/Science Source/BE&W; s. 239 (przemiany fazowe jodu) Wojciech Wójtowicz/WSiP; s. 240 (gotowanie wody) Sstranger/Shutterstock.com; s. 242 (góra lodowa) Michal Balada/Shutterstock.com; s. 243 (muzealne termoskopy) www.museogalileo.it; s. 247 (chmura burzowa) SOUTHERNTraveler/Shutterstock.com; s. 251 (piec) sivVector/Shutterstock.com; s. 253 (muzealny termoskop) Martin Schutt/Martin Schutt/DPA/ZUMAPRESS/BE&W, (manometry) Prarinya/Shutterstock.com, (baloniki) Dilara Mammadova/Shutterstock.com; s. 254 (lot balonem) Joe Sohm/Visions of America/Universal Images Group Editorial/Getty Images; s. 255 (ogrzewanie powietrza w balonie) ElementalImaging/E+/Getty Images, (ogrzewanie rąk) Antonio Guillem/Shutterstock.com; s. 256 (szybkowar) Philippe ROUSSELOT/Shutterstock.com; s. 257 (bałwan) Bilanol/iStockphoto/Getty Images, (gotowanie – zdjęcie termowizyjne) ivansmuk/iStockphoto/Getty Images, (silnik w samochodzie) iurii/Shutterstock.com; s. 258 (dyfuzja cieczy) HAFIZULLAHYATIM/Shutterstock.com; s. 259 (sople lodu) Mike Vande Ven Jr/Shutterstock.com, (gotowanie wody) Sstranger/Shutterstock.com; s. 260 (muzealne termoskopy) www.museogalileo.it, (chmura burzowa) SOUTHERNTraveler/Shutterstock.com; s. 265 (dziewczynka z naelektryzowanymi włosami) DAVID R.FRAZIER/SCIENCE SOURCE/BE&W; s. 266 (kreacja pary elektron-pozyton) SPX/Science Photo Library/East News; s. 273 (pole elektrostatyczne) TED M.KINSMAN/SCIENCE SOURCE/BE&W; s. 276 (jednorodne pole elektrostatyczne) Łukasz Opaliński/Zamkor/WSiP; s. 278 (smog nad Wrocławiem) Piotr Mitelski/Shutterstock.com; s. 279 (elektrofiltr) keyfoto/Shutterstock.com; s. 281 (klatka Faradaya) Steve Nichols/Alamy Stock Photo/BE&W; s. 286 (samochód i błyskawica) JIM REED/SCIENCE SOURCE/BE&W; s. 288 (blondynka z naelektryzowanymi włosami) TED M.KINSMAN/SCIENCE SOURCE/BE&W; s. 294 (doświadczenie Franklina) STE/Science Photo Library/East News; s. 299 (pole elektrostatyczne jednorodne) ALM/Science Photo Library/East News; s. 304 (kondensatory) MCH/Science Photo Library/East News; s. 308 (błysk lampy) Koldunov/Shutterstock.com; s. 311 (wnętrze akceleratora) ALEXANDER TSIARAS/SCIENCE SOURCE/BE&W; s. 313 (akcelerator w Kalifornii) DPA/Science Photo Library/East News; s. 315 (kreacja pary elektron-pozyton) SPX/Science Photo Library/East News; s. 316 (pole elektrostatyczne) TED

M.KINSMAN/SCIENCE SOURCE/BE&W, (klatka Faradaya) Steve Nichols/Alamy Stock Photo/BE&W; s. 317 (samochód i błyskawica)) JIM REED/SCIENCE SOURCE/BE&W, (blondynka z naelektryzowanymi włosami) TED M.KINSMAN/SCIENCE SOURCE/BE&W; s. 319 (doświadczenie Franklina) STE/Science Photo Library/East News; s. 320 (pole elektrostatyczne jednorodne) ALM/Science Photo Library/East News, (kondensatory) MCH/Science Photo Library/East News; s. 321 (błysk lampy) Koldunov/Shutterstock.com, (wnętrze akceleratora) ALEXANDER TSIARAS/SCIENCE SOURCE/BE&W; s. 327 (ekran oscyloskopu) MARTYN F.CHILLMAID/SCIENCE PHOTO LIBRARY/East News; s. 332 (mężczyzna) Hanna Michalska-Baran/WSiP, (koło rowerowe) NiglayNik/Shutterstock.com; s. 337 (dłoń) Aldona Griskeviciene/Shutterstock.com; s. 343 (kalorymetr i termometr) Ryszard Piątkowski/WSiP, (czerwona puszka) Nasared/Shutterstock.com; s. 347 (palnik spirytusowy i zlewka) MSSA/Shutterstock.com, (termometr) Ryszard Piątkowski/WSiP; s. 349 (pierścień Gravesandego) Aldona Griskeviciene/Shutterstock.com; s. 350 (dylatoskop) Fabryka Pomocy Naukowych Sp. z o.o., (bimetal) Fabryka Pomocy Naukowych Sp. z o.o.

s. 34, 38, 155, 158, 160, 165, 167, 182, 184 (drewniany klocek)
Autor: valzan/Shutterstock.com

s. 248, 250, 335, 337, 347 (statyw)
Autor: Vector things/Shutterstock.com

s. 213, 248–250, 252 (palnik gazowy)
Autor: Aldona Griskeviciene/Shutterstock.com

s. 45, 71, 86–89, (Ziemia)
Autor: Sailorr/Shutterstock.com

pozostałe ilustracje
Autorzy: Katarzyna Mentel, Hanna Michalska-Baran, TomMaster Studio

Aktualność linków, które występują w tym podręczniku i odsyłają do zewnętrznych stron internetowych, została sprawdzona przed ich opublikowaniem (dostęp z dnia 20.04.2020 r.). Wydawnictwo nie ponosi odpowiedzialności za aktualność oraz zawartość tych stron lub stron, do których linki tam się znajdują.

Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne oświadczają, że podjęły starania mające na celu dotarcie do właścicieli i dysponentów praw autorskich wszystkich zamieszczonych utworów. Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, przytaczając w celach dydaktycznych utwory lub fragmenty, postępują zgodnie z art. 27^1 ustawy o prawie autorskim. Jednocześnie Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne oświadczają, że są jedynym podmiotem właściwym do kontaktu autorów tych utworów lub innych podmiotów uprawnionych w wypadkach, w których twórcy przysługuje prawo do wynagrodzenia.

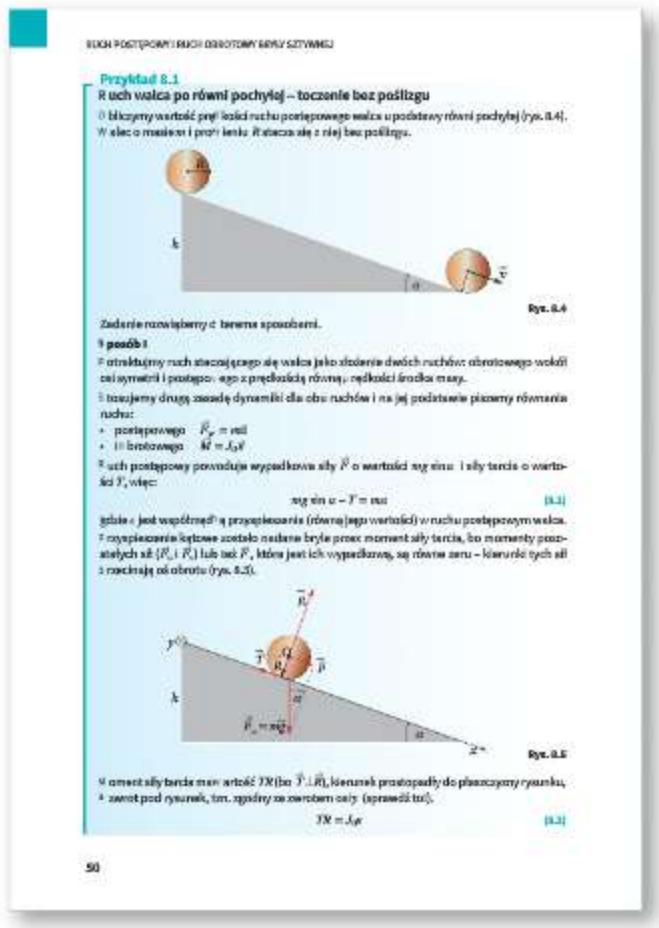
FIZYKA

ZAKRES ROZSZERZONY

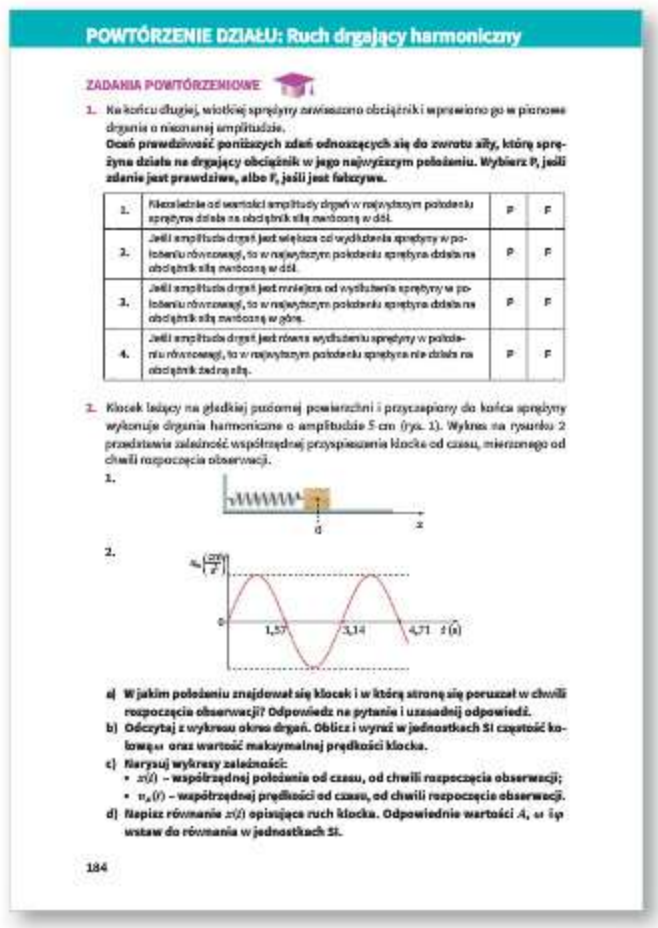
PODRĘCZNIK • 4-LETNIE LICEUM • 5-LETNIE TECHNIKUM



Wprowadzenie do każdego rozdziału ułatwia przygotowanie się do lekcji i uporządkowanie wiedzy.



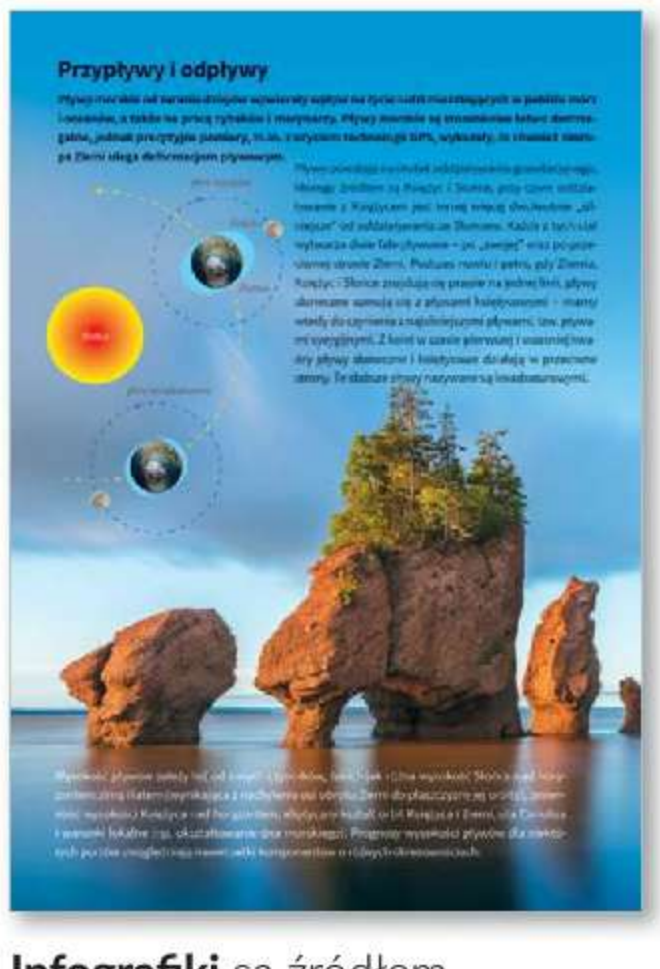
Przykłady rozwiązane krok po kroku przygotowują ucznia do samodzielnego rozwiązywania zadań.



Systematyczne rozwiązywanie **zadań** pomaga w przygotowaniu do sprawdzianów i matury.



Informacje zatytułowane **Wiedzieć więcej** uzupełniają wykład o dodatkowe treści.



Infografiki są źródłem informacji i inspiracją do stawiania nowych pytań i rozwijania zainteresowań.



Powtórzenie działu w formie repetytorium zapewnia utrwalenie oraz uporządkowanie wiedzy.

WSiP WYDAWNICTWA SZKOLNE i PEDAGOGICZNE

wsip.pl
sklep.wsip.pl
infolinia: 801 220 555